

LA FACETA COGNITIVA EN EL CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

The cognitive facet in prospective teachers' knowledge of statistical tests

López-Martín, M. M.^a, Batanero, C.^a y Gea, M. M.^a

^aUniversidad de Granada

Resumen

El objetivo del trabajo fue evaluar la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de profesores de Educación Secundaria y Bachillerato en formación sobre los contrastes de hipótesis. Se propone a una muestra de 70 futuros profesores una tarea en la que se les pide detallar los errores previsibles de sus estudiantes en la realización de un contraste de hipótesis. La clasificación de las respuestas obtenidas implica un conocimiento medio de esta faceta y la identificación de ciertos errores descritos en la literatura. Hay, sin embargo, poca conciencia de los errores relacionados con el nivel de significación y p-valor y en otros casos los errores descritos son imprecisos.

Palabras clave: *contraste de hipótesis, conocimiento didáctico-matemático, futuros profesores.*

Abstract

The aim of this study was to assess the cognitive facet of the didactic-mathematical knowledge of prospective secondary and high school teachers on statistical tests. The written productions in a sample of 70 prospective teachers in a task in which they were asked to detail the foreseeable mistakes of their students in the realization of a hypothesis test are analysed. The classification of the responses obtained suggest a medium knowledge of this facet and the identification of certain errors described in the literature. However, there is limited awareness of the errors related to the level of significance and p-value and in other cases the errors described are imprecise.

Keywords: *statistical tests, didactic-mathematical knowledge, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

El contraste de hipótesis es ampliamente utilizado para obtener conclusiones de una población no observada en su totalidad, en base a la información extraída de una muestra de dicha población. Dicho tema se ha visto reflejado tanto en las directrices curriculares anteriores de Bachillerato (MEC, 2007) como en las pruebas de acceso a la universidad en los últimos 15 años (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016). Constituye además uno de los temas en las oposiciones al cuerpo de profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Asimismo, McLean (2002) resalta la importancia de unos conocimientos básicos de contraste de hipótesis, como parte de la cultura estadística de un ciudadano bien formado. Sin embargo, este tema no es sencillo, como se muestra en algunas revisiones de la literatura (Castro Sotos, Vanhoof, Van den Nororgate y Onghena, 2007; Harradine, Batanero y Rossman, 2011).

Uno de los factores que determina la correcta enseñanza de un tema es el conocimiento del profesor, que ha sido objeto de una amplia investigación en los últimos años (véase, por ejemplo, Dawson, Jaworski y Wood, 2013; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Llinares y Krainer, 2006). En este trabajo nos basamos en el modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor, descrito, entre otros trabajos, en Godino (2009) y Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), que

caracteriza los conocimientos del profesor a partir de la dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta-matemática. La dimensión didáctica del CDM tiene en cuenta seis componentes: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, cada una de las cuales se relaciona con la misma faceta de la idoneidad didáctica (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), que los autores introducen para diseñar o evaluar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos centramos en la componente cognitiva, que implica el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015). Para evaluarla, en este trabajo analizamos las respuestas proporcionadas en una muestra de 70 futuros profesores a una pregunta sobre los errores previsibles de los estudiantes en el contraste de hipótesis.

ANTECEDENTES

La investigación sobre el conocimiento del profesor en relación con el contraste de hipótesis es escasa y se ha concentrado en el conocimiento matemático del tema (Harradine et al., 2011). Así, Haller y Krauss (2002) encuentran errores al interpretar el p -valor o probabilidad de encontrar un valor del estadístico muestral igual o más extremo que el observado, suponiendo la hipótesis nula cierta, en profesores responsables de la enseñanza de métodos de investigación. Por su parte, Liu y Thompson (2009) realizaron entrevistas a ocho futuros profesores tratando de comprender sus dificultades con el contraste de hipótesis. Los sujetos mostraron una concepción determinista del contraste y falta de comprensión de la lógica del mismo. No hemos encontrado antecedentes que describan el conocimiento didáctico sobre este tema. Para nuestro trabajo es necesario, sin embargo, tener en cuenta las investigaciones que describen errores en los estudiantes, para comparar sus resultados con los errores citados por los futuros profesores.

Entre los resultados más relevantes encontramos errores referidos al planteamiento del contraste que ocurren cuando, por ejemplo, los estudiantes no identifican el tipo de contraste (bilateral y unilateral) (Espinel, Ramos y Ramos, 2007). Respecto al planteamiento de las hipótesis, es frecuente confundir la hipótesis nula con la alternativa y plantear hipótesis no complementarias, es decir, hipótesis que no cubren el espacio paramétrico (Vallecillos, 1999; Vera, Díaz y Batanero, 2011). Alonso y Cruz (2008) sugieren que los libros de texto de Bachillerato solo reflejan la complementariedad de las hipótesis alternativa y nula, sin señalar la importancia que tienen en el planteamiento del problema. Igualmente, se ha observado el uso de los estadísticos muestrales en el establecimiento de las hipótesis, sin tener en cuenta que éstas deben ser definidas considerando los parámetros poblacionales (Espinel et al., 2007; Harradine et al., 2011; Ramos, Espinel y Ramos, 2009; Vallecillos, 1999; Vera et al., 2011).

El principal error conceptual consiste en intercambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación, considerándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, una vez que la decisión de rechazarla ha sido tomada (Birnbbaum, 1982; Vallecillos, 1999). Badenes-Ribera, Frías-Navarro, Monterde-i-Bort y Pascual-Soler (2015) y Caperos y Pardo (2013) encontraron errores similares con respecto a la interpretación del p -valor. En otros casos, los estudiantes confunden estadístico y parámetro o no recuerdan la expresión de la distribución muestral (Batanero, 2000). A todo ello se ha de añadir llevar a cabo la tipificación erróneamente, realizar un uso incorrecto de la tabla de probabilidades de la Normal e interpretar erróneamente los resultados obtenidos en el contraste (Espinel et al., 2007).

El estudio sistemático y clasificación de estos errores nos ha permitido elaborar una pauta para analizar el conocimiento que tienen los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato sobre las dificultades a las que previsiblemente se enfrentarán sus estudiantes al trabajar con el contraste de hipótesis. A continuación, presentamos el método, resultados y discusión de nuestra investigación.

MÉTODO

El estudio contó con la participación de 70 estudiantes que se preparaban para ser futuros profesores de Secundaria y Bachillerato, dentro del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, especialidad de Matemática, obligatorio para los que desean concursar a una plaza de profesor. Sólo el 56% de ellos eran licenciados en Matemáticas o Estadística y el resto habían cursado Ingeniería, Arquitectura u otras ramas de ciencias. Sin embargo, todos reconocen haber realizado una o más asignaturas de estadística y más de la mitad (57%) indicaron tener experiencia de enseñanza.

La evaluación se llevó a cabo como parte de un taller formativo sobre inferencia, realizado dentro de una asignatura de Innovación Docente e Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. En primer lugar, los participantes resolvieron un problema de contraste de hipótesis similar a los planteados en los años anteriores en las PAU, solicitándoles que planteasen las hipótesis, eligieran el contraste adecuado, lo desarrollaran, tomaran una decisión adecuada sobre el rechazo de la hipótesis nula e interpretasen los resultados en el contexto del problema. Una vez corregido el problema, los futuros profesores desarrollaron la tarea que analizamos en este trabajo y que estuvo dirigida a desarrollar y evaluar la faceta cognitiva de su conocimiento didáctico-matemático. Dicha tarea se trabajó individualmente y consistió en responder con el mayor detalle posible a la siguiente pregunta:

Tarea: ¿Podrías indicar los errores que podrían cometer los estudiantes al realizar un contraste de hipótesis?

Recogidas las respuestas de los estudiantes, se realizó un análisis de contenido de las mismas. Este tipo de análisis es propio de la investigación cualitativa y es utilizado en el estudio sistemático de documentos escritos (Raigada, 2002). Mediante un procedimiento cíclico e iterativo se clasificaron los errores descritos por los estudiantes en los siguientes apartados: a) errores en el planteamiento de las hipótesis; b) errores en la selección o planteamiento del contraste; c) errores conceptuales; d) errores procedimentales; y e) errores de interpretación del resultado del contraste.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se analizaron un total de 264 errores descritos, que supone una media de 3,8 errores citados por cada participante y una desviación típica de 1,4. En la Tabla 1 se recoge el número de futuros profesores que citan al menos un error de cada una de las categorías definidas y el porcentaje sobre el total de participantes. Observamos un desempeño medio en los futuros profesores en la tarea, ya que el procedimiento de contraste es laborioso y el número de conceptos involucrados alto, por lo que es también alto el número de posibles errores. Los errores más citados son los relativos al planteamiento de las hipótesis y la interpretación de resultados, así como procedimentales y conceptuales. Seguidamente comentamos con más detalle los errores citados, que se han clasificado, cuando ha sido posible, teniendo en cuenta los descritos en los antecedentes.

Tabla 4. Número de futuros profesores que citan algún error en cada categoría y porcentaje (respecto al total)

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
Planteamiento de las hipótesis	48	68,6
Selección o planteamiento del contraste	19	27,1
Conceptuales	39	55,7
Procedimentales	44	62,9
Interpretación del resultado del contraste	46	65,7
Otros	7	10,0

Errores en el planteamiento de las hipótesis

Confunde hipótesis nula y alternativa. En esta categoría se incluyen las respuestas que citan la posible confusión entre las hipótesis nula y alternativa, error descrito por Vallecillos (1999) y Vera et al. (2011). A continuación, se muestra un ejemplo:

MGG: Considero que el mayor problema que se le presenta al alumnado en los contrastes de hipótesis es saber diferenciar entre la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, cometiendo el error al confundirlas y por lo tanto teniendo un contraste erróneo.

Hipótesis no complementarias. Otros estudiantes aluden a la posibilidad de construir hipótesis no complementarias, error recogido en investigaciones realizadas con estudiantes (Espinel et al., 2007; Vallecillos, 1999). En dicho caso, las hipótesis del contraste no cubrirían en su totalidad los valores posibles del espacio paramétrico. Como ejemplo se muestra la respuesta de JLS.

JLS: A la hora de hacer un contraste de hipótesis, si por ejemplo tenemos una distribución normal, los alumnos podrían no plantear correctamente las hipótesis nula o alternativa (deben de ser complementarias).

Otros errores al plantear las hipótesis. Junto a los errores manifestados anteriormente, algunos estudiantes citan hacer uso de los estadísticos muestrales en el planteamiento de las hipótesis, confundir una hipótesis unilateral con otra bilateral, uso de una notación no adecuada (Espinel et al., 2007; Inzunza y Jiménez, 2013; Vera et al., 2011). En otros casos, la respuesta es imprecisa, pues no se indica el error.

JVP: Plantear mal la hipótesis nula.

En la Tabla 2 observamos el desglose de los 48 (68,6%) participantes que han identificado al menos uno de los errores asociados al planteamiento de la hipótesis, la mayor parte sobre la confusión entre la hipótesis nula y alternativa. Es menos frecuente reconocer que las hipótesis podrían no ser complementarias y un 20% cita otros errores o son imprecisos.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores en el planteamiento de las hipótesis

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
Confunde hipótesis nula y alternativa	34	48,6
Hipótesis no complementarias	6	8,6
Plantea mal las hipótesis	14	20,0

Errores en la selección o planteamiento del contraste

Error al elegir la distribución muestral. La elección de la distribución muestral adecuada es fundamental para proseguir el contraste, pues todos los cálculos posteriores, por ejemplo, el p -valor o la región crítica se basan en ella. Algunos participantes indican que los estudiantes podrían elegir una distribución muestral incorrecta. Como ejemplo, se muestra la respuesta de JSM, que se refiere al cálculo incorrecto de los parámetros que determinan la distribución normal.

JSM: No toma bien la normal, por ejemplo, en lugar de poner $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ pone solo $N(\mu, \sigma)$ para la muestra.

No identificación del tipo de contraste (bilateral o unilateral). Se han incluido las respuestas que hacen referencia a los errores que pueden cometer los estudiantes cuando no interpretan correctamente el enunciado del problema y, por tanto, son inconsistentes con la definición de las regiones crítica y de aceptación. El hecho de que el contraste sea bilateral implica la existencia de dos regiones (una a izquierda y otra a derecha, con probabilidades de $\alpha/2$ respectivamente) mientras que, si es unilateral, bien a izquierda o a derecha, únicamente se contará con una región de rechazo con una probabilidad de α . A continuación, se muestra la respuesta dada por JCR.

JRC: Confusiones con el carácter bilateral/unilateral de las colas de distribuciones.

Respuesta imprecisa. Se han considerado aquellas respuestas en las que el estudiante no indica claramente en qué consiste el error de planteamiento, lo que podría enmascarar un desconocimiento de estos errores.

JML: No identificar el contraste adecuadamente.

Fueron sólo 19 (27,1%) los participantes que señalaron como posibles errores algunos relacionados con el planteamiento de las hipótesis, y 9 de ellos son imprecisos, lo que indica que el tipo de errores que es posible realizar al elegir el contraste adecuado es poco conocido por los estudiantes de la muestra.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores en el planteamiento del contraste

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
No elección de la distribución adecuada	6	8,6
No identificación del tipo de contraste (bilateral o unilateral)	7	10,0
Respuesta imprecisa	9	12,9

Errores conceptuales

Confusión de los errores Tipo I y Tipo II. Una vez planteada la hipótesis nula, existe la posibilidad de cometer errores que depende de la decisión tomada: Error Tipo I, cuando la hipótesis nula es rechazada siendo cierta y el Error Tipo II, cuando la hipótesis nula no es rechazada siendo falsa. La importancia de diferenciarlos se debe a que la probabilidad asociada al primer error (nivel de significación) queda determinada antes de la realización del mismo, mientras que la probabilidad asociada al segundo error es variable y depende de varios factores.

EHB: No distinguir los errores de tipo I y los de tipo II.

Interpretación incorrecta del nivel de significación. Algunos estudiantes sugieren errores de comprensión del nivel de significación, aunque generalmente son poco precisos, pues no se indica con claridad el cambio entre los dos términos de la probabilidad condicionada o la creencia de que este valor es la probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis nula, son algunos de los errores asociados a dicho concepto (Birnbaum, 1982; Falk, 1986, Vallecillos, 1999). Por tanto, no queda claro si realmente conocen los errores típicos asociados a la interpretación del nivel de significación. Como ejemplo, se muestra la respuesta dada por MEG.

MEG: Comprender el concepto de nivel de significación.

Interpretación incorrecta del p-valor. El *p*-valor es definido como la probabilidad de obtener el valor dado u otro más extremo bajo la aceptación de la hipótesis nula. Sin embargo, dicho término es interpretado como probabilidad de que la hipótesis sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico o bien, como la probabilidad de que el valor obtenido del estadístico se deba al azar o como probabilidad de la hipótesis nula (Batanero, 2000). Sólo uno de los participantes hace referencia a este error:

MSM: Confusión del nivel de significación y el *p*-valor.

Confusión entre estadístico y parámetro. En tanto que los parámetros poblacionales corresponden a medidas de una población, los cuales son desconocidos y constantes, los estadísticos se caracterizan por ser valores conocidos y variables de una muestra a otra, aunque los estudiantes los suelen confundir (Vallecillos, 1999; Vera et al., 2011). Algunos participantes citaron esta confusión:

CBF: Tomar la media de la muestra y no de la población.

Errores al aplicar el Teorema Central del Limite. Este teorema asegura que la suma de variables aleatorias independientes, con varianzas no nula pero finita, tiende a distribuirse normalmente a medida que aumenta el tamaño muestral y permite identificar la distribución muestral del

estadístico. Algunos estudiantes como IPM indican que un error podría ser su aplicación incorrecta del mismo.

IPM: Al formar la distribución de la media muestral, es posible que no aplique bien el Teorema Central del Límite, se olvide de dividir por \sqrt{n} o sólo divida por n . Otro posible error es que directamente no aplique el Teorema Central del Límite.

Más de la mitad de los participantes (39) describieron algún error conceptual, con el 41,4% de estudiantes citando la confusión entre estadístico y parámetro, siendo el segundo error conceptual más citado la confusión entre los tipos de errores. Apenas se ha aludido a los errores de interpretación del nivel de significación y del p -valor, y cuando se hace es en forma muy imprecisa. Ello nos hace sospechar que los estudiantes pudieran no ser conscientes de este error, que de acuerdo a la investigación previa está muy extendido. El error asociado al Teorema Central del Límite también ha sido citado con poca frecuencia.

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores conceptuales

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
Confunden los errores Tipo I y Tipo II	11	15,7
Interpretación incorrecta del nivel de significación	7	10,0
Interpretación incorrecta del p -valor	1	1,4
Confunde estadístico y parámetro	29	41,4
Aplicación incorrecta del Teorema Central del Límite	4	5,7

Errores procedimentales

Error en el cálculo del p -valor. El cálculo del p -valor puede ser erróneo debido a una comprensión deficiente sobre el concepto de probabilidad condicionada (Falk, 1986), cuando se calcula como probabilidad simple, o bien, si en lugar de tomar la desigualdad apropiada para el tipo de contraste, (por ejemplo, la región mayor que el estadístico) se toma la contraria. Los estudiantes que indican este error procedimental suelen ser muy imprecisos y no indican claramente en qué consiste:

ILG: No calcular bien el p -valor.

Determinación del punto crítico. Mientras que en el cálculo del p -valor se parte de un valor del estadístico para calcular la probabilidad, para determinar el punto crítico se realiza la operación inversa, pues se parte del nivel de significación para determinar el valor del estadístico que corresponde a dicha probabilidad, lo que es citado en forma poco concreta por algunos estudiantes.

DCC: También es frecuente que fallen a la hora de buscar los valores que vienen dados por el nivel de significación del contraste.

Determinación incorrecta de las regiones de rechazo/no rechazo. La región de rechazo está constituida por aquellos valores del estadístico de contraste que se alejan mucho de la hipótesis nula, siendo poco probable que ocurra si la hipótesis es verdadera. Una incorrecta definición de la región de rechazo puede implicar conclusiones contrarias a las reales. El error de intercambiar las regiones de un contraste fue descrito por Vallecillos (1999).

AGS: Un error común puede ser el realizar tomar la región de rechazo en los dos extremos (Bilateral) en lugar de tomarla solo en uno (Unilateral).

Error de tipificación. Generalmente, la distribución muestral es una distribución normal con una media y varianza determinada a partir de las características de la población en estudio. Para el cálculo del p -valor, regiones o puntos críticos, se recurre a la tipificación de la variable para convertirla en una Normal estándar. Ello requiere una serie de operaciones con desigualdades donde el estudiante podría cometer errores, como lo recoge la respuesta de IPM. Por otro lado, un estudiante indica que se puede cometer error en el manejo de desigualdades.

IPM: Como los alumnos trabajan con la distribución $N(0,1)$, deben tipificar, y es posible que no lo hagan, lo que causaría un grave error puesto que no saben calcular los datos en la distribución normal correspondiente, o también es posible que tipifiquen de forma errónea, o que simplemente se confundan en los cálculos.

Lectura incorrecta de las tablas estadísticas. Independientemente del proceso empleado, el uso adecuado de las tablas estadísticas adquiere cierta importancia pues un error en la lectura de la tabla podría provocar, entre otros, un cálculo incorrecto del p -valor o la determinación incorrecta de las regiones de rechazo y no rechazo. Este tipo de error ha sido señalado por el estudiante LPM.

LPM: Es normal que se equivoquen en la lectura de las tablas.

Error en el cálculo de probabilidades con la distribución normal. En algunos casos se citan los errores de cálculo de probabilidades con la distribución normal:

ACR: El año pasado di clases particulares a un adolescente que estaba en segundo de bachillerato de sociales y los errores que más cometía eran sobre todo al calcular probabilidades con la distribución normal.

Determinación del estadístico de contraste. Con poca precisión, algunos estudiantes sugieren errores al determinar el estadístico de contraste, queriendo indicar errores en el cálculo del valor crítico que corresponde a un cierto nivel de significación:

ECL: [...] determinar el valor del estadístico en el nivel de significación α [...].

Errores de cálculos. Dentro de esta categoría se han incluido aquellas respuestas que hacen alusión a los posibles errores de cálculo que se cometen en la elaboración del contraste.

LJ: No saber o equivocarse al realizar los cálculos.

Los errores procedimentales citados son bastante variados y numerosos, aunque la mayor parte de las veces hay poca precisión al describirlos. El error procedimental que parece más claro es el de lectura de las tablas de la distribución normal, tipificación y determinación de las regiones, mientras el resto se describe en forma muy difusa.

Tabla 5. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores procedimentales

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
Error en el cálculo del p -valor	2	2,9
Determinación del punto crítico	5	7,1
Determinación incorrecta de las regiones de rechazo/no rechazo	10	14,3
Error de tipificación	17	24,3
Lectura incorrecta de las tablas estadísticas	21	30,0
Error en el cálculo de probabilidades con la distribución normal	4	5,7
Determinación del estadístico de contraste	10	14,3
Errores de cálculo	5	7,1

Errores de interpretación

No saber cuándo rechazar o no rechazar la hipótesis nula. Por la experiencia docente en clases particulares o de otro tipo, se indica que el estudiante sabe aplicar el procedimiento, pero no llega a tomar la decisión pues no conoce la regla para ello. Este es un error poco citado en la literatura.

ACR: El año pasado di clases particulares a un adolescente que estaba en segundo de bachillerato de sociales [...]. También cometía errores al ver si rechazaba o no la hipótesis, no era capaz de retener cuándo rechazaba o cuándo no.

Error en la interpretación del resultado o contextualización del mismo. Otra forma de expresar el mismo error anterior es la dificultad en contextualizar los resultados del contraste. Algunos

estudiantes rechazan una hipótesis, pero no saben explicar qué significa este rechazo, en términos del enunciado dado.

ACG: Por último, es bastante común que el alumno no sepa concluir bien el ejercicio, debido a que no sabe cómo interpretar los resultados obtenidos, bajo el procedimiento más mecanizado.

Utilización del término “acepta” la hipótesis nula. El contraste de hipótesis está basado en la información proporcionada por la muestra, por lo que, si la hipótesis nula es rechazada, sólo se puede indicar que los datos de la muestra ofrecen cierta evidencia sobre su falsedad. Sin embargo, si no se rechaza, no implica que sea cierta; por ello, no es conveniente utilizar el término “aceptación”.

BDM: Que, si les sale que hay que aceptar el contraste, es decir, si el p-valor es mayor que el valor α , ellos digan que se acepta la hipótesis nula en vez de decir que no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula.

En la Tabla 6 mostramos los errores sobre interpretación del contraste, donde se muestra la importancia que otorgan a la interpretación y contextualización de los resultados; con mucho menor frecuencia se citan el resto de errores como *no saber cuándo rechazar o no rechazar* y la importancia de cuidar el lenguaje a la hora de concluir evitando emplear la palabra aceptar. Por último, se ha encontrado una respuesta en relación a *no incluir el nivel de significación en la conclusión*.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores de interpretación

	<i>N. Estudiantes</i>	<i>Porcentaje</i>
No saber cuándo aceptar o rechazar la hipótesis nula	14	20,0
Error de interpretación o contextualización de resultados	32	45,7
Utilización del término “acepta” la hipótesis nula	7	10,0
No incluir el nivel de significación en la conclusión	1	1,4

Los errores descritos a lo largo de esta sección se completan con 3 estudiantes que citan la no comprensión de la terminología y cuatro los errores de interpretación de los datos del enunciado. Por último, señalar que únicamente dos participantes no dieron respuesta alguna a la pregunta planteada en este estudio, este hecho nos podría indicar la existencia de ciertas dificultades a la hora de identificar los errores que pueden tener los estudiantes de Bachillerato cuando abordan este tema.

CONCLUSIONES

Los 70 participantes identificaron diferentes errores posibles en el desarrollo de un contraste de hipótesis, aunque con un número pequeño (3,8 errores por participante). Muchos de los errores señalados coinciden con los identificados en la literatura; por ejemplo, confundir hipótesis nula y alternativa, confundir estadístico o parámetro o plantear hipótesis no complementarias (Batanero, 2000; Vallecillos, 1999). Igualmente se alude a la confusión entre contraste unilateral o bilateral, confusión de la distribución muestral e interpretación de resultados, encontrados en Espinel et al. (2007) o Vera et al. (2011). También se identifican errores de tipificación y lectura de la tabla normal, que no son tan específicos del contraste de hipótesis pero que ocurren con frecuencia entre los estudiantes en este y otros temas. En muchos casos se describen los errores con poca precisión, lo que nos indica que, en realidad, su conocimiento de cómo los estudiantes razonan y actúan en un contraste de hipótesis es limitado; por ejemplo, cuando se alude a “hipótesis mal planteadas” o “no saber plantear bien el contraste”. También se describen errores poco frecuentes como la confusión en el tipo de error.

En consecuencia, aunque se observa un cierto grado de desarrollo de la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de estos profesores (en el modelo de Godino, (2009)) en lo que se refiere al contraste de hipótesis, sería necesario desarrollar de una forma más completa dicha faceta en estos futuros profesores, haciéndoles conocer mejor el desarrollo de un contraste de

hipótesis y los posibles errores de los estudiantes. Además, sería necesario desarrollar también en ellos el resto de las facetas de su conocimiento didáctico-matemático sobre este tema. En particular, sería importante desarrollar su faceta instruccional para proporcionarles modelos y situaciones didácticas que ayuden a mejorar el conocimiento de los estudiantes sobre el contraste de hipótesis y evite en el futuro los errores de aplicación descritos en los antecedentes.

En este sentido, sería también deseable formarles en métodos alternativos de aproximación al contraste de hipótesis. Como se indica en Batanero, Díaz y López-Martín (2017) o Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011), no hay una única aproximación al contraste de hipótesis (en general, a la inferencia estadística) y es posible hoy día, gracias a la simulación, comenzar con aproximaciones informales. Todo ello teniendo en cuenta que una aproximación informal por sí sola no asegura que los estudiantes no cometan errores conceptuales (Silvestre y Sánchez, 2016).

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Alonso, I. G. y Cruz, J. A. G. (2008). Inferencia estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González, *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM*, (pp. 219-228). La Laguna: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Badenes-Ribera, L., Frías-Navarro, D., Monterde-i-Bort, H. y Pascual-Soler, M. (2015). Interpretation of the p-value: A national survey study in academic psychologist from Spain. *Psicothema*, 27, 290-295.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- Batanero, C., Díaz, C. y López-Martín, M. M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/batanero.pdf>
- Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics*, 4, 24-27.
- Caperos, J. M. y Pardo, A. (2013). Consistency errors in p-values reported in Spanish psychology journals. *Psicothema*, 25, 408-414.
- Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W. y Onghena, P. (2007). Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review*, 2(2), 98-113.
- Dawson, A. J., Jaworski, B. y Wood, T. (2013). *Mathematics teacher education: Critical international perspectives*. Dordrecht, The Netherlands: Routledge.
- Espinel, M. C., Ramos, R. M. y Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. *Números*, 67, 15-23.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, 7(1), 1-20.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossmann, A. (2011). Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Inzunza, S. y Jiménez, J. V. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de futuros profesores universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 179-211.
- Liu, Y. y Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. *Pedagogies*, 4(2), 126-138.
- López-Martín, M. M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 5(8), 33-59.
- LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez, y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.
- McLean, A. (2002). Statistacy: Vocabulary and hypothesis testing. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Raigada, J. L. P. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic Studies*, 3(1), 1-42.
- Ramos, C. E., Espinel, M. C. y Ramos. R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 61, 35-44.
- Silvestre, E. y Sánchez, E. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informal: introducción a las pruebas de significancia en el bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 509-518). Málaga: SEIEM.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 58, 201-204.
- Vera. O., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *Unión*, 27, 41- 61.
- Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M. y Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society (A)*, 174(2), 247-295.