

CARACTERÍSTICAS DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES SOBRE FRACCIONES

Characteristics of the professional noticing of students' mathematical thinking skill development about fractions

Ivars, P.^a, Fernández, C.^a y Llinares, S.^a

^aUniversidad de Alicante

Resumen

En este estudio 85 estudiantes para maestro participaron en un módulo de enseñanza donde tenían que usar la información de una trayectoria hipotética de aprendizaje de estudiantes de educación primaria sobre las fracciones para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir cómo responder. Los resultados muestran que la información de la trayectoria hipotética de aprendizaje ayudó a los estudiantes para maestro a generar un discurso con detalles sobre el pensamiento matemático de los estudiantes respecto a las fracciones y a proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes. Además, los resultados sugieren una relación entre la capacidad para atender a los detalles y la habilidad para proponer actividades para apoyar el desarrollo conceptual de los estudiantes.

Palabras clave: *mirada profesional, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, fracciones, estudiantes para maestro de educación primaria.*

Abstract

In this study, 85 pre-service primary school teachers participated in a teaching module where they had to use information from a hypothetical learning trajectory of primary students about fractions to interpret students' mathematical thinking and decide how to respond. Results show that the information of the hypothetical learning trajectory helped pre-service teachers to generate a detailed discourse about students' mathematical thinking regarding fractions and to propose activities focused on students' understanding. Furthermore, results suggest a relationship between the ability to attend to the details and the ability to propose activities to support students' conceptual development.

Keywords: *professional noticing, hypothetical learning trajectories, fractions, pre-service primary school teachers.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Para Mason (2011) “mirar profesionalmente implica un cambio o un movimiento en la atención” (p. 45) e identifica distintas maneras de prestar atención: i) *holding holes* es atender sin discernir detalles, ii) discernir detalles (*discerning details*) implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) reconocer relaciones (*recognizing relationships*) implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) percibir propiedades (*perceiving properties*) consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y, v) razonar en función de las propiedades (*reasoning on the basis of agreed properties*) implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás (Mason 2011, p.47). La particularización de esta competencia docente cuando se centra en el pensamiento matemático de

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). Características del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes sobre fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 270-279). Gijón: SEIEM.

los estudiantes realizada por Jacobs Lamb y Philipp (2010) subraya la interrelación de tres destrezas: identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes (discernir detalles), interpretar su pensamiento matemático considerando los detalles matemáticos identificados (establecer relaciones), y decidir cómo continuar teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes (decidir qué actividades proponer que ayuden a los estudiantes a progresar conceptualmente).

Los resultados de las investigaciones previas indican que la competencia mirar profesionalmente puede desarrollarse en los programas de formación inicial de maestros (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Goldsmith y Seago, 2011; van Es, Cashen, Barnhart y Auger, 2017) aunque no es una tarea fácil sin la ayuda de una estructura o marco de referencia que guíen qué y cómo mirar (Levin, Hammer y Coffey, 2009), y que la destreza tomar decisiones es la más difícil de desarrollar (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016). Aunque los maestros y estudiantes para maestro pueden aprender a identificar los detalles de las estrategias de los estudiantes a veces no son capaces de usarlos para interpretar su pensamiento matemático o para tomar decisiones de acción (Barnhart y van Es, 2015; Gupta, Soto, Dick, Broderick y Appelgate, 2018; Stahnke et al., 2016).

Desde la perspectiva de apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente, las trayectorias de aprendizaje pueden servir a los estudiantes para maestro como marco de referencia con el que estructurar su atención (Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016) dotándoles de un lenguaje matemático para describir el pensamiento de los estudiantes y permitiéndoles identificar los objetivos de aprendizaje y dar respuesta con instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012). Nuestro estudio se apoya en la hipótesis de que proporcionar información sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje de un concepto matemático podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a tomar decisiones de acción centradas en su comprensión.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre las fracciones

La conceptualización de Simon (1995) de trayectoria de aprendizaje, como un camino hipotético por el que el aprendizaje de los estudiantes puede discurrir, está formada por tres elementos: *un objetivo de aprendizaje, la descripción de un modelo del proceso de aprendizaje y actividades de enseñanza*. En esta investigación hemos construido una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para el concepto de fracción en educación primaria a partir de las investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones (Battista, 2012; Steffe y Olive, 2010).

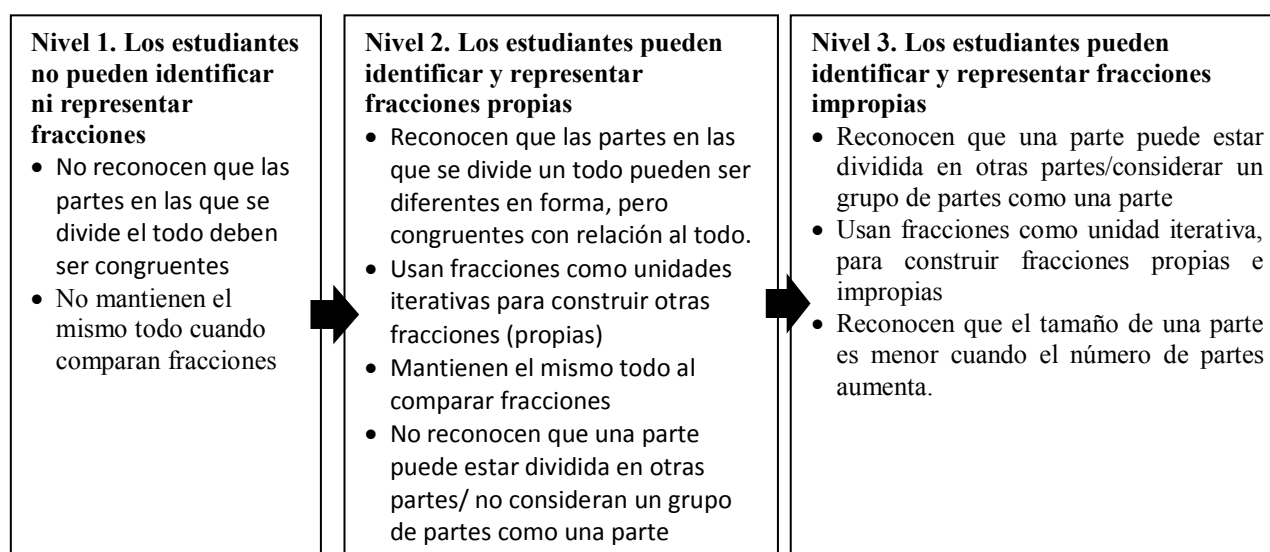


Figura 1. Principales características de los niveles de comprensión de los estudiantes de primaria en la THA

El objetivo de aprendizaje de esta trayectoria es dar sentido al significado de fracción como parte-todo. Por lo que respecta al aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones, se han considerado tres niveles de comprensión (Figura 1). Finalmente, en cuanto a las actividades de aprendizaje se incluyen actividades de identificación, comparación y representación de fracciones en contexto continuo y discreto que apoyan la transición entre los niveles de comprensión de los estudiantes de educación primaria.

El objetivo de este estudio es analizar si la información proporcionada sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a tomar decisiones de acción centradas en su comprensión.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 85 estudiantes para maestro (EPM) del tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria. Los EPM cursaban una asignatura relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en la que uno de los objetivos es el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. Los EPM participaron en un módulo de enseñanza-aprendizaje correspondiente a las fracciones de seis sesiones de dos horas de duración. En la primera sesión se resolvieron actividades de fracciones identificando elementos matemáticos implicados. En la sesión 2, se analizaron resoluciones de estudiantes de primaria (videos) con el fin de aprender a identificar los elementos matemáticos implicados en las respuestas. En la sesión 3 se les presentó la trayectoria de aprendizaje considerada como información que les puede ayudar a analizar las respuestas de los estudiantes. En las sesiones 4 y 5 los EPM resolvieron dos tareas donde tenían que analizar respuestas de estudiantes con distinto nivel de comprensión usando la trayectoria de aprendizaje: una de identificación de fracciones (tarea 1) y otra de comparación de fracciones (tarea 2). En la sesión de evaluación (sesión 6), los EPM resolvieron una tarea similar a la de las sesiones 4 y 5: identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad (tarea 3).

En este estudio presentaremos los datos obtenidos en las tareas correspondientes a la sesión 4 (Tarea 1) y sesión 6 (Tarea 3). La estructura de las dos tareas era similar. En primer lugar, se presentaba una actividad de fracciones y las respuestas de tres estudiantes o parejas de estudiantes de primaria que mostraban características de los diferentes niveles de comprensión sobre fracciones de la THA. A continuación, los EPM debían responder tres preguntas:

- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista.

En la Tarea 1 los elementos matemáticos involucrados en la actividad son: *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes* (EM1) y *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte* (EM2). Las respuestas de los estudiantes de educación primaria reflejan diferentes características de los niveles de comprensión de la trayectoria de aprendizaje (Ivars, Fernández y Llinares, 2017). La Figura 2 muestra la actividad y las respuestas de los estudiantes de primaria en la Tarea 1. La Tarea 3 consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a dos actividades de fracciones, una de identificación y otra de reconstrucción de la unidad (Figura 3). En esta tarea, además de los elementos matemáticos 1 y 2 de la tarea 1, está implicado el elemento matemático 3 (EM3), *fracciones como unidades iterativas*

para construir otras fracciones. Las respuestas de cada estudiante muestran características de los distintos niveles de comprensión en la trayectoria de aprendizaje (Ivars et al., 2017).

1. ¿Qué figura representa $\frac{3}{4}$?		
<p>Pareja 1: A, B, C y de son $\frac{3}{4}$ porque tienen 3 partes de 4 sombreadas</p>	<p>Pareja 2: B y D son $\frac{3}{4}$ porque están divididas en 3 partes iguales y 3 sombreadas. A y C no son $\frac{3}{4}$ porque las partes no son iguales. E son $\frac{24}{18}$ y F no es una fracción.</p>	<p>Pareja 3: A, B, C y D como la pareja 2. E son $\frac{3}{4}$ porque tiene 4 líneas de 6 cuadrados y 3 sombreadas, y F también son $\frac{3}{4}$, ya que tiene 4 grupos de 2 cuadros y 3 grupos están sombreados</p>

Figura 2. Tarea 1: Identificación de fracciones (Battista, 2012)

	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
<p>¿Qué figuras representan $\frac{3}{8}$?</p>	<p>Las figuras que representan $\frac{3}{8}$ son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas</p>	<p>F) representa $\frac{3}{8}$. A) y B) no son $\frac{3}{8}$ porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son $\frac{6}{16}$</p>	<p>A) y B) no tienen las partes congruentes y no son $\frac{3}{8}$. C), D), E) y F) representan $\frac{3}{8}$.</p>
<p>Esta figura representa $\frac{5}{3}$ de la unidad. Representa la unidad</p>	<p>Esto son 3 partes</p>	<p>Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.</p>	<p>Si nos muestran $\frac{5}{3}$ primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombro 3 partes que representan $\frac{3}{3}$, es decir la unidad.</p>

Figura 3. Tarea 3: Identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

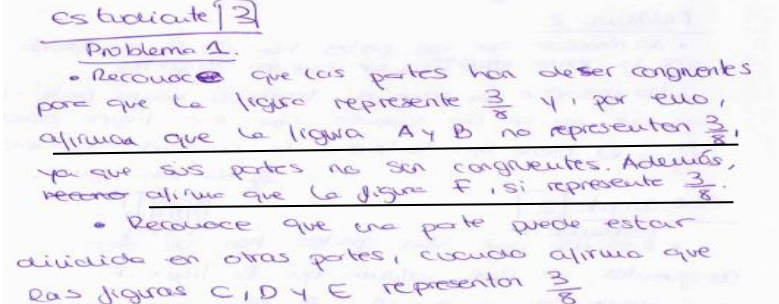
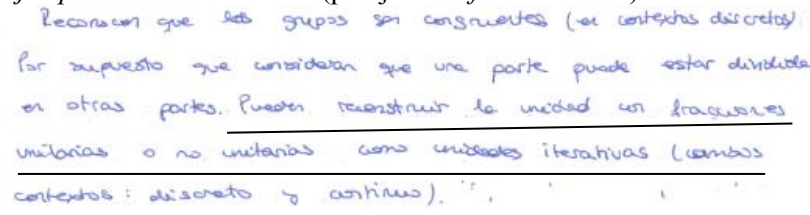
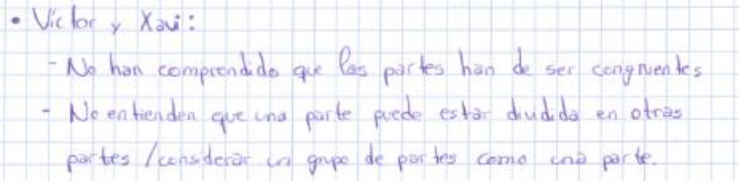
Datos y análisis

Se llevó a cabo un análisis inductivo de las respuestas de los EPM a la Tarea 1 y Tarea 3. Las respuestas de los EPM a estas tareas fueron analizadas de manera independiente por tres investigadores considerando cómo los EPM *i)* usaron los elementos matemáticos del concepto de fracción para describir las respuestas de los estudiantes de primaria (discernir detalles), *ii)* interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes de primaria usando los elementos matemáticos identificados (establecer relaciones entre los elementos identificados en las respuestas de los estudiantes y el nivel de comprensión propuesto en la trayectoria de aprendizaje) y *iii)* decidían cómo responder proponiendo actividades para que el estudiante progresara en su comprensión. Posteriormente se compararon los análisis individuales discutiéndose las diferencias y similitudes hasta que se consensó un acuerdo.

En esta comunicación focalizamos nuestra atención sobre las destrezas de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir cómo responder. En cuanto a la interpretación, generamos cuatro categorías; *i)* No establecen relaciones: EPM que no establecieron relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de comprensión de la trayectoria, *ii)* Establecen relaciones solo entre el elemento matemático 1 y el nivel de comprensión de los estudiantes, *iii)* Establecen relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 y el nivel de comprensión de los estudiantes *iv)* Establecen relaciones entre los tres elementos matemáticos y el nivel de comprensión de los estudiantes. Para cada una de estas cuatro categorías en función del discurso

utilizado por los EPM en sus respuestas emergieron diferentes subcategorías: *Evidencer*, *Adder* y *Nonevidencer* (Tabla 1).

Tabla 1. Subcategorías considerando el discurso de los EPM

Subcategorías (Interpretar)	Evidencias
<p><i>Evidencers</i>: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias.</p> <p><i>Ejemplo</i>: EPM 46. Tarea 3 (estudiante 3. <i>Énfasis añadido</i>)</p> 	<p>El EPM 46 infiere la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1 y 2, aportando detalles de las respuestas del estudiante como evidencias de sus inferencias. Por ejemplo “reconocen que las partes deben ser congruentes para que la figura represente $\frac{3}{8}$, ..., afirman que la figura A y B no representa $\frac{3}{8}$ [...] y que la figura F sí representa $\frac{3}{8}$”</p>
<p><i>Adders</i>: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias, pero añadiendo información innecesaria</p> <p><i>Ejemplo</i>: EPM 08. Tarea 1 (pareja 3. <i>Énfasis añadido</i>)</p> 	<p>El EPM 08 hace inferencias sobre la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1 y 2, aportando detalles de las respuestas, pero añade información que no puede inferirse de la actividad ni en las respuestas de los estudiantes: “pueden reconstruir la unidad con fracciones unitarias y no unitarias como unidades iterativas...”</p>
<p><i>Nonevidencers</i>: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes</p> <p><i>Ejemplo</i>: EPM 03. Tarea 1 (pareja 1)</p> 	<p>El EPM 03 infiere la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1 y 2 pero no aporta evidencias de sus inferencias.</p>

En cuanto a la destreza de decidir cómo responder, para el análisis consideramos si los EPM proponían un objetivo de aprendizaje y una actividad apropiada a dicho objetivo que ayudara a los estudiantes a progresar. Así, emergieron tres categorías: i) EPM que no proponían ninguna actividad, ii) EPM que solo proponen objetivos de aprendizaje o que proponían una actividad no apropiada con dicho objetivo y iii) EPM que proponían un objetivo y una actividad apropiada con dicho objetivo. Por ejemplo, el EPM 46 tras interpretar la comprensión de la primera pareja en la Tarea 1 propuso como objetivo de aprendizaje *el reconocimiento por parte de los estudiantes de que las partes del todo deben ser congruentes* y propuso una actividad de fracciones en la que se muestran diferentes representaciones de $\frac{1}{2}$ (Figura 4).

RESULTADOS

El análisis de los datos mostró dos resultados relevantes. En primer lugar, el uso de la información sobre una trayectoria de aprendizaje ayudó a los EPM a centrar su mirada en la comprensión de los estudiantes elaborando un discurso más rico en detalles. En segundo lugar, nuestros resultados

sugieren una relación entre la habilidad de elaborar un discurso rico en detalles y la capacidad para tomar decisiones de acción centradas en el progreso conceptual de los estudiantes.

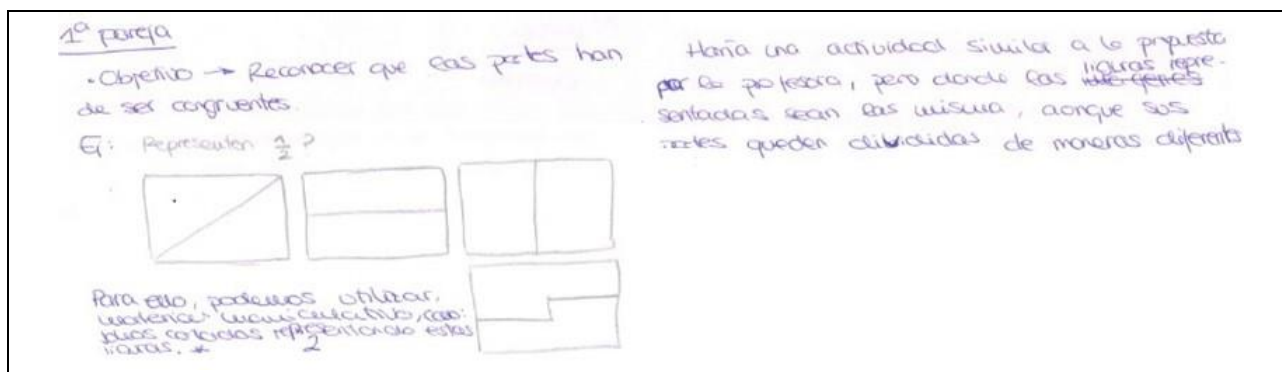


Figura 4. Ejemplo de actividad para progresar al Nivel 2 propuesta por EPM46

Cambios en el discurso sobre la comprensión de los estudiantes

La Tabla 2 muestra cómo los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes en la Tarea 1 y la Tarea 3. Los datos de esta tabla señalan que tras la participación en el entorno de aprendizaje (Tarea 3), 42 de los 85 EPM (49%) fueron capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes estableciendo relaciones entre los tres elementos matemáticos implicados (EM1, EM2 y EM3) y los diferentes niveles de comprensión de la trayectoria de aprendizaje; 32 de los 85 EPM interpretaron estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos (EM1 y EM2) y los niveles de la trayectoria hipotética de aprendizaje mientras que 11 de ellos solo establecieron relaciones con el elemento matemático EM1.

Además, la Tabla 2 nos muestra los cambios de los 85 EPM entre las tareas 1 y 3 en cuanto a la destreza interpretar considerando el discurso elaborado en función de los detalles aportados (evidencer, nonevidencer y adder). En la Tarea 1, 53 de los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes utilizando un discurso en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de las inferencias realizadas (evidencers), y tras la participación en el entorno de aprendizaje, 70 de los 85 EPM incluyeron detalles de las respuestas de los estudiantes en su interpretación (evidencers; 37 interpretan la comprensión de los EM1,2y3; 26 interpretan la comprensión de los EM1y2; y finalmente 7 solo interpretan la comprensión del EM1). Este resultado sugiere que el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje usada como referencia para interpretar el pensamiento de los estudiantes, les permitió crear un discurso más elaborado incluyendo detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de apoyo a sus inferencias sobre la comprensión de los estudiantes.

Tabla 2. Cómo los EPM interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en las Tareas 1 y 3

TAREA 3 \ TAREA 1		Establecen relaciones (EM1)		Establecen relaciones (EM1y2)		Establecen relaciones (EM1,2y3)		Total Tarea 1	
		Nonevid	Evidenc	Nonevid	Evidenc	Nonevid	Evidenc		
No relacionan		-	-	-	2	-	1	3	
	Establecen relaciones (EM1)	Nonevidencers	-	1	-	-	-	-	1
		Evidencers	-	-	-	1	1	-	2
Establecen relaciones (EM1y2)	Adders	-	-	1	1	-	5	7	
	Nonevidencers	2	1	2	7	2	7	21	
	Evidencers	2	5	3	15	2	24	51	
Total Tarea 3		4	7	6	26	5	37	85	

Relación entre la destreza interpretar y la destreza decidir

La Tabla 3 muestra la relación entre cómo interpretan y el número de actividades apropiadas con el objetivo propuestas para cada pareja de estudiantes (Pareja 1-desde el nivel 1 al nivel 2 y Pareja 2 desde el nivel 2 al nivel 3, por lo que tenemos un total de 2 actividades \times 85EPM). Los EPM no propusieron actividades para la Pareja 3 que se encontraba en el nivel 3 ya que consideraron que estos estudiantes habían logrado el objetivo de aprendizaje. De manera general observamos que los 85 EPM fueron capaces de proponer 29 actividades para ayudar a progresar a los estudiantes entre el nivel 1 y el nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje (34%) mientras que para la transición entre el nivel 2 y el nivel 3 de la trayectoria se propusieron 43 actividades (51%). Los EPM fueron capaces de tomar una decisión de acción basada en la comprensión de los estudiantes en un 42% de las situaciones posibles. Estos datos sugieren dos ideas. En primer lugar, las dificultades de los EPM para proponer actividades apropiadas considerando el pensamiento matemático de los estudiantes y, en segundo lugar, que para los EPM resultó más difícil proponer una actividad para progresar entre el nivel 1 y el nivel 2 (vinculado al elemento matemático *las partes en las que se divide un todo deben ser congruentes*) que proponer una actividad para progresar entre el nivel 2 y el nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje (vinculado al elemento matemático *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes*).

La Tabla 3 señala ciertas diferencias entre las subcategorías relativas al discurso de los EPM sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Los 22 nonevidencers fueron capaces de proporcionar 11 actividades mientras que los 53 evidencers proporcionaron 56 actividades. Es decir, los EPM nonevidencers proporcionaron una actividad apropiada en el 25% de las situaciones posibles mientras que los evidencers lo hicieron en el 53% de las ocasiones.

Tabla 3. Relación destrezas interpretar- decidir en la Tarea 1

Interpretar	Decisiones	ACT. N1-N2		ACT. N2-N3		% Activid.	2
		EPM	Proponen	% ACT.1	Proponen		
NO_ER		3	-	-%	-	-%	-%
ER_EM1	Nonevidencers	1	-	-%	-	-%	-%
	Evidencers	2	-	-%	-	-%	-%
ER_EM1Y2	Nonevidencers	21	3	14%	8	38%	26%
	Adders	7	3	43%	2	29%	36%
	Evidencers	51	23	45%	33	65%	55%

En cuanto a la Tarea 3 (Tabla 4), de manera general observamos que los 85 EPM fueron capaces de proponer 55 actividades para ayudar a progresar a los estudiantes del nivel 1 al nivel 2 (65%) mientras que para la transición del nivel 2 al nivel 3 de la trayectoria propusieron 40 actividades (47%). Así, los 85 EPM fueron capaces de proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes en un 56% de las situaciones posibles. Los cambios entre ambas tareas indican que los EPM fueron capaces de proponer un mayor número de actividades para la progresión del nivel 1 al nivel 2 lo que propició un aumento en los porcentajes globales en la Tarea 3 (42% vs 56%). Además, los 70 EPM que aportaron detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación proporcionaron 84 actividades de las 140 posibles (60%) mientras que los 15 EPM que en sus interpretaciones utilizaron un discurso que no incluía detalles de las respuestas de los estudiantes aportaron 11 actividades de las 30 posibles (37%). Estos resultados subrayan que aquellos EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes utilizando un discurso que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (evidencers), fueron capaces de proponer actividades en mayor medida que aquellos que no incluyeron detalles en sus interpretaciones. Dicho de otro modo, la generación de un discurso rico

en detalles parece estar vinculado a la capacidad de proponer actividades adecuadas con el aprendizaje pretendido.

Tabla 4. Relación destrezas interpretar-decidir en la Tarea 3

Interpretar	Decisiones	ACT. N1-N2			ACT. N2-N3		% 2 Activid
		EPM	Proponen	% ACT.1	Proponen	% ACT.2	
ER_EM1	Nonevidencers	4	2	50%	-	-%	25%
	Evidencers	7	4	57%	-	-%	29%
ER_EM1y2	Nonevidencers	6	2	33%	2	33%	33%
	Evidencers	26	15	58%	12	46%	52%
ER_EM1,2y3	Nonevidencers	5	3	60%	2	40%	50%
	Evidencers	37	29	78%	24	65%	72%

Nuestro análisis nos permitió además identificar la frecuencia con la que los EPM eran capaces de proponer una, dos o las dos actividades posibles que las tareas les demandaban (Tablas 5, Tarea 1 y Tabla 6 Tarea 3). La Tabla 5 muestra que, en la Tarea 1, de los 53 EPM que interpretaron el pensamiento de los estudiantes proporcionando detalles (evidencers), 39 fueron capaces de proponer al menos una actividad para ayudarles a progresar en su comprensión de las fracciones (74%). Además, 17 de estos EPM fueron capaces de proponer las dos actividades solicitadas (32%). En cuanto a los EPM que no aportaron detalles en sus interpretaciones (nonevidencers), nueve de los 22 propusieron al menos una actividad (41%) y solo dos de ellos lograron proponer las dos actividades solicitadas (9%).

Tabla 5. Frecuencia con la que los EPM propusieron una, dos o las dos actividades (Tarea 1)

Interpretar	Decidir	Una actividad				Dos actividades N1-N2 N2-N3
		Nada	Solo objetivos	Act. N1-N2	Act. N2-N3	
NO_ER		3	-	-	-	-
ER_EM1	Non-Evidencer (1)		1	-	-	-
	Evidencer (2)	1	1			
ER_EM1y2	Non-Evidencer (21)	-	12	1	6	2
	Adder (7)	2	2	1	-	2
	Evidencer (51)	4	8	6	16	17
TOTAL		10	24	8	22	21

Esta misma tendencia se aprecia en la Tarea 3 (Tabla 6). En este caso, 54 de los 70 evidencers proporcionaron al menos una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones (77%).

Tabla 6. Frecuencia con la que los EPM propusieron una, dos o las dos actividades (Tarea 3)

Interpretar	Decidir	Una actividad			Dos actividades N1-N2 N2-N3	
		Nada	Solo objetivos	Act. N1-N2		Act. N2-N3
ER_EM1	Non-Evidencer (4)	1	1	2	-	-
	Evidencer (7)	1	2	4	-	-
ER_EM1y2	Non-Evidencer (6)	2	1	1	1	1
	Evidencer (26)	6	3	5	2	10
ER_EM1,2y3	Non-Evidencer (5)	-	2	1	-	2
	Evidencer (37)	1	3	9	4	20
TOTAL		11	12	22	7	33

Además, 30 EPM propusieron las dos actividades posibles (42%). De forma similar a la Tarea 1, de los 15 EPM categorizados como nonevidencers en esta Tarea 2, ocho propusieron al menos una actividad (53%), sin embargo, solo tres de ellos consiguieron proponer ambas actividades (20%).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es analizar si la información proporcionada sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar su pensamiento matemático y a proponer actividades para apoyar su comprensión.

Los resultados han mostrado que los EPM que participaron en este estudio generaron un discurso sobre el pensamiento matemático de los estudiantes con características diferentes: Evidencer, Adder y Nonevidencer. Tras la participación en el entorno de aprendizaje 70 de los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes proporcionando un discurso más elaborado, en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias (evidencers). Este resultado puede interpretarse en el sentido de que la introducción de la THA como marco de referencia ayudó a los EPM a prestar atención a los detalles de las respuestas de los estudiantes evidenciando una mirada más estructurada. Este hecho es relevante ya que prestar atención a los detalles de las respuestas de los estudiantes puede “ayudar a los maestros a aprovechar la comprensión de los estudiantes” (Wilson Sztajn, Edgington, Webb y Myers, 2017; p 571) y es la manera de evitar generalidades que pueden bloquear el acceso a caminos alternativos, interpretaciones alternativas y, en última instancia, a actos alternativos (Mason, 2002). En este sentido, la THA proporcionó a los EPM una estructura que facilitó la generación de un discurso profesional, que incluía inferencias basadas en evidencias y que les permitió proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes. En cuanto a la destreza tomar decisiones de acción, investigaciones previas han mostrado que es la más difícil de adquirir (Choy, 2016; Stahnke et al., 2016). En nuestro estudio, los EPM propusieron un objetivo de aprendizaje y actividad apropiada en el 42% para la Tarea 1 y en el 56% para Tarea 3. Estos resultados son relevantes si los comparamos con los obtenidos por investigaciones previas como las de Jacobs et al. (2010) o Timinsky, Land, Drake, Zambak y Simpson (2014) que obtuvieron un porcentaje muy reducido de EPM que eran capaces de proponer actividades adecuadas (20% y 14% respectivamente).

Además, los resultados de este estudio han mostrado que aquellos EPM que fueron capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes elaborando un discurso con detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias, fueron capaces de proponer más actividades centradas en la comprensión del estudiante que aquellos que no aportaron evidencias. Los evidencers fueron capaces de proponer al menos una actividad en un porcentaje mayor de ocasiones que los nonevidencers, tanto en la Tarea 1 (76% vs 42%) como en la Tarea 3 (77% vs 53%). En cuanto a los EPM que lograron proponer las dos actividades en ambas tareas, las diferencias son similares tanto en la Tarea 1 (33% vs 9%) como en la Tarea 3 (42% vs 20%). Estos resultados sugieren una relación entre la capacidad para generar un discurso más detallado sobre la comprensión de los estudiantes y la capacidad para proponer actividades basadas en esta comprensión.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España) EDU2017-87411-R.

Referencias

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-93.

- Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.
- Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal*, 28(3), 421-440.
- Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, 5(1), 65-80.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, 44, 747-759.
- Goldsmith, L. T. y Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 169-187). New York: Routledge.
- Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. D. y Appelgate, M. (2018). Noticing and deciding the next steps for teaching: A cross-university study with elementary pre-service teachers. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (pp. 261-275). Springer, Cham.
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education*, 60(2), 142-154.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. (pp. 35-50). New York: Routledge.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education*, 48(1-2), 1-27.
- Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156.
- Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Springer International Publishing.
- van Es, E. A., Cashen, M., Barnhart, T. y Auger, A. (2017). Learning to notice mathematics instruction: Using video to develop preservice teachers' vision of ambitious pedagogy. *Cognition and Instruction*, 35(3), 165-187.
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J. y Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal*, 54(3), 568-604.