STORIA DELLA MATEMATICA PER INSEGNANTI E STUDENTI

FULVIA FURINGHETTI

SOMMARIO

In questa nota si considerano le seguenti questioni: Si deve conoscere la storia della matematica? Quanta storia della matematica si deve conoscere? Come si deve conoscere la storia della matematica? Si riconosce che la risposta a queste domande è diversa per studenti e insegnanti, ma si sottolinea che per entrambi i soggetti la storia è un artefatto che diventa strumento di conoscenza, se usata opportunamente. Perché accada questo occorre che l'uso della storia faccia riferimento a teorie dell'educazione matematica. Per esempio, si riflette sull'importanza delle metafore nell'apprendimento e si vede come esse siano usate nella storia sia nella comunicazione sia nella costruzione dei concetti. Si suggerisce anche un esempio in cui la storia aiuta nel collegare diversi linguaggi.

INTRODUZIONE

Nell'analisi sull'uso della storia nell'insegnamento della matematica ho sempre cercato di partire dalle esperienze che ho visto realizzate in classe. Nei miei precedenti lavori, in particolare (Furinghetti, 1997), ho usato uno schema che distingue:

A. Uso della storia per riflettere sulla natura della matematica come processo socioculturale.
B. Uso della storia per costruire oggetti matematici.

Questa distinzione è collegata al tipo di materiale che si usa nella classe. Nel caso A si può usare una letteratura varia: fonti originali, libri di divulgazione, testi di storia della matematica, siti web. Nel caso B è riconosciuto molto efficace l'uso di fonti originali, si veda (Fauvel & van Maanen, 2000, cap. 9).

È importante osservare che in entrambi i casi la storia deve essere non aggiunta al corso di matematica, ma *integrata* in esso. Nel suo bel lavoro di analisi dei testi narrativi Umberto Eco (1994, p. 161) riprende un concetto espresso da Hayden White e parla di storiografia come artefatto letterario. Io vedo la storia usata in classe come un artefatto che funziona da mediatore nel processo di insegnamento/apprendimento. Secondo Verillon e Rabardel (1995) l'artefatto (cioè l'oggetto materiale, con le sue caratteristiche fisiche e strutturali, costruito per utilizzazioni specifiche) diventa «strumento» (artefatto insieme alle sue modalità di utilizzazione, così come sono viste e interpretate da un utente) quando il soggetto che lo usa riesce a finalizzarne l'uso ai propri scopi. Questo vale anche per l'artefatto storia della matematica.

Nei miei anni di presidenza dell'*International Study Group on the Relation Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) affiliato a ICMI (quadriennio iniziato nel 2000) ho avuto un osservatorio privilegiato per studiare diversi esempi di questo passaggio dall'artefatto allo strumento. Alcune ipotesi di ricerca sono state validate, altre sono ancora in discussione. In questa nota vorrei considerare le seguenti questioni riguardanti l'insegnamento/apprendimento della matematica:

- Si deve conoscere la storia della matematica?
- Quanta storia della matematica si deve conoscere?
- Come si deve conoscere la storia della matematica?
  Per discutere queste questioni devo ancora una volta riprendere il tema che ho già affrontato in altri studi, si veda (Furinghetti & Somaglia, 2003):
- Che cosa lega l'educazione matematica e la storia. Ovvero, riprendendo la dualità artefatto/strumento, che cosa fa diventare l'artefatto storia strumento?
  Nel tentare di dare risposte a queste domande tengo presente le diverse situazioni e esigenze di insegnanti e studenti di scuola secondaria. Le idee di base valgono per entrambe le categorie, ma hanno limitazioni e rilievo diversi nei due casi.

SI DEVE CONOSCERE LA STORIA DELLA MATEMATICA?

Una delle idee più antiche che stanno alla base dell'uso della storia in classe è quella che essa metta in risalto e chiarisce l'aspetto elementare della matematica. Per questo già Felix Klein riconosceva il ruolo della storia nella formazione degli insegnanti e nella creazione di sequenze didattiche.

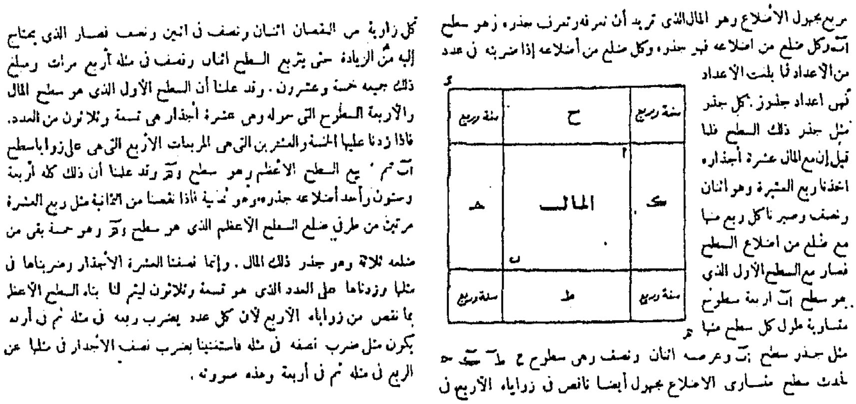
Un'idea interessante sull'efficacia dell'uso della storia è quella di spaesamento (*depaysement*) discussa in Barbin (1994). Introdurre la storia della matematica vuol dire sostituire ciò che è usuale con qualcosa di nuovo e mettere in discussione le proprie percezioni. Ciò che è familiare diventa estraneo: questo è lo spaesamento provocato dalla storia. Come accade a una persona che si trova in un paesaggio straniero, dopo un momento iniziale di smarrimento si mettono in atto tentativi di riposizionamento e orientamento. Attraverso lo spaesamento e la successiva fase di riposizionamento e orientamento la storia dà l'opportunità di ripensare alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi per la loro costruzione.

Questa azione di spaesamento assume un ruolo particolare per la professionalità degli insegnanti. L'esperto, che ha già acquisito i concetti che insegnerà, talvolta non ha la flessibilità di tornare indietro dal prodotto finale al processo costruttivo, cioè di passare dall'ambito formale e sistemato a quello informale delle idee grezze. Le conoscenze dell'insegnante si intrecciano alle sue convinzioni e agiscono da filtro tra l'insegnamento con significato e l'insegnamento senza significato. Seguire un ragionamento matematico che sta dietro un passaggio storico può diventare un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti in una nuova prospettiva. Inoltre può metter in luce i meccanismi che portano alla creazione matematica, perché dà un contesto per osservare la transizione dal non-conoscenre al conoscere, che costituisce l'intuizione pedagogica essenziale. Allora il contesto storico permette di validare determinate ipotesi educazionali e elaborarne nuove.

Un esempio di legame tra storia e educazione è dato dal risalto che nella storia hanno le metafore nella costruzione degli oggetti matematici. È noto che una delle tesi centrali di Lakoff e Johnson (1980) è che le metafore costituiscono l'universo delle idee astratte, che esse non riflettono le idee, bensì le creano, che esse sono le fonti della nostra conoscenza, immaginazione e ragionamento. La loro teoria è focalizzata su un tipo speciale di metafora, la cui origine è nella mostra esperienza corporale. In sostanza, l'affermazione di fondo di questi autori è che le idee astratte ereditano la struttura dell'esperienza fisica, corporale e percettuale. È chiaro il legame di questa teoria con la teoria dell'*embodied cognition*. Vediamo su un esempio storico (la soluzione di Al Khwarizmi dell'equazione $x^2 + 10x = 39$) l'intreccio tra idee astratte, metafore e esperienze fisiche.

> Il problema è che questo censo e dieci radici sono uguali a 39 dracme [$x^2 + 10x = 39$]. Sia quindi una superficie quadrata di lati sconosciuti, la qual è il censo, il quale e le radici del quale vogliamo conoscere: sia essa la superficie a, b, e ciascuno dei lati del quadrato è la sua radice. Si moltiplica ciascun lato del quadrato per un certo numero [un segmento], allora il numero [un'area] che è stato aggiunto è il numero delle radici [10] che sono proprio la radice di quella superficie. Dopo che si è detto che con il censo ci sono dieci radici, prenderò la quarta parte di dieci, che è 2,5. E farò la superficie con ciascun quarto e con uno dei lati della superficie del quadrato: ci saranno dunque con la prima superficie, che è la superficie *a*, *b*, quattro superfici uguali, la lunghezza di ciascuna delle quali, è uguale alla radice di *a*, b, e la larghezza è 2,5; le quali sono le superfici *g*, *h*, *t*, *k*. Alla radice della superficie, che è di lati uguali e ignoti [cioè il quadrato che sta costruendo come completamento di quello iniziale *a*, *b*], manca ciò che è tolto dai quattro angoli. Si vede che, a ciascuno degli angoli, manca la moltiplicazione di 2,5 per 2,5. Ciò che è numericamente necessario fino a qui, affinché la superficie del quadrato grande sia completata, è la moltiplicazione di 2,5 per se stesso, quattro volte. Si aggiunga 25 alla somma di quel totale [cioè il quadrato *a*, *b* più i quattro rettangoli]. Sappiamo già che la prima superficie, che è la superficie quadrata *a*, *b*, e le quattro superfici che la circondano, che sono le dieci radici, sono, in numero, 39. Quando aggiungeremo a ciò 25, che deriva dai quattro quadrati che sono sopra gli angoli della superficie *a*, *b*, si completerà, la superficie del quadrato maggiore, che è la superficie *d*, e. Noi, poi, già sappiamo che tutto quello è 64. Quindi uno dei suoi lati è la radice di quello, che è otto. Si tolga perciò dalle due estremità del lato del quadrato maggiore, che è la superficie d, e, due

Soluzione dell'equazione $x^2 + 10x = 39$ *in* Kitah Al-Jabr wal-Muqabala *di Al Khwarizmi*



volte ciò che è uguale alla quarta parte di 10; e il lato di quello [il quadrato *a*, *b*] rimarrà tre: che è uguale al lato del quadrato *a*, *b*, ed è la radice del censo. Noi dimezziamo le dieci radici, le moltiplichiamo per se stesse e le aggiungiamo a 39; ciò per completare la quadratura della figura maggiore con quello che manca ai quattro angoli. Poiché la quarta parte di quel numero è stata moltiplicata per se stessa e poi è stata moltiplicata per quattro, sarà la stessa cosa cui si perviene moltiplicando la metà di quel numero per se stesso. Ci è dunque sufficiente la moltiplicazione della metà delle radici per sé, invece di moltiplicare la quarta per sé quattro volte.

Questo procedimento ha una forte fisicità: Al Khwarizmi usa la metafora geometrica per incognite e numeri e «taglia e incolla» le figure per ottenere le soluzioni. È interessante osservare che in un esperimento centrato sul *problem solving* abbiamo trovato un analogo modo di operare nel protocollo di uno studente. Il compito assegnato era:

> Prendiamo un cubo costituito a sua volta da cubetti più piccoli e tutti uguali tra loro. Se dal cubo togliamo una colonna di cubetti, il numero dei cubetti rimanenti è divisibile per 6. Sai dire il perché?

In (Cartiglia, 2003) è descritto come questo studente abbia tagliato e incollato pezzi di cubo in modo da arrivare alla formula $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ che permette di rispondere al quesito. Lo studente aveva precedentemente trovato la soluzione corretta con il formalismo dell'algebra, ma non era soddisfatto e ha scritto nel protocollo «Ma avrei voluto trovare una dimostrazione solo con i numeri». Lo studente sentiva di aver dimostrato, ma non spiegato. Per questo ha scelto una strada diversa da affiancare a quella interna all'algebra propria del sapere istituzionale.

Questa inaspettata analogia dei due procedimenti potrebbe suggerire un altro tema spesso discusso sull'uso della storia, quello dell'ontogenesi che ricapitola la filogenesi, si veda (Furinghetti & Radford, 2002). In realtà questo episodio suggerisce soprattutto che metafore e incorporamento dei concetti sono effettivamente alla base della costruzione degli oggetti matematici. In questo esempio si vede che non è necessario seguire il cammino percorso dai nostri antenati matematici, piuttosto si devono mettere gli studenti nella situazione giusta per sviluppare la loro creatività matematica.

Un altro aspetto delle metafore è quello di essere strumento di comunicazione delle idee matematiche. Vediamo due esempi di questo uso. Come riportano Yan Li e Shi Ran Du (1987), nella matematica cinese la misura della pertica graduata verticale è chiamata *Gu,* che significa misura o scala, l'ombra della pertica è chiamata *Gou* e l'ipotenusa è conosciuta come *Xián*, che significa corda di un arco. Allora il triangolo rettangolo è chiamato «forma *Gougu*» e il teorema di Pitagora diventa:

$$Gou^2 + Gu^2 = Xián^2$$

In epoca più recente il francese Bernard le Bovier de Fontenelle (1984) usa una metafora, diventata celebre, per descrivere la natura del ragionamento matematico:

> Ascoltatemi, signora, –risposi–, poiché siamo abituati a mischiare le galanterie un po' folli ai nostri discorsi più seri, vi dirò che i ragionamenti dei matematici sono come l'amore. Se fate una piccola concessione a un innamorato, ben presto dovrete accordargli di più, e la cosa vi può condurre un po' troppo lontano. Allo stesso modo, se condividete il minimo principio di un matematico, ne trarrà una conseguenza che dovrete ugualmente condividere, e dopo questa conseguenza ne verrà un'altra, tanto che, vostro malgrado, vi condurrà tanto lontano che stenterete a credergli. Sono due tipi di persone che prendono sempre di più di quanto si voglia dare loro. (p. 104)

Le metafore possono essere un valido strumento nella comunicazione tra studente e insegnante. Penso che si trovino così scarse testimonianze di metafore in classe a causa del contratto didattico (non ufficiale, ma percepito sia da insegnanti che studenti) che spinge verso uno stile formale di comunicare le idee matematiche. In una ricerca su immagini e definizioni riguardo al concetto di area elaborate studenti di liceo scientifico (circa 16 anni) abbiamo chiesto di spiegare «Che cos'è per te l'area di una figura piana» a un bambino di scuola elementare, a uno delle medie, a un coetaneo e all'insegnante. Nelle risposte rivolte ai bambini delle elementari abbiamo notato l'uso di ostensivi e esempi concreti (quantità di sostanza per coprire una figura, colorare con un pennarello). Per gli studenti delle medie sono state usate forme semiintuitive (porzione di piano contenuta all'interno di una linea).La definizione diventava rigorosa nella forma («Si dice area...») per i coetanei e l'insegnante. Questa definizione formale non era piò precisa, né conteneva più informazioni, era spesso una parafrasi meno chiara delle definizioni intuitive date ai bambini.

QUANTA STORIA SI DEVE CONOSCERE?

Quanto detto precedentemente dovrebbe convincere sulla validità di questi due punti:

- La storia della matematica deve far parte della cultura dell'insegnante.
- La storia della matematica può essere un mediatore di cultura matematica.

Gli insegnanti devono conoscere la storia perché essa li aiuta a dare alle nozioni isolate acquisite nei corsi universitari disciplinari di matematica un quadro di riferimento, che non è sequenziale, ma è concettuale e quindi aiuta a far acquisire senso alle teorie. Gli studenti beneficheranno in forma più o meno diretta di questa conoscenza. Resta il problema di quanta storia si deve conoscere. È quasi ovvio affermare che, riguardo alla quantità, quanto più si conosce la storia, tanto più si saprà usarla. La questione di quanta storia debbano conoscere gli studenti è più delicata perché fa entrare in gioco il peso dei programmi. Per questa ragione esistono pochi tentativi di introdurre la storia *per se*, si veda (Testa, 2001). Spesso questi tentativi sono fatti come attività facoltativa, al di fuori dell'orario ufficiale delle lezioni.

Attualmente è in corso a Trento un esperimento che coinvolge studenti intorno ai sedici anni per verificare l'effettiva possibilità di introdurre elementi di storia della matematica nell'orario normale. La convinzione di partenza è che lo sforzo sia ripagato dal risultato di riuscire a far percepire la matematica come processo socioculturale. Come base di discussione in questo progetto è stato preparato un questionario centrato su questioni di aritmetica, algebra, elementi di probabilità, definizioni, si veda (Demattè, 2003). Esso va visto come una traccia di quello che può essere ragionevolmente fatto in classe. Gli argomenti storici sono scelti in modo da offrire un altro punto di vista e un altro ambiente di lavoro quando si affrontano certe parti del programma. Accanto a fatti matematici, lo sviluppo storico della matematica richiede anche una certa attenzione a fatti storici più generali (note biografiche e del contesto storico sociale in cui le idee matematiche si sono sviluppate), si veda (Radford, 2003). Quindi la storia della matematica può costituire un efficiente modo per attraversare le discipline:

COME SI DEVE CONOSCERE LA STORIA?

Conoscere la storia della matematica non è una garanzia di fare un buon uso della matematica in classe. Mi sembra utile citare al riguardo la critica a certi trattati e certi corsi di storia della matematica fatta da David Wheeler nel *College mathematics journal* (1986, p. 375, citazione da Fauvel, 1990, mia traduzione):

> Essi [certi trattati di storia della matematica] offrono un'abbondanza di fatti storici e aneddoti senza fare nessun reale tentativo di mostrare al lettore come un senso della storia possa approfondire la comprensione della matematica, mettere in luce le radici delle idee matematiche, dare una comprensione del ruolo che la matematica gioca nella società umana, e così via. [...]. Questi libri soffrono quasi precisamente dello stesso difetto che mostrano i testi matematici che essi potrebbero integrare: un'assenza di prospettiva sulla storia che stanno raccontando, di un'esplicita attenzione alle ragioni per cui uno dovrebbe voler studiare i loro contenuti o di alcuna dimostrazione del beneficio che può seguire. Sembra una triste ironia che corsi in storia della

> matematica, che sono tenuti per riequilibrare la bilancia di un sistema di istruzione matematica che enfatizza considerevolmente l'abilità sul capire, e la conoscenza sulla consapevolezza, possano essere basati su libri di storia che fanno tali scelte.

È cruciale come ci si avvicina alla storia. Jahnke (1994) è molto chiaro su questo punto. Egli afferma che il concetto di «ermeneutica» è adatto a descrivere «l'interazione pedagogica tra cultura sincrona e diacronica» (p. 154). Una conseguenza quasi immediata di questa opinione è che l'insegnante di matematica che vuole usare la storia della matematica nel suo insegnamento deve capire qualcosa del lavoro dello storico. E conclude che se non si vuole che la storia della matematica degeneri in un dogma morto, una pura aggiunta ai dogmi della matematica, l'insegnante che introduce la storia deve conoscere qualcosa delle fonti storiche e del carattere fondamentalmente ipotetico di gran parte della conoscenza storica. Condivido questo punto di vista di vista. Conoscere il metodo storico fa percepire aspetti epistemologici e ontologici dei concetti matematici. Inoltre permette di abbandonare l'idea diffusa che i progressi matematici abbiano un andamento lineare. L'analisi storica mostra l'ondeggiare degli autori tra differenti ipotesi e metodi. Questo fatto dovrebbe suggerire agli insegnanti un metodo didattico orientato all'esplorazione e alla discussione in classe, secondo i criteri ben espressi da Lampert (1990).

In questa filosofia di lavoro, in cui l'insegnante prende coscienza di come può essere l'attività dello storico della matematica, come può inserirsi lo studente? Anche per esso ritengo importante l'uso di fonti originali. La mediazione dell'insegnante nella scelta della fonte in rapporto agli obiettivi educazionali sarà fondamentale. In (Furinghetti & Somaglia, 2003) abbiamo considerato passaggi di Roberval e Fermat per introdurre un concetto avanzato (derivata). In questa nota proponiamo un esempio meno sofisticato, proponibile ad un livello scolare precedente (introduzione all'algebra). Si considera il seguente brano che si riferisce alla proprietà commutativa della moltiplicazione:

> Intendi bene che nella moltiplicazione sono principalmente necessari due numeri cioè il moltiplicatore e il numero che deve essere moltiplicato, e anche se del numero moltiplicatore si può fare il numero da essere moltiplicato, e così il contrario rimanendo sempre la medesima cosa, tuttavia l'uso e la pratica comandano [...]

Interpretare questo brano vuol dire imparare, in un contesto motivante, a tradurre il linguaggio verbale in linguaggio algebrico, valutando vantaggi e svantaggi dell'uno e dell'altro. Questa attività mette in gioco abilità proprie di altre discipline (storia generale, lettere) ed ha quindi anche un valore interdisciplinare.

CONCLUSIONI

Con questa nota abbiamo cercato di far vedere che le risposte alle domande iniziali (Si deve conoscere la storia della matematica?, Quanta storia della matematica si deve conoscere? Come si deve conoscere la storia della matematica?) deve essere data sulla base di considerazioni educazionali intrecciate con considerazioni socioculturali:

- Problemi di insegnamento, formazione degli insegnanti.
- Problemi di apprendimento, difficoltà degli studenti.
- Visione della matematica non come stratificazione di conoscenze, ma come processo socioculturale.
- Risultati della ricerca in didattica della matematica.

Mi sembra che questa posizione di confronto tra storia e didattica della matematica renda fruttuosa l'interazione di questi due ambiti nell'insegnamento.

Ringrazio Giuliano Testa per l'aiuto nella ricerca delle metafore

REFERENCES

Al Khwarizmi (1838). *Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit.* In G. Libri, *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie* (253-297). Paris: Renouard.

Barbin, É. (1994). Préface. In Commission Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques (Ed.), *Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques* (ii-iii). Lille: IREM de Lille.

Cartiglia, M. (2003). *Il problem solving come sfida culturale a fare matematica* DIMA, Università di Genova.

Demattè, A. (2003). *Test di storia della matematica.* http://www.iprase.tn.it

Eco, U. (1994). *Sei passeggiate nei boschi narrativi. Harvard University, Norton Lectures 1992-1993*, Milano: Bompiani.

Fauvel, J. (1990). *Mathematics through history.* York: Q.E.D. Books.

Fauvel, J., & Van Maaren, J. (Eds.). (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer.

Fontenelle, B. (1984). *Conversazioni sulla Pluralità dei Mondi*, Theoria, Roma-Napoli. (Originalmete *Entretiens sur la Pluralité des Mondes*, 1686).

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 55–61.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 31, 43–51.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1999). Exploring students' images and definitions of area. In O. Zaslavski (editor), *Proceedings of PME 23*, v.2, 345-352.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: rethinking phylogenesis and ontogenesis. In L. English et al. (editors), *Handbook of international research in mathematics education*, L. Erlbaum: Mahwah, NJ, 631-654.

Furinghetti, F., & Somaglia, A. M. (1998). History of mathematics in school across discipline. *Mathematics in School* 27(4),48–51.

Furinghetti, F., & Somaglia, A. M. (2003). History as a tool for mathematics education and for research in mathematics education. In O.B. Bekken & R. Mosvold (editors), *Study the Masters: The Abel-Fauvel Conference Proceeding.* Göteborg: NCM, 219-233.

Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding - Objectifying the subjective. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of PME XVIII*, v.I, 139-156.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *The Metaphors we Live by.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lampert, M. 1990. When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* 27 (1), 29-63.

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice during the renaissance *Educational studies in mathematics* 52, 123-150.

Testa, G. (2001) Per un avvio alla ricerca «storica» in campo scientifico: studenti al lavoro. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 24B, 39-68.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: a Contribution to the Study of Tought in Relation to Intrumented Activity. *European Journal of Psychology in Education* 9(3), 77-101.

Yan Li & Shi Ran Du. (1987). *Chinese Mathematics - A Concise History.* Transaletd by J. N. Crossley and A. W.-C. Lun. Oxford: Oxford Science Publications, Clarendon Press.