

### 3. INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Coordinador:

D. BERNARDO GÓMEZ  
(Universidad de Valencia)

*La investigación histórica en Didáctica de la Matemática*

Ponentes:

DÑA. FULVIA FURINGHETTI  
(Universitat di Genova. Presidenta del HPM del ICMI)  
*Storia della matematica per Insegnanti e Studenti*

D. LUIS PUIG  
(Universidad de Valencia)  
*Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa*

Dña. MARÍA TERESA GONZÁLEZ y D. MODESTO SIERRA  
(Universidad de Salamanca)  
*El método de investigación histórico en la Didáctica del Análisis Matemático*

Objetivos de la sesión:

1. Analizar ejemplos y contraejemplos de problemas de investigación didácticos centrados en la historia de las matemáticas y en la historia de la enseñanza de las matemáticas.
2. Presentar prioridades para una línea de investigación basada en la historia de las matemáticas y de su enseñanza.
3. Discutir métodos de análisis de textos históricos para la investigación en Didáctica de la Matemática.

# LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

BERNARDO GÓMEZ ALFONSO

## PRESENTACIÓN

Bajo el epígrafe que encabeza la sesión de hoy, hemos pretendido agrupar las investigaciones que, en Didáctica de la Matemática, toman como uno de sus ejes de indagación el desarrollo histórico del conocimiento matemático.

Como la mayor parte de la investigación en Didáctica su objetivo final es el esclarecer problemas educativos, abordándolos de una manera científica. O, dicho de otra manera, su objetivo es encontrar fundamentos para sustentar hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en las matemáticas en situación escolar, en este caso, a la luz que arroja la historia de las ideas.

## CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

Se puede decir que esta línea de investigación arranca, con el giro teórico que sufrió la investigación didáctica en los años 70, al constatarse que «no deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto del contenido, y derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático..., [más bien deberíamos] empezar [desde] procesos de aprendizaje específicos de un contenido» (Bauersfeld y Skowronek, 1976, cit. Kieran y Filloy, 1989, p. 229).

Bajo este enfoque, surgieron líneas de investigación que incorporaron elementos de la epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos «a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto» (Rojano, 1994, p. 46).

## EL ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

En la actualidad esta línea ha evolucionado hacia lo que se ha denominado tácitamente el análisis histórico-epistemológico en la investigación didáctica o simplemente análisis histórico-epistemológico.

Éste es un tipo de análisis que toma elementos de la génesis histórica y de la epistemología, a través de la historia de las ideas, para el provecho de la didáctica de las matemáticas (ver Filloy, 1999, p. 154).

Al estudiar la génesis histórica se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. Por su parte, la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas.

## CORRIENTES EN LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA

### 1. *El enfoque de la enseñanza desde una perspectiva histórica*

Un acercamiento a la investigación histórico-epistemológica, es el que está orientado a la importación al aula de episodios históricos o problemas del pasado para que los estudiantes los discutan o resuelvan.

Esta corriente, que busca enseñar matemáticas desde una perspectiva histórica, ha tenido eco en un sector del profesorado, cuyas aportaciones aparecen regularmente en revistas como SUMA (Meavilla, 2000; García Cruz, 2000, Ortega, 2000). en parte por el convencimiento de que afecta positivamente a la motivación de los estudiantes. Esta perspectiva ha sido tímidamente recogida en algunos libros de texto recientes (ej. SM, 1998; ANAYA, 2001).

Probablemente, el trabajo más importante que se ha realizado en este ámbito, ha consistido en el estudio y recuperación de textos clásicos originales. En este sentido, conviene destacar las aportaciones pioneras que se originaron en el grupo Inter-IREMs de Historia de las Matemáticas; los trabajos firmados por Dhombres (1978, 1987, 1992); el número monográfico de la revista *For the learning of mathematics* (vol. 11. n.º 2. Junio, 1991); incluso, la publicación del NCTM, *Historical topics for the mathematical Classroom* (1969).

También hay que tener en cuenta, el buen uso que se ha hecho de esta perspectiva, en la formación de profesores. Aspecto que está representado hoy aquí por la profesora Furinghetti (1997).

### 2. *El enfoque de los obstáculos epistemológicos*

Otro acercamiento a la investigación histórico-epistemológica, con seguridad el de mayor impacto e influencia, es el que intenta determinar concepciones y obstá-

culos<sup>1</sup> ligados al desarrollo de una noción matemática, como una herramienta muy útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje escolar, pero se considera que identificar obstáculos en la historia permite diseñar modelos didácticos de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.

Esta corriente, representada inicialmente por los trabajos realizados principalmente en el área francófona: Brousseau (1981, 1983); Glaeser (1981); El Bouazzaoui (1988); Sierpinska (1985, 1989, 1992); ha dado soporte a algunas de las investigaciones españolas (p. e. Ruiz, 1998, González, 1995, Penalva, 1996, Palarea, 1998).

### 3. *El enfoque del modelo teórico-local*

Un tercer acercamiento, que ha logrado resultados bien conocidos en el campo del álgebra elemental, es el que utiliza el análisis histórico-epistemológico para hacer un «análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas..., y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos» (Fillooy, 1999, p. 154).

En este enfoque, el análisis histórico se utiliza en la componente formal del modelo, para la que es prioritario el conocimiento de las matemáticas actuales, y en su uso actual, que se completa con una fenomenología histórica.

En esta corriente merecen destacarse los trabajos realizados en Méjico por Rojano (1985) y Gallardo (1994). En España han seguido esta línea algunos de los trabajos realizados en Valencia (p. e. Puig, 1994, 1998; Gómez 1995 y Berzosa, 2002).

### 4. *El análisis de los libros de texto*

Una vez centrado el tema de estudio en el marco del análisis histórico-epistemológico, el investigador en Didáctica de las Matemáticas tiene en los libros de texto históricos una fuente privilegiada de información. El investigador puede buscar en ellos información sobre las relaciones del desarrollo de los contenidos de enseñanza con el desarrollo científico y social, sus antecedentes y su proyección en el futuro, o, puede indagar para determinar la importancia de las mentalidades nacionales específicas y de las filosofías y epistemologías en el progreso de un concepto, como bien dice Bruno (2000) refiriéndose a las aportaciones de Schubring (1986, 1987).

<sup>1</sup> Los obstáculos identificados en la génesis histórica de un concepto son obstáculos epistemológicos: *tiene su origen en la propia constitución del conocimiento. Se les puede encontrar en la propia historia del concepto* (Brousseau, 1983, p. 173).

También puede buscar información sobre el desarrollo curricular y pedagógico: los contenidos seleccionados para la enseñanza; los aspectos conceptuales, actividades, problemas y ejercicios que se enfatizan; sus secuenciaciones, y, en definitiva, sus acercamientos metodológicos<sup>2</sup>.

Aspectos, que dan lugar a otra corriente de investigación que está dando sus frutos en España gracias a algunas indagaciones recientes. Estas intentan caracterizar aspectos de la evolución de la enseñanza de una determinada temática, a través del análisis de manuales históricos, y si cabe, su incorporación a los libros de texto actuales. A mi juicio, esta es la orientación de los trabajos realizados en Canarias (Bruno y Martínón, 2000) Granada (Maz, 2000), Salamanca (Sierra, González y López, 1999, 2003; González, 2002) y Valencia (Gómez, 2001).

#### 4. *El enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas en la historia.*

Este enfoque se sustenta en la creencia de que el desarrollo de una noción matemática atraviesa etapas bien definidas; etapas que los estudiantes también atraviesan en su proceso de aprendizaje. En esta corriente son elementos cruciales de la investigación: la determinación y caracterización de las etapas así como los mecanismos que explican la transición de una a otra. Entre los investigadores que se apuntan a esta corriente cabe señalar a los mejicanos Waldegg y Moreno (Waldegg, 1997; Waldegg y Moreno, 1991).

#### 5. *El enfoque socio cultural*

A diferencia de los corrientes anteriores, 2 y 3, que ponen el enfoque en las relaciones entre lo histórico y lo psicológico, bajo la mediación de la enseñanza, hay un cuarto acercamiento que, a partir de la idea de que el conocimiento está profundamente arraigado y conformado por su contexto socio cultural, ofrece otra perspectiva para la investigación histórico epistemológica.

En esta línea merecen destacarse, por ejemplo, los trabajos realizados en Canadá por Radford (1996).

### EPÍLOGO

Bajo el manto de lo que hemos denominado *la investigación histórica en didáctica de la matemática* se reencuentran estudios que corresponden a corrientes diferenciadas. Las que hemos descrito aquí se pueden reagrupar a su vez en tres:

<sup>2</sup> Se podría pensar, que en vez de enfocar el análisis anterior hacia los libros de texto, habría que dirigirse hacia los planes de estudio. Pero esta sería una idea equivocada ya que hasta 1953 no aparecen en España cuestionarios escolares oficiales que detallen los programas.

- las que intentan confrontar historia y psicología,
- las que intentan reorientar la enseñanza con una perspectiva histórica,
- y las que intentan estudiar los conceptos bajo una dimensión cultural, independientemente de las personas.

Todas ellas son el reflejo de un intento de recuperación de la historia de las ideas para el provecho de la Didáctica de las Matemáticas.

En todas ellas subyace la necesidad de revisar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en situación escolar. En relación con esto, como señala Douady en el prólogo de su tesis (1984), lo que se busca es mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza de esta disciplina.

## REFERENCIAS

- ANAYA, 2001. *Matemáticas II*. (Serie de libros de texto para Bachillerato). Colera, Oliveira y García. Madrid. Grupo Anaya.
- Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process, en Athen y Kunle, (eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (Universität Karlsruhe, Zentralbatt für didaktik der Mathematik: Karlsruhe, RFA). pp. 231-245. (cit. Kieran y Filloy, 1989, p. 229).
- Berzosa, M. (2002). *Un estudio sobre la función en Secundaria. El caso de la composición de funciones*. Memoria de tercer ciclo. Valencia. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 2, pp. 37-128.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologique et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 4. 2. 165-198
- Bruno, A.; Martínón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *SUMA*, nº 34, pp. 27-44.
- Bruno, A. (2000). *Síntesis de investigaciones en didáctica de los números negativos*. Documento interno. Universidad de La Laguna.
- Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. IREM de Nantes. Paris: CEDIC/Fernand Nathan.
- Dhombres, J. (1992). *L'École normale de l'an III. Leçons de Mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*. Paris Dunod.
- El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thèse PH. D. Université Laval.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, 55-61.
- Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. México. 2 vols.
- García Cruz, J. A. (2000). Historia de un problema: el reparto de la apuesta. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 33, 25-36.

- Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2, 3, pp. 303-346.
- Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Mathema. Granada: Comares.
- Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada. Universidad de Granada. (Pgs. 257-275).
- González, J. L. (1995). *Los números enteros relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- González, M.ª T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.
- Meavilla, J. L. (2000). Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas. *SUMA*, nº 34, 81-85.
- Maz Machado, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Memoria de tercer ciclo. Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. U. de Granada
- Moreno, L. y Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.
- NCTM. (1969). *Historical topics for the mathematical Classroom*. Thirty-first yearbook. Washington, D. C., National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortega, T. (2000). Una modificación del problema de Arquímedes de las reses del Sol para una clase de problemas. *SUMA*, nº 34, 21-25.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.
- Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.
- Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis*, Vol. 10, pp. 47-92.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En Hitt, ed. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, págs. 109-131.
- Radford, L. (1996). An Historical Incursión into the Hidden Side of the Early Development of Equations. In: *Aritmetics and algebra education*, J. Jiménez, R. Campos Lins y B. Gómez (eds.), Tarragona, España: U. Rovira i Virgili. 120-131.
- Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años)*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. México.
- Rojano, T. y Sutherland, R. (1993). La síntesis algebraica en el proyecto Viético. En Eugenio Filloy y Luis Puig (Eds.) *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. U. de Valencia y Programa Nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas de México. Valencia (1991) CINVESTAV. México.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 12(1), 45-56.

- Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad Jaén.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999): Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-51.
- Schubring, G. (1986). *Discussions epistemologiques sur le status des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français des mathématiques entre 1795 et 1845*. Actas del primer coloquio franco-aleman, 137-45.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7, 3, 41-51.
- SM, (1998). *Matemáticas I de COU*. (Algoritmo. Serie de libros de texto). Vizmanos y Anzola. Madrid.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 6, No.1, pp. 5-7.
- Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. En N. Berdnaz y C. Garnier (Eds.), *Constructions de savoirs: Obstacles & Conflicts* (p. 130-148). Ottawa, Canada: Agence d'Arc.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of Epistemology and pedagogy* (p. 25-58). USA: Mathematical Association of America.
- Waldegg, G. (1997). Histoire, Épistémologie et Méthodologie dans la Recherche en Didactique. *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, 43-46.