LA INFLUENCIA DEL CONOCIMIENTO DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

The influence of natural number knowledge in the understanding of rational numbers

González-Forte, J. M.[a], Fernández, C.[a] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

Los números racionales es uno de los contenidos matemáticos más difíciles de comprender por los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, ya que a menudo aplican las propiedades de los números naturales para resolver actividades con los números racionales cuando no es apropiado (fenómeno Natural Number Bias). Nuestra investigación examina la evolución de este fenómeno en el contexto español desde la Educación Primaria a Educación Secundaria. 438 estudiantes desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de ESO respondieron a un cuestionario con ítems relativos a la comparación de números racionales, operaciones aritméticas y densidad. Los niveles de éxito y los razonamientos empleados por los estudiantes muestran que el fenómeno Natural Number Bias está presente en todos los cursos y aunque disminuye a lo largo de los años, persiste en algunos ítems al finalizar la Educación Secundaria.

Palabras clave: *números racionales, fracciones, números decimales, Educación Primaria, Educación Secundaria.*

Abstract

Rational numbers is one of the most difficult mathematical content to understand for primary and secondary school students, since they often apply the properties of natural numbers when working with rational numbers when it is not appropriate (Natural Number Bias phenomenon). Our research aims to examine the evolution of this phenomenon in the Spanish context from primary to secondary school. 438 students from 5th grade to 10th grade answered a test with items about rational number comparison, arithmetic operations with rationales and density. The levels of success and students' reasoning indicate that the Natural Number Bias phenomenon influences students' responses and, although it decreases along grades, it persists at the end of the secondary education in some of the items.

Keywords: r*ational numbers, natural number bias, fractions, decimal numbers, primary education, secondary education.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones están mostrando que los estudiantes de primaria y secundaria tienen dificultades en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales desde la década de los 80 (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Moss y Case, 1999; Resnick et al., 1989; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015). Una de las posibles causas se debe al uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando están aprendiendo los números racionales. Las dificultades identificadas se justifican ya que los números racionales no es una simple extensión de los números naturales. El uso del conocimiento de los números naturales cuando se resuelven actividades con racionales, se

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

ha denominado *Natural Number Bias* (Ni y Zhou, 2005). La investigación sobre este fenómeno está siendo replanteada a nivel internacional en los últimos años desde nuevas perspectivas subrayando que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas sobre racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012; Van Dooren, et al., 2015). Este hecho ha sido estudiado en tres dominios (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2016; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel y Van Dooren, 2015): la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas y la densidad de los números racionales, teniendo en cuenta el papel desempeñado por las distintas representaciones de los números racionales (fracciones y números decimales) frente a la representación única de los números naturales (Vamvakoussi et al., 2012). Por ejemplo, los estudiantes a menudo tienen dificultades en identificar que 3/4, 6/8, 0.75, 0.750 son representaciones del mismo número racional.

Las investigaciones han indicado que los errores con la magnitud de los números decimales en tareas de comparación son frecuentes porque al contrario de los números naturales, *la cantidad de dígitos* del número no ayuda a decidir qué numero decimal es mayor. De hecho, los estudiantes tienen la creencia de que *los números decimales más largos son más grandes* y los *números decimales más cortos son más pequeños*. Por ejemplo, los estudiantes piensan que el número decimal 3,432 es más grande que 3,71 porque la parte decimal tiene más cifras (Resnick at al., 1989). En la comparación de fracciones, cuando las fracciones que se comparan son *compatibles* con el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales, como en el caso de 1/3 y 7/8 (ya que 7/8 es mayor que 1/3 y además el numerador y denominador es mayor), los estudiantes tienen mayor éxito. Sin embargo, cuando el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales no es compatible con las fracciones dadas (por ejemplo, cuando se comparan las fracciones 2/3 y 5/8, donde 2/3 es mayor que 5/8, pero el numerador y denominador de 2/3 son menores) entonces el nivel de éxito es menor (De Wolf y Vosniadou, 2015).

En relación a las operaciones aritméticas, las dificultades han sido observadas particularmente en las multiplicaciones y divisiones (Van Hoof et al., 2015) por la creencia que proviene de los números naturales de que el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor y el resultado de una división siempre es un número menor. Por ejemplo, en tareas de multiplicación de un natural por una fracción, el conocimiento de los números naturales sobre *el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor* es compatible en tareas con fracciones impropias como $2 \times 5/3$, sin embargo, este conocimiento no es válido cuando se tiene una multiplicación de un número natural por una fracción propia $2 \times 2/3$ (Fischbein et al., 1985).

El concepto de densidad es uno de los conceptos más difíciles de comprender por parte de los estudiantes (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen y Lehtinen, 2015; Vosniadou y Verschaffel, 2004), ya que los estudiantes a menudo creen que no hay, o solo hay una cantidad finita de números entre dos números racionales. Por tanto, el conocimiento de los números naturales no es compatible con la densidad de los números racionales (entre dos números racionales hay infinitos racionales). En este sentido, los estudiantes a menudo consideran que entre 1,23 y 1,24 no hay otros números o que entre 1/2 y 1/4 únicamente está la fracción 1/3.

El objetivo de este estudio es obtener información sobre la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* en los tres dominios indicados desde final de la Educación Primaria hasta la Educación Secundaria en el contexto español. Los estudios previos han utilizado cuestionarios de elección múltiple examinando el nivel de éxito y estudiando los tiempos de reacción (Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes y Dartnell, 2015), mientras que en nuestra investigación realizamos un análisis cualitativo de los razonamientos de los estudiantes para confirmar o no las hipótesis obtenidas en los estudios previos, generar hipótesis adicionales sobre las posibles relaciones entre la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas (en particular, la multiplicación de un racional por un natural) y la densidad de los números racionales, y determinar características de la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* desde los últimos años de Educación Primaria hasta el final de la Educación Secundaria.

MÉTODO

Participantes e instrumento

En este estudio participaron 438 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (Tabla 1). Los estudiantes pertenecían a dos centros de Educación Primaria y a dos centros de Educación Secundaria de la provincia de Alicante, situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta.

Tabla 1. Participantes

	5EP	6EP	1ES	2ES	3ES	4ES
Nº	85	81	78	81	57	56

El instrumento consistió en un cuestionario compuesto por 16 ítems sobre la magnitud de los números racionales, las operaciones aritméticas y la densidad. Además, los ítems son congruentes (compatibles con el conocimiento de los números naturales) o incongruentes (incompatibles con el conocimiento de los números naturales).

En relación a la magnitud hay cuatro ítems de comparación de fracciones donde se pedía a los estudiantes rodear la fracción mayor (Tabla 2) y tres ítems de ordenación de números decimales (Tabla 3).

Tabla 2. Items dominio magnitud (comparación de fracciones) y características

Congruente	**Incongruente**
(Ítem 1) 2/3 vs 7/8	(Ítem 3) 5/3 vs 9/7
(Ítem 2) 2/7 vs 5/8	(Ítem 4) 2/3 vs 5/8

Al final de los ítems sobre comparación de fracciones los estudiantes tenían que contestar la siguiente pregunta: *¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?*

Tabla 3. Items dominio magnitud (comparación/ordenación de decimales)

Incongruente
(Ítem 5) Rodea el número mayor: 0.37 vs. 0.5 ¿Cómo lo has sabido?
(Ítem 6) Ordena de mayor a menor: 0.82, 0.835 y 0.95
(Ítem 7) ¿Algunos de los siguientes números son el mismo? 0.53, 0.053 y 0.530

Para estudiar la densidad se propuso un ítem incongruente sobre la existencia o no de números entre dos dados (Ítem 8: *¿Existe algún número entre 0 y 1? Si existe, pon un ejemplo*) y cuatro ítems en los que se pedía escribir un número entre dos racionales dados (representados como fracciones y como decimales; Tabla 4):

Tabla 4. Items dominio densidad y características

	Congruente	**Incongruente**
Fracciones	(Ítem 9) 2/7 y 5/7	(Ítem 11) 3/5 y 4/5
Decimales	(Ítem 10) 0.2 y 0.9	(Ítem 12) 0.4 y 0.5

El dominio de las operaciones aritméticas se estudió mediante cuatro ítems considerando la multiplicación de un número racional (fracción o decimal) por un natural (Tabla 5):

Tabla 5. Items dominio operaciones aritméticas y características

	Incongruente	**Congruente**
Fracciones	(Ítem 13) 5 × 1/2	(Ítem 14) 10 × 3/2
Decimales	(Ítem 15) 2 × 0.5	(Ítem 16) 7 × 1.5

En estos ítems los estudiantes tenían que indicar si el resultado era mayor o menor que el número natural por el que estaba multiplicado y además tenían que responder a la pregunta *¿Cómo lo sabes?*, con el objetivo de conocer el razonamiento empleado. Así, en el cuestionario se plantean ítems en los que los estudiantes han de resolver y explicar el proceso para llegar a la respuesta seleccionada. Este formato de los ítems permite obtener datos sobre el razonamiento que emplean y su posible relación con el conocimiento de los números naturales.

Análisis

El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase, se identificaron los niveles de éxito en cada ítem y curso. Para ello, las respuestas correctas en cada ítem se codificaron con 1 y las incorrectas o en blanco con 0. A partir de esta codificación, se realizó un análisis de regresión logística de medidas repetidas usando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE), mediante el software SPSS 23 para estudiar si las diferencias eran significativas. En la segunda fase del análisis examinamos el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes en cada uno de los ítems con el objetivo de identificar cuándo se apoyaban en el conocimiento de los números naturales o usaban otros argumentos. En este estudio, se presenta los resultados del análisis cualitativo mediante ejemplos de los razonamientos de los estudiantes con el objetivo de confirmar o no las hipótesis obtenidas en los estudios previos y generar hipótesis adicionales sobre el fenómeno.

RESULTADOS

Para cada uno de los dominios, se presenta la evolución de los niveles de éxito de cada ítem desde 5º curso de Educación Primaria hasta 4º curso de Educación Secundaria y el porcentaje de razonamientos basados en el *Natural Number Bias.*

Magnitud

La Figura 1 muestra los porcentajes de éxito y el porcentaje de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales en cada uno de los ítems del dominio de magnitud (comparación de fracciones). Atendiendo a los niveles de éxito en los ítems de comparación de fracciones, los ítems congruentes tuvieron mayor nivel de éxito (ítem 1 y 2) que los incongruentes (ítems 3 y 4), hecho que se explica por el alto porcentaje de estudiantes que usaron un razonamiento basado en el *Natural Number Bias.* El uso del conocimiento de los números naturales (en este caso la idea de "a mayor numerador y denominador la fracción es mayor") es compatible con los ítems congruentes pero no con los ítems incongruentes. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de razonamiento basado en el *Natural Number Bias* para el item 4 (incongruente).

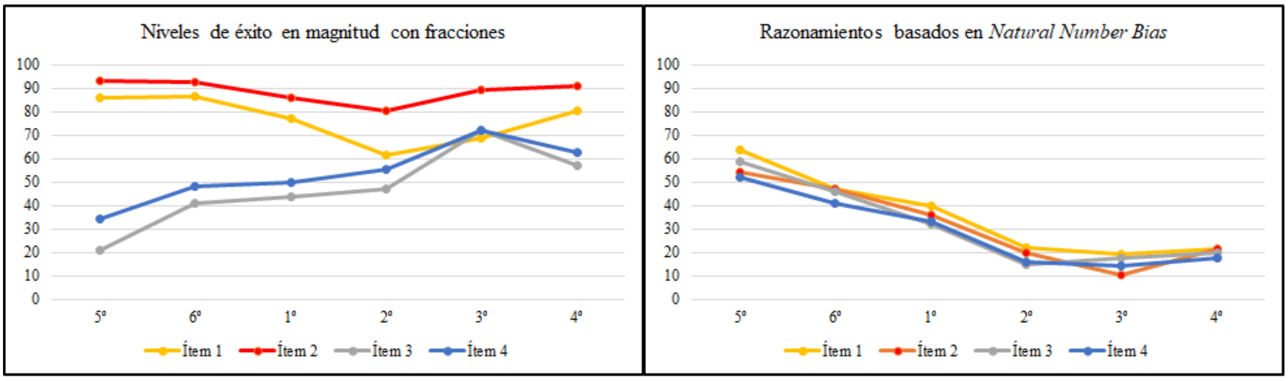
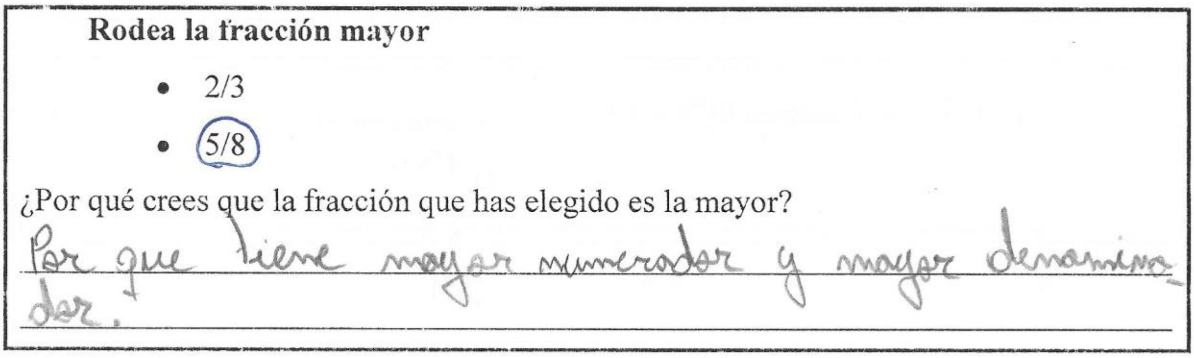


Figura 1. Nivel de éxito y uso de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de magnitud - Fracciones


Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 5/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Por que tiene mayor numerador y mayor denominador.

Figura 2. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO al ítem 4 (incongruente)

Además, la gráfica muestra una disminución del nivel de éxito en los dos ítems de comparación de fracciones congruentes (ítems 1 y 2) desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria y después un aumento desde 2º a 4º de Educación Secundaria. Mientras que el nivel de éxito de los ítems de comparación de fracciones incongruentes (ítems 3 y 4) aumenta con los años. Estas tendencias en los niveles de éxito se explican por la disminución del uso del razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales (*Natural Number Bias)* desde 5º de Educación Primaria a 4º de Educación Secundaria y el aumento de razonamientos correctos a lo largo de estos cursos. Sin embargo, se observa que el uso del conocimiento de los números naturales que es incompatible en ítems incongruentes se mantiene al final de la etapa de secundaria (un 20% de los estudiantes en 4º de ESO utilizan este razonamiento en los cuatro items de comparación de fracciones).

La Figura 3 muestra el nivel de éxito y el porcentaje de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales en cada uno de los ítems de comparación/ordenación de decimales.

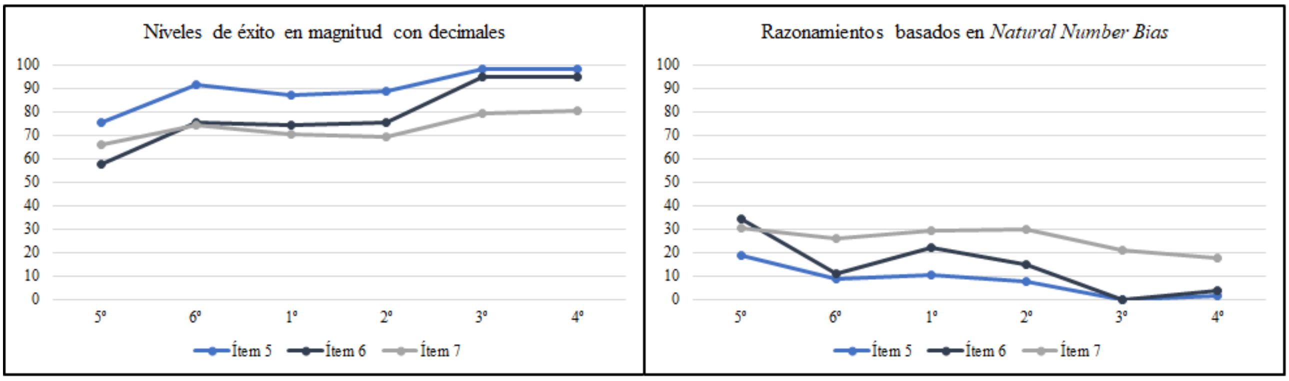
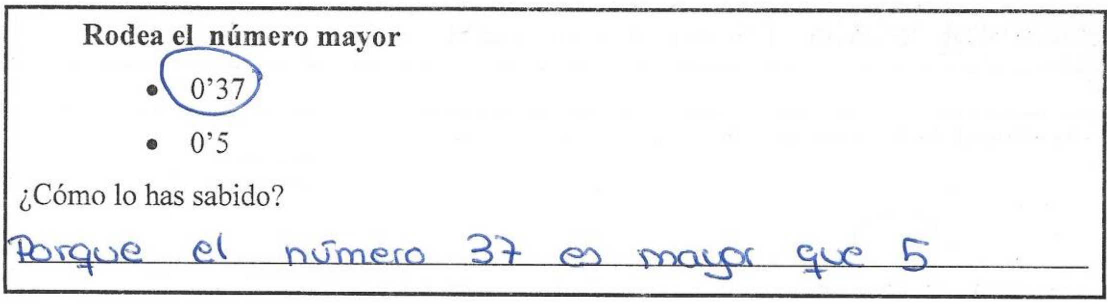


Figura 3. Nivel de éxito y uso de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de magnitud - Decimales

Los ítems incongruentes con números decimales (ítems 5, 6 y 7) obtuvieron un porcentaje más alto de éxito que los incongruentes con fracciones (ítems 3 y 4, Figura 2). De hecho, el uso de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales fue menor en estos ítems. No obstante, aproximadamente entre 20% - 30% de los estudiantes de 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria, usaron razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales incompatibles en estos ítems (incongruentes). Así, en el ítem de rodear qué número era mayor (ítem 5) y el de ordenar los números de mayor a menor (ítem 6), los estudiantes usaron un razonamiento centrado en "comparar el número de cifras de la parte decimal" (Figuras 4 y 5). El uso de este razonamiento "comparar el número de cifras de la parte decimal" disminuyó a lo largo de los cursos llegando casi a desaparecer (un 0%) al final de la etapa de secundaria.

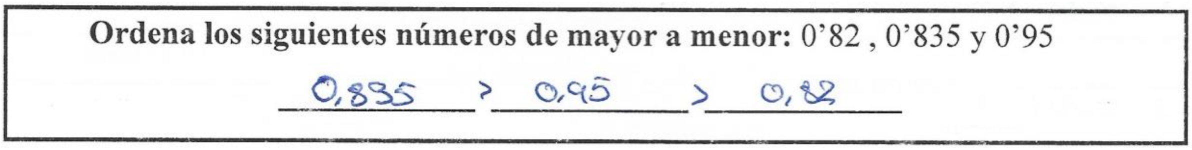

Rodea el número mayor

- 0’37
- 0’5

¿Cómo lo has sabido?

Porque el número 37 es mayor que 5

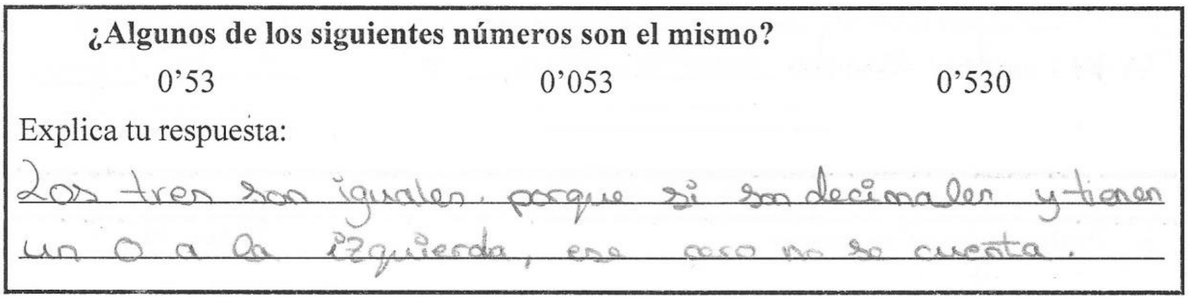
Figura 4. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO


Ordena los siguientes números de mayor a menor: 0’82 , 0’835 y 0’95

0,835 > 0,95 > 0,82

Figura 5. Respuesta de un estudiante de 4º ESO

Cabe destacar, que el uso de razonamientos centrados en el *Natural Number* Bias persistió al final de la etapa de secundaria en el ítem 7. Este ítem preguntaba si alguno de los números dados era el mismo (Figura 6), indagando acerca del papel del 0 que proviene de los naturales “un 0 a la izquierda no tiene ningún valor”.


¿Algunos de los siguientes números son el mismo?

0’53 0’053 0’530

Explica tu respuesta:

Los tres son iguales, porque si son decimales y tienen un 0 a la izquierda, eso no se cuenta.

Figura 6. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

Operaciones aritméticas

La Figura 7 muestra los niveles de éxito de los estudiantes en los cuatro ítems de multiplicación de un número natural por un número racional (fracción y número decimal), así como el porcentaje de empleo de razonamientos basados en el *Natural Number Bias*. Los ítems congruentes (ítem 14 – fracciones y 16 – decimales) tuvieron mayor nivel de éxito que los incongruentes (ítems 13 y 15) ya que los estudiantes usaron razonamientos basados en el conocimiento del número natural compatibles con los ítems congruentes pero incompatibles con los ítems incongruentes. Estos razonamientos se centraban en la idea proveniente de los naturales de “si multiplicas un número por otro, el resultado siempre será un número mayor” (Figuras 8 y 9).

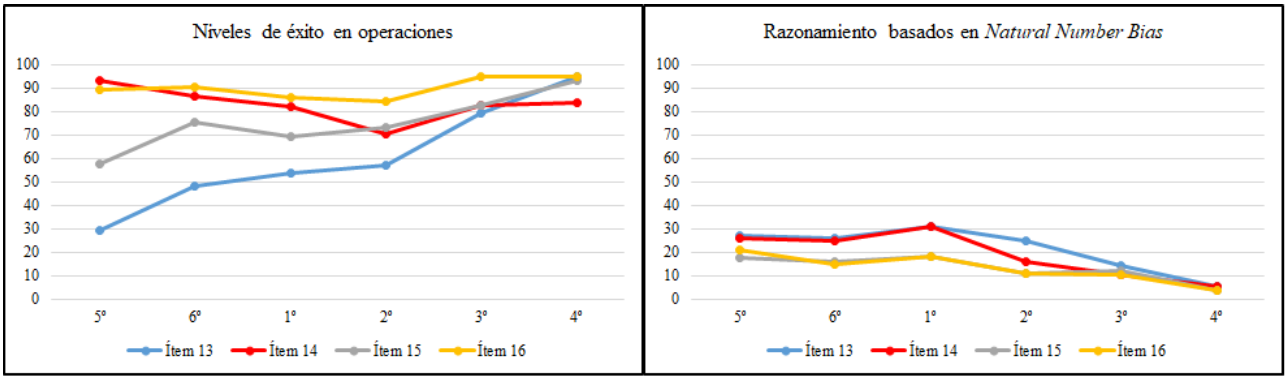
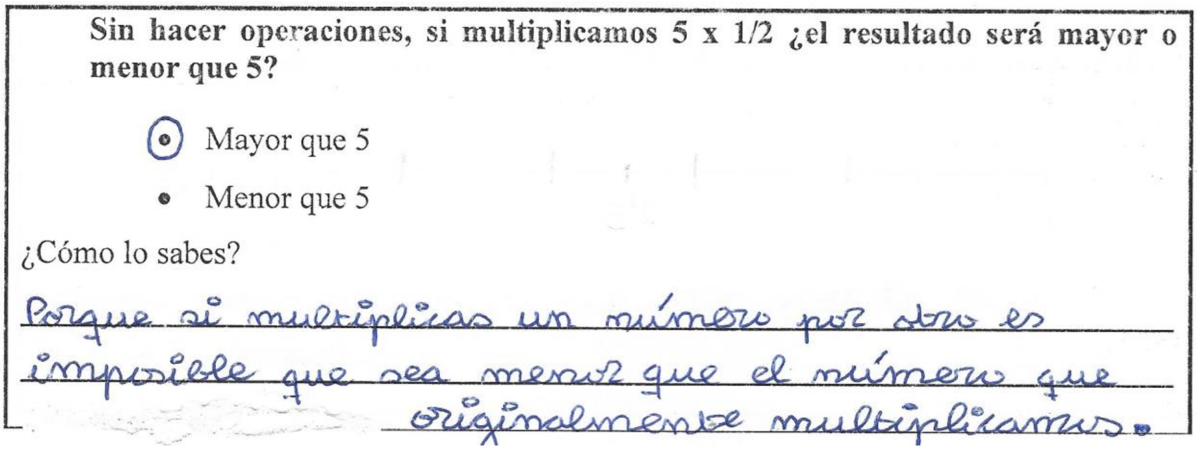


Figura 7. Nivel de éxito y empleo de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de operaciones

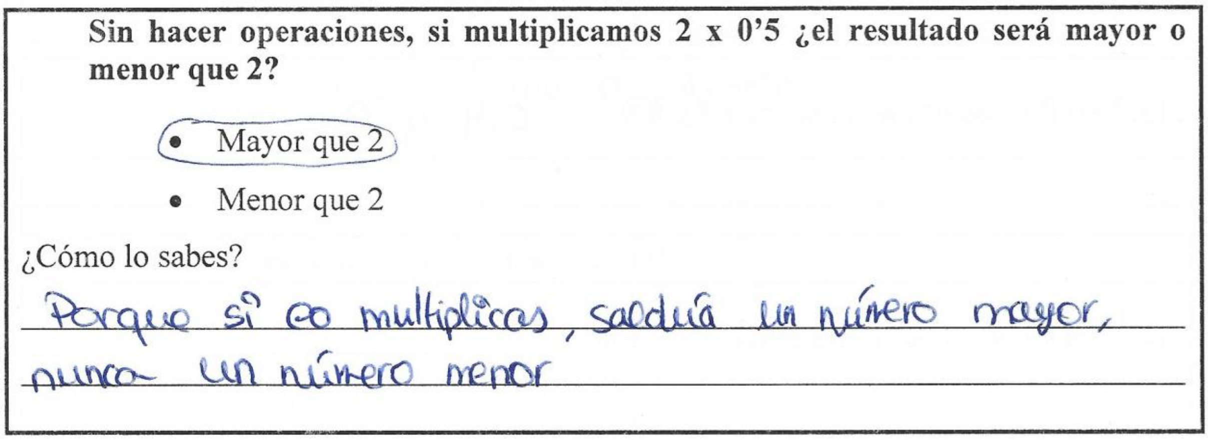

Sin hacer operaciones, si multiplicamos 5 x 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?

- Mayor que 5
- Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

Porque si multiplicas un número por otro es imposible que sea menor que el número que originalmente multiplicamos.

Figura 8. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO


Sin hacer operaciones, si multiplicamos 2 x 0'5 ¿el resultado será mayor o menor que 2?

- Mayor que 2
- Menor que 2

¿Cómo lo sabes?

Porque si lo multiplicas, saldrá un número mayor, nunca un número menor

Figura 9. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

En cuanto a la evolución, se observa la misma tendencia que con los ítems de comparación de fracciones. Se observa una disminución del nivel de éxito en los dos ítems congruentes (ítems 14 y 16) desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria y después un aumento desde 2º a 4º de Educación Secundaria. Mientras que el nivel de éxito de los ítems incongruentes (ítems 13 y 15) aumenta con los años. La disminución en los niveles de éxito en los ítems congruentes desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria (y después el aumento de 2º a 4º de Educación Secundaria) y el aumento en los ítems incongruentes a lo largo de los cursos tiene relación con la disminución en el uso del conocimiento de los números naturales (*Natural Number Bias)* y el aumento de razonamientos correctos. Sin embargo, se observa que el razonamiento centrado en el conocimiento de los números naturales incompatible en ítems incongruentes casi desaparece al final de la etapa de secundaria a diferencia del dominio magnitud - comparación de fracciones.

Densidad

En el dominio de la densidad únicamente se muestran los porcentajes de éxito en los cinco ítems propuestos, pues las respuestas incorrectas coinciden con el uso de un razonamiento centrado en el *Natural Number Bias* (Figura 10).

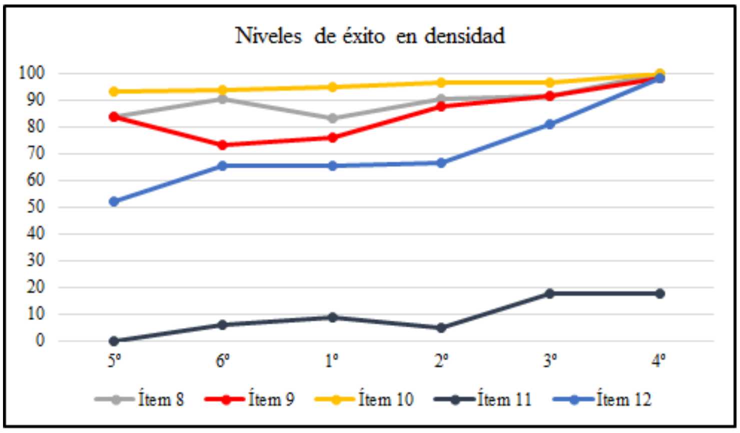


Figura 10. Porcentajes de nivel de éxito en los ítems de densidad

En este dominio, los estudiantes tuvieron más éxito en ítems congruentes (ítems 9 y 10) que en ítems incongruentes (ítems 11 y 12). De nuevo, los estudiantes usaron un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales “entre dos números no hay otros números” compatible solo en ítems congruentes (Figuras 11 y 12).

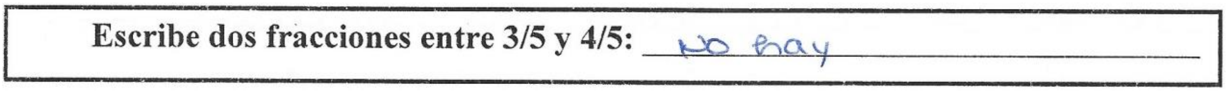


Figura 11. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

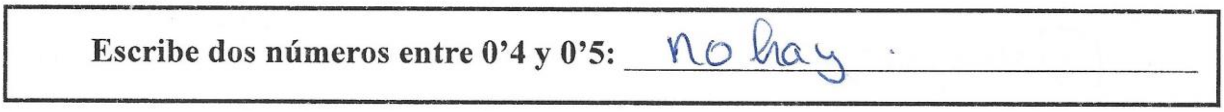


Figura 12. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

El ítem 8 que preguntaba *¿Existe algún número entre 0 y 1? Si existe, pon un ejemplo*, tuvo un porcentaje de éxito superior al 80% en todos los cursos, ya que los estudiantes respondían diciendo que sí y daban como ejemplo el 0.5. Sin embargo, entre 15-20% de los estudiantes de los primeros cursos usaron un razonamiento centrado también en el conocimiento de los números naturales en este ítem (Figura 13).

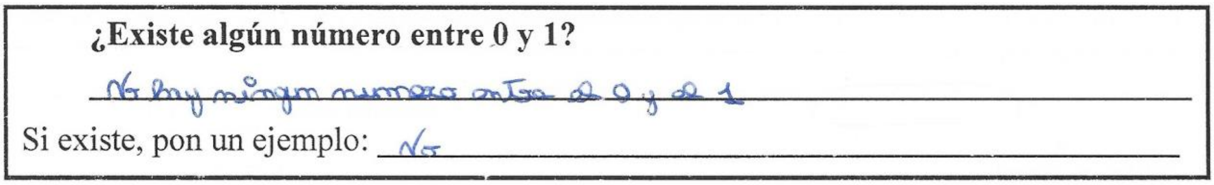


Figura 13. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

En relación a la evolución, se observa un aumento en los niveles de éxito de los ítems incongruentes por la disminución del uso de razonamiento centrados en el *Natural Number Bias*. Cabe destacar que al final de la etapa de secundaria, este fenómeno casi desaparece en la mayoría de los ítems, a excepción del ítem 11 (incongruente con fracciones) donde se observa que alrededor de un 80% de los estudiantes todavía usan un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es obtener información sobre la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* en el contexto español, realizando un estudio transversal desde 5º de Educación Primaria a 4º de Educación Secundaria, evidenciando el fenómeno a través de los razonamientos de los estudiantes. Los resultados obtenidos han mostrado que en los dominios estudiados, los niveles de éxito fueron mayores en los ítems en los que el conocimiento sobre los números naturales era compatible (ítems congruentes), lo que determina un uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando están aprendiendo los números racionales. De este modo, se confirma en el contexto español las hipótesis de los estudios cuantitativos previos (cuestionarios de elección múltiple) de que “los estudiantes tienen mayor nivel de éxito en los congruentes que en los incongruentes” (Ni y Zhou, 2005, Van Dooren et al., 2015) y que este hecho se mantiene a lo largo de los años.

De este modo, en relación al dominio de la magnitud, los resultados obtenidos han evidenciado la influencia del conocimiento de los números naturales a la hora de hacer comparaciones u ordenaciones con los números decimales, ya que los estudiantes tienen la creencia de que “los números decimales más largos son más grandes” (Resnick at al., 1989). Esta influencia ha sido todavía más destacable en los ítems de comparación de fracciones donde los estudiantes han usado el razonamiento “una fracción es mayor si su numerador y denominador son mayores”, incompatible en ítems incongruentes (De Wolf y Vosniadou, 2015). En el dominio de las operaciones se ha observado cómo ha influido la creencia propia de los números naturales de que “el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor” (Fischbein et al., 1985), pues el nivel de éxito ha sido claramente mayor en tareas congruentes que en las incongruentes. Con respecto al domino de la densidad, el conocimiento de que hay un número finito de números entre dos naturales ha influido de forma clara en las respuestas de los estudiantes (Vosniadou y Verschaffel, 2004), pues el nivel de éxito ha sido muy inferior en los ítems incongruentes, sobre todo con fracciones, donde la tendencia de los estudiantes fue a responder que entre 3/5 y 4/5 no había ningún número.

Por otro lado, cabe destacar el papel de las diferentes representaciones de los números racionales. En nuestro estudio se observa un mayor uso de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales cuando se usa la representación como fracción que cuando se usa la representación decimal. Este resultado se observa en los tres dominios y pone de manifiesto el papel que los modos de representación desempeñan en la comprensión de los números racionales.

En relación a la evolución a lo largo de los cursos, se observa, que un alto porcentaje de estudiantes de primaria y primeros cursos de Educación Secundaria usan razonamiento basados en el conocimiento de los números naturales, sin embargo, hay una disminución del uso de estos en los tres dominios a lo largo de los cursos. Cabe destacar, que al finalizar la etapa de secundaria estos razonamientos solo persisten en algunos ítems: ítems de magnitud de comparación de fracciones y densidad (con fracciones).

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d’Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135).

Referencias

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*, 3-17.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C. y Dartnell, P. (2015). The effect of inhibitory control on general mathematics achievement and fraction comparison in middle school children. *ZDM*, *47*(5), 801-811.

Gómez, D. M., Silva, E. y Dartnell, P. (2017). En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of PME41* (vol. 2, pp. 353-360). Singapore: PME.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. y Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept. *Learning and Instruction, 37,* 14-20.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107,* 537-555.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, *20*, 8-27.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. En L. Verschaffel y S. Vosniadou (Eds.), Conceptual change in mathematics learning and teaching. Special Issue of *Learning and Instruction*, *14*(5), 445-451.