

ENRIQUECIMIENTO DE TAREAS Y PROBLEMAS DE MODELADO INVERSO: UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES EN FORMACIÓN

Tasks enrichment and inverse modelling problems: an experience with prospective teachers

Martínez-Luaces, V.^a, Rico, L.^a, Fernández-Plaza, J. A.^a y Ruiz-Hidalgo, J. F.^a

^aUniversidad de Granada

Resumen

Esta comunicación expone el marco de un estudio sobre enriquecimiento de tareas escolares realizadas por futuros profesores y algunos de sus resultados. La experiencia que se presenta proviene del trabajo realizado con 74 profesores en formación, matriculados en el Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria, impartido por la Universidad de Granada en el curso 2016-2017. El estudio se centra en la reformulación en modo inverso de unos problemas enunciados en modo directo por el grupo de docentes participantes. Las respuestas proporcionadas fueron estudiadas e interpretadas utilizando el Análisis Didáctico, una metodología de análisis basada en categorías didácticas. Se observa que los futuros profesores elaboran una amplia diversidad de formulaciones, pero muestran un dominio pobre de la reflexión didáctica en lo que respecta al análisis de significados.

Palabras clave: *análisis didáctico, enriquecimiento de tareas, Enseñanza Secundaria, formación de profesores, modelización, problemas inversos.*

Abstract

This communication exposes the framework of a study on the enrichment of school tasks carried out by future teachers and some of their results. The experience presented comes from the work carried out with 74 teachers in training, enrolled in the Master's Degree in Teaching Secondary Education, taught by the University of Granada in the 2016-2017 academic year. The study focuses on the reformulation of the problems in the reverse mode posed directly by the group of participating teachers. The answers provided were studied and interpreted using Didactical Analysis, a methodology of analysis based on didactic categories. Future teachers are able to elaborate a wide diversity of formulations; however they show poor mastery of the didactic reflection with regard to the analysis of meanings.

Keywords: *didactical analysis, tasks enrichment, Secondary school, teaching training, courses modelling, inverse problems.*

INTRODUCCIÓN

Como en otras muchas disciplinas, distinguimos en los problemas de matemáticas básicamente dos tipos de enunciados de problemas: enunciados directos y enunciados inversos. En ese segundo tipo es frecuente la posibilidad de combinarlos con tareas de modelización, opción que hemos llamado Problemas de Modelado Inverso. Esos problemas pueden originarse por reformulación de enunciados de problemas tradicionales de modelización, planteados mediante enunciados directos (Martínez-Luaces, 2013, 2016).

Este documento continúa esa línea de investigación, que se centra en el enriquecimiento de tareas para los escolares de Enseñanza Secundaria, que son formuladas por profesores en formación.

Por el contexto en que se realiza, el trabajo atiende a la formación de los profesores de matemáticas de Secundaria y particularmente se ocupa de su conocimiento profesional. Nuestro interés se enfoca en revelar su conocimiento sobre los contenidos matemáticos escolares, debido a que es mediante esos conceptos y procedimientos cómo se determinan los significados necesarios para su planificación, implementación y evaluación. Como método de estudio empleamos el denominado Análisis Didáctico, siguiendo pautas ya establecidas en Rico, Lupiáñez y Molina (2013) y en Rico y Moreno (2016).

Durante la primera fase del trabajo de campo se propone a los participantes en el estudio la reformulación, como problema inverso, del enunciado de un problema directo de modelización matemática; además se les solicita una comparación de ambos enunciados. En particular, se les pide que indiquen aquellas características conceptuales y didácticas que han tenido en cuenta en la modificación de la tarea.

Las producciones de los docentes en formación que han resultado de esta experiencia se analizan a través de aquellas categorías correspondientes a tres de las dimensiones curriculares: análisis conceptual o de significados, análisis cognitivo y análisis de instrucción. Con estas herramientas, se estudian, describen y categorizan las respuestas dadas por los sujetos de la muestra, que incluyen tanto los problemas reformulados como los comentarios sobre las tareas propuestas.

Por razones de extensión, optamos en este trabajo por centrarnos en el análisis conceptual considerando los enunciados, directo e inverso, junto con la comparación de sus correspondientes significados. Más concretamente, el objetivo es comparar los significados de las tareas, directa y la propuesta de tarea inversa que realizan los futuros profesores.

Como ejemplo escogemos un problema sobre el que se logran caracterizar nueve tipos distintos de reformulaciones, que incluyen la determinación de subtipos. Se identifican y describen diversas estrategias para la reformulación de ese problema y para el enriquecimiento de sus tareas, así como para su utilización con escolares de Enseñanza Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

Si bien han aparecido propuestas muy creativas, los profesores en formación han optado por reformulaciones convencionales que, en ocasiones dan lugar a una trivialización del problema planteado.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo aborda el análisis de los enunciados inversos de los problemas matemáticos y del conocimiento sobre los contenidos matemáticos escolares del docente, que se manifiestan mediante Análisis didáctico de las tareas propuestas.

El marco teórico se centra fundamentalmente en los elementos considerados para analizar los enunciados de las tareas inversas propuestas por los futuros profesores. Se describen los fundamentos básicos de los problemas inversos y, seguidamente, se presenta el marco que sustenta a los elementos que han servido para el análisis.

Problemas inversos

En contraste con los problemas de modelización, los problemas inversos tienen escasa presencia en el currículo de Secundaria.

Los expertos, sin proporcionar una clasificación exhaustiva general, catalogan los problemas en directos e inversos. Groestch (2001), considera como problemas directos aquellos que proporcionan la información necesaria para seguir un procedimiento bien definido y estable, que conduce a una única solución correcta.

En esencia, hay dos tipos de problemas inversos. Para caracterizarlos correctamente, es conveniente esquematizar las componentes de un problema directo como se observa en la Figura 1. En este esquema los datos iniciales y un cierto procedimiento son conocidos y están disponibles; lo que se solicita es un determinado resultado.

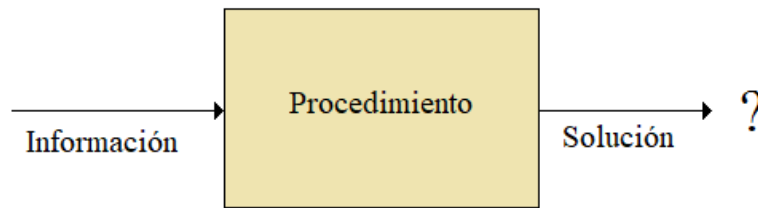


Figura 3. Esquema para los problemas directos

En una primera modalidad de problema inverso – *problema de causalidad* – se plantea la pregunta de cuáles pueden ser las causas que provocan un cierto efecto, por ejemplo, cuál puede ser la función (que será la primitiva o integral indefinida) que por derivación da lugar a cierta función dada. Un esquema de este tipo de problema se puede observar en la Figura 2.

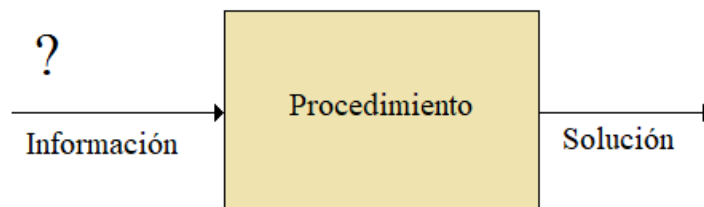


Figura 4. Esquema para los problemas inversos de causalidad

Se puede plantear una segunda modalidad de problema inverso, llamada *problema de especificación*, en la cual se conocen tanto la causa como el efecto y lo que se solicita es el nexo entre ellos (por ejemplo, cuando se pide la demostración de cierta propiedad, en la que hipótesis y tesis son conocidas). En este caso el esquema correspondiente se observa en la Figura 3.

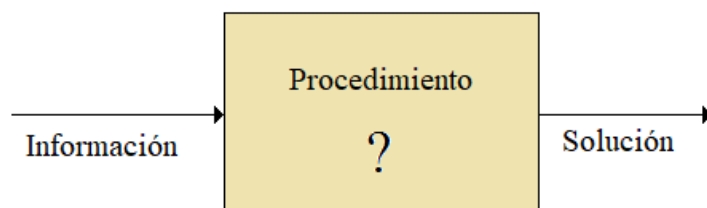


Figura 5. Esquema para los problemas inversos de especificación

En esta investigación, el procedimiento es siempre conocido, por lo que el tipo de problema de especificación no es objeto de este estudio.

Es en la modelización y en las aplicaciones a otras disciplinas donde los problemas inversos tienen mayor riqueza por su variedad de sentidos y son más apropiados para propósitos educativos. Por esta razón, presentamos y estudiamos un caso en que se combinan la modelización matemática y los problemas inversos, de los cuales surgen los que hemos llamado *problemas de modelado inverso*.

Para precisar esta interacción entre problemas inversos y de modelización, el documento de discusión preliminar para el estudio ICMI 14, plantea que el término "modelización" se centra en la dirección que va del mundo real a las matemáticas, mientras que el término "aplicación" va en dirección opuesta. A su vez, el término "modelización" enfatiza el proceso que tiene lugar, mientras

que la palabra "aplicación" enfatiza el objeto involucrado, particularmente los ejemplos de la vida real que son susceptibles a cierta manipulación matemática (Blum, 2002).

Con atención a las consideraciones anteriores, estudiamos un caso en que se combinan la modelización matemática y los problemas inversos, que ejemplifica los llamados problemas de modelado inverso (Martínez-Luaces, 2013, 2016).

El análisis didáctico como herramienta para analizar el conocimiento profesional

El conocimiento profesional del docente ha sido tema de estudio por parte de varios investigadores, que se inician con los aportes de Shulman (1986), quien distingue tres categorías de conocimiento del contenido: el conocimiento del contenido de la materia, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular. Otros investigadores – particularmente los de la Universidad de Michigan – han analizado las opiniones de profesores en ejercicio, a través de encuestas y entrevistas, llegando a elaborar un modelo denominado MKT por sus siglas en inglés (Mathematical Knowledge for Teaching). En dicho modelo (Hill, Ball y Schilling, 2008; Ribeiro y Carrillo, 2012) se establecen dos dominios diferentes: el conocimiento del contenido (que se divide en: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático) y el conocimiento didáctico del contenido (dividido en conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo) (Ribeiro y Carrillo, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, el conocimiento profesional del docente – en sus múltiples dominios y subdominios – ayuda al docente a establecer el significado de los conceptos, para luego implementarlos en sus clases y evaluarlos, siguiendo un método que Rico y colaboradores denominan Análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Rico y Moreno, 2016).

El Análisis didáctico se estructura de acuerdo a cuatro tipos de análisis, cada uno con distinto objeto de estudio, según la dimensión del currículo escolar de matemáticas considerada. En primer lugar, comienza con el análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares, donde el docente identifica, selecciona y organiza conceptos y procedimientos aptos para la instrucción. Nuestra noción de significado se basa en las tres componentes del triángulo semántico de Frege, según lo considerado por Rico (2012): estructura conceptual, sistema de representación y modos de uso.

METODOLOGÍA

Esta investigación es un estudio exploratorio, ya que presenta un primer trabajo de un estudio sistemático, relacionado con la transformación de problemas directos a enunciados inversos por parte de futuros docentes de Educación Secundaria.

El estudio tiene como objetivo describir y caracterizar las producciones de futuros profesores cuando inventan enunciados de problemas de modelado inverso, basados en un problema directo previo. Teniendo en cuenta que se trata de futuros docentes, se les solicita enmarcar sus propuestas como enriquecimiento de una tarea destinado a estudiantes de Educación Secundaria. Por ello, sus respuestas se analizan considerando la comparación que han hecho de ambos problemas en cuanto a significación, autenticidad, elementos y variables de tarea.

La muestra para el trabajo empírico presentado la constituye un grupo de 74 profesores en formación de la asignatura "Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria", del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria impartido en la Universidad de Granada (España), en el curso académico 2016-2017.

La experiencia se lleva a cabo en dos sesiones de trabajo. En la primera, se propone a los futuros profesores un problema de modelado directo, trabajado previamente (Martínez-Luaces, 2016). El

objetivo de la tarea consiste en reformular el problema como actividad de enriquecimiento para estudiantes de secundaria. Dichas reformulaciones se utilizan para explicar los problemas inversos.

Una segunda sesión incluye la propuesta de un nuevo problema directo – *problema de la oveja* – a los futuros profesores. Su enunciado describe una oveja pastando en un campo cuadrado de lado L . La oveja está atada en el punto medio del lado sur del terreno y la cuerda que ata a la oveja tiene una longitud R como se muestra en la Figura 4. En dicha figura, A representa el área del sector accesible a la oveja. Sea $r = \frac{R}{L}$ la relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del lado del

campo y sea $f = \frac{A}{L^2}$ la fracción del área total en la que la oveja puede pastar. Obviamente f es función de r y la relación entre ambas variables se puede obtener por integración. Un posible problema directo consiste en solicitar a los estudiantes que obtengan f para uno o más valores de r , por ejemplo: ¿qué fracción del área total es accesible a la oveja si la cuerda mide las tres cuartas partes de la longitud del lado del terreno?

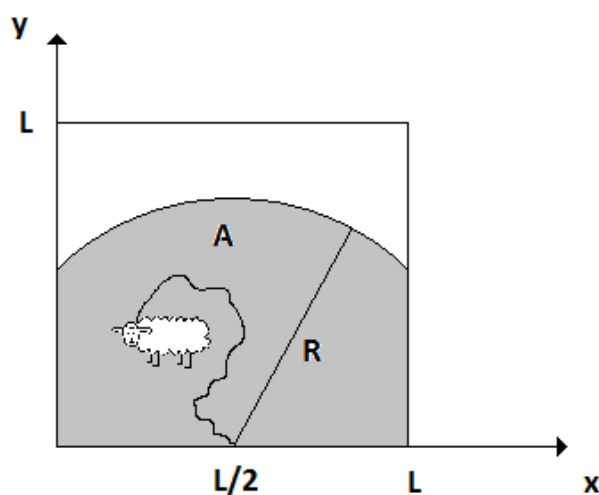


Figura 6. Parte del terreno accesible a la oveja

La tarea propuesta pide expresamente a los participantes que reformulen el enunciado como problema inverso. Se solicita a los futuros docentes analicen ambos enunciados comparativamente.

Datos y organización

No todas las respuestas recibidas corresponden a reformulaciones inversas; las producciones no planteadas en forma inversa no se tuvieron en cuenta para el estudio. En segundo lugar, varios participantes propusieron más de una reformulación; de hecho, algunos de ellos enunciaron hasta tres problemas inversos. Algunos trabajaron individualmente mientras que otros prefirieron trabajar en parejas. Por estos motivos, la unidad de información de nuestro estudio, no son los sujetos, sino las respuestas recogidas, que se codifican según respuestas (R1, R2, etc). Los 74 participantes proporcionaron un total de 40 reformulaciones, planteadas como problemas inversos.

Instrumento de análisis

La información recogida se organizó en una tabla de doble entrada en la que cada respuesta considerada, era desglosada atendiendo a variables teóricas tomadas del análisis didáctico. El equipo de investigación analizó las reformulaciones inversas propuestas por los futuros profesores en términos del enunciado propuesto y el análisis de los significados correspondiente. A medida que la investigación fue avanzando el instrumento se fue perfeccionando, llegando a tener en su versión final un total de siete columnas que se describen a continuación.

En las primeras columnas del instrumento se proporciona información sobre la respuesta analizada y el alumno que la propuso (columna 1) y sobre el enunciado del problema, en el que se consideró tipo de enunciado (columna 2) y cambio propuesto con respecto al problema original, formulado de manera directa (columna 3).

Las variables 4, 5, 6 y 7 – todas bajo el título común "análisis de los significados" – corresponden a los aspectos de significado: contenido matemático (columna 4), sistemas de representación (columna 5), significados y modos de uso (columna 6) y situación (columna 7).

En la Figura 5 se pueden observar algunos ejemplos de cómo se utilizó el instrumento de análisis para la organización de la información recogida. Consideramos en la figura exclusivamente las variables que son analizadas en este estudio.

| | Enunciado | | Análisis de los Significados | | | |
|------------|-----------------|-----------------------|--|---------------------------|--------------------------------|---------------------|
| | Tipo | Cambio | Contenido Matemático | Sistema de Representación | Sentidos y Modos de Uso | Situación |
| R1 (A14 a) | Función Inversa | Geometría trapezoidal | Similar, área y región | N/M | Espacio y forma | Educativa o laboral |
| R2 (A15 a) | Secuencial | Longitud de cuerda | Equivalencia de áreas | N/M | Espacio y forma, Incertidumbre | N/M |
| R3 (A15 b) | Iso-superficial | Ubicación de estaca | Equivalencia de áreas | N/M | Espacio y forma, Incertidumbre | N/M |
| R4 (A15 c) | Dinámico | Tiempo, velocidad | Longitud de arco y área bajo una curva | N/M | Espacio y forma, Incertidumbre | N/M |

Figura 7. Parte del instrumento utilizado

RESULTADOS

Las reformulaciones del problema de la oveja, propuestas por los futuros profesores dieron lugar a nueve grupos, en algunos casos divididos en varios subgrupos.

De las producciones obtenidas, la mayoría se basaba en una inversión de la función o en la trivialización el problema. Como ejemplo del primer caso (inversión de la función original), se puede citar la respuesta codificada como (R8), en la que se pide “hallar $r = \frac{R}{L}$ (relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del terreno) tal que $f = \frac{3}{4}$ (es decir que la oveja pueda acceder a un área que sea $f = \frac{3}{4}$ del área total)”.

Un ejemplo de trivialización del problema se observa en (R6) donde se pregunta: “¿qué longitud mínima ha de tener la cuerda para que la bestia se lo coma todo? razónalo.” Obviamente este problema se reduce a hallar la distancia entre el punto $(L/2, 0)$, que es donde está atada la oveja, y el punto (L, L) , que es el punto más alejado del terreno. Esto hace que el problema original – que requería considerar diversas funciones y calcular integrales definidas – ahora se reduce a aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, o eventualmente, utilizar el teorema de Pitágoras. En cualquier caso, la resolución es inmediata.

En términos de creatividad, un ejemplo interesante se observa en la (R2) en el cual se mantiene la geometría del terreno y la posición de la estaca, como se puede ver en la Figura 6.

En esta reformulación se proporciona el dato correspondiente a la longitud de la cuerda $R = \frac{L}{3}$ y se asume que “a lo largo de un día, la oveja come toda la hierba en el área accesible” y la primera pregunta es sobre la longitud R' , que deberá tener la cuerda “el día siguiente para que la oveja pueda pastar la misma cantidad de hierba”. Luego se repite la pregunta para el tercer día y para el cuarto día, para finalmente preguntar “¿después de cuántos días la oveja no encontrará más la misma cantidad de hierba para pastar?”

Como se puede ver, se invierte el orden de las variables involucradas, se mantienen la geometría y la posición de la estaca, pero ahora el problema es de tipo secuencial.

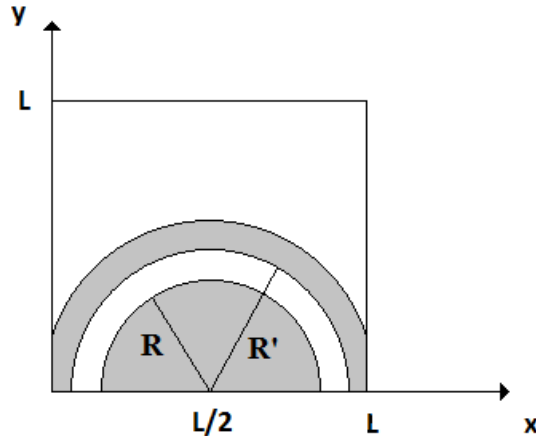


Figura 8. Propuesta de problema inverso secuencial

Los distintos grupos de reformulaciones no serán estudiados en este trabajo por razones de extensión del artículo, en su lugar se exponen algunas reformulaciones especialmente creativas propuestas por los futuros profesores, como las que se muestran en las Figuras 7, 8 y 9. En el primero, el futuro docente propone atar dos cabras montesas en esquinas opuestas de un terreno cuadrado de lado L , como en la Figura 7. Se pide “que ocupen la máxima área posible cada una, pero sin coincidir en ningún punto” y se sabe que “una de las áreas tiene que ser mayor que la otra”. Se pregunta por el tamaño de cada cuerda y cuánta área tendrá disponible cada cabra.

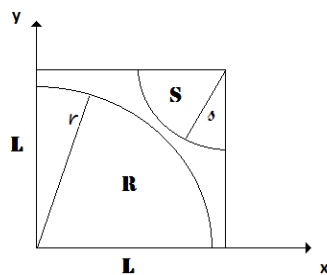


Figura 9. Problema de las dos cabras montesas

Es obviamente un problema de optimización, que depende de dos variables y que no va a tener un máximo sino un supremo que no será alcanzable para ningún par de valores de longitud de cuerda.

El segundo ejemplo propone un terreno rectangular, de base L y altura $2L$, con un cambio en la posición de la estaca, ubicada ahora en el punto $(L/3, 0)$, como se puede ver en la Figura 8.

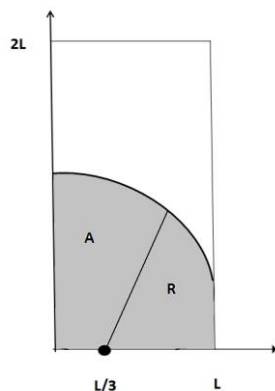


Figura 10. Problema de longitud de terreno, con cambio de geometría y de posición de estaca

El futuro profesor dice que “la longitud de la cuerda es tres quintas partes del lado del terreno” y además el “área total accesible a la oveja es 400 m^2 ” y la pregunta es “¿cuál es el área del terreno que no resulta accesible a la oveja?”. Se trata de un problema distinto para el que resulta fundamental calcular la longitud de terreno.

En el último ejemplo hay dos ovejas atadas al mismo punto con cuerdas de longitud $R = 3/4 L$ y las dos se encuentran en el punto P, como se observa en la Figura 9. La oveja α corre a lo largo del segmento PQ con una cierta velocidad que se proporciona en función de L y la oveja β corre a lo largo del arco PSQ . Se plantean varias preguntas, siendo particularmente interesante la última – ya que se invierte la función – en la que se pide la velocidad que debe tener la oveja β para llegar al punto Q al mismo tiempo que la oveja α .

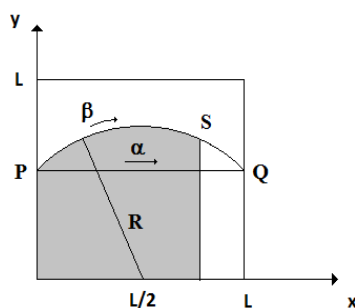


Figura 11. Problema dinámico con dos ovejas

Los resultados que aquí se presentan y analizan se refieren a resultados del análisis de los significados de los enunciados propuestos, obtenidos a partir de las producciones y los comentarios que los participantes en el estudio incluyeron en el formulario que se les suministró con el problema.

Análisis de significados

En esta sección se muestran los resultados observados en algunas categorías utilizadas para analizar las producciones de futuros docentes, correspondientes a las columnas del instrumento, relacionadas con el análisis de significados.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En lo que refiere al contenido matemático, más de la mitad de las respuestas (20 de las 34, ya que en 6 casos no hacen mención sobre el contenido) responden que se trata de un problema de áreas. Otras respuestas frecuentes fueron “longitud de arco” (7 de 34),

“ecuaciones” y “funciones” (cada una con 5 de las 34 respuestas). Sorprendentemente, solamente 3 respuestas mencionan la palabra “integrales” y sólo 2 plantean que “trigonometría” es parte del contenido matemático utilizado. Además de lo anterior, hay opciones minoritarias que mencionan el Teorema de Pitágoras, “perímetros”, “medida”, entre otras.

- Con respecto a los sistemas de representación, cabe destacar que solamente 12 de las 40 respuestas obtenidas lo mencionan explícitamente. De las 12 respuestas antes citadas, 7 observan que se trata de datos presentados en forma simbólica y acompañados de un diagrama pictórico, 4 sólo hacen mención a la representación pictórica y 1 hace lo mismo con la representación simbólica.
- En cuanto a "sentidos y modos de uso", los estudiantes que responden la pregunta (37 de las 40 respuestas) afirman que la tarea es sobre "espacio y forma"; más precisamente, 17 de esas 37 respuestas (casi un 50%) optan por esta interpretación. Las otras respuestas se distribuyen de la siguiente manera: aproximadamente el 25% (9 de 37) dicen que la tarea es sobre "cambio y relaciones", algo menos del 25% (7 de 37) responden que es una tarea de "cantidad" y los cuatro restantes, más del 10%, lo clasifican como "incertidumbre y datos".
- En cuanto a la situación o contexto, una gran mayoría expresa su opinión a favor del campo "educativo o laboral". Cuatro de los futuros profesores colocan la tarea en el entorno "público" y solo uno la califica como "personal". Además de esto, otros mencionan el término comparativo "similar", sin más aclaraciones.

CONCLUSIONES

En la reformulación de problemas directos para transformarlos en inversos, varios futuros profesores han sido especialmente creativos tanto en la reformulación como en el enriquecimiento de tareas. Sin embargo, la gran mayoría opta por un enfoque estándar y, en algunos casos, por una trivialización del problema.

En el trabajo con los futuros docentes, se identifican nueve grupos diferentes de problemas inversos, algunos de los cuales incluían hasta cuatro variantes, y en casi todos los casos los participantes agregan a su propuesta de reformulación, el análisis de la tarea correspondiente.

A los participantes en este estudio no se les pide que resuelvan los problemas propuestos por ellos, por lo que este es un aspecto a indagar en futuras investigaciones.

A partir de este estudio descriptivo, se identifican y caracterizan una serie de estrategias para plantear problemas inversos.

Los futuros profesores consideran a sus propias reformulaciones mayoritariamente como un problema de áreas y en menor proporción, como problema de longitudes, funciones y planteo y resolución de ecuaciones. Muy pocos mencionan las integrales o la trigonometría como contenido matemático utilizado en la tarea propuesta.

Pocos participantes prestan atención a los sistemas de representación y de los que lo hacen en su mayoría mencionan una doble representación pictórica y simbólica.

Casi la mitad de los futuros docentes entiende que se trata de una tarea de “espacio y forma” y una gran mayoría de los mismos sitúa la tarea en el ámbito “educativo y laboral”. En ambos casos aparecen también otras opciones minoritarias.

El Análisis didáctico ha sido una herramienta útil para estudiar y caracterizar las producciones de los participantes, no solo en lo que se refiere al problema reformulado en sí, sino también en el análisis de las tareas propuestas, relacionadas con el problema inverso correspondiente.

En lo que refiere al instrumento utilizado, se elabora una plantilla, que fue evolucionando con el agregado de columnas, el desglose o la eliminación de las mismas, según las respuestas obtenidas. Este proceso dinámico no puede considerarse terminado, por lo que se espera que el instrumento evolucione y sea susceptible de nuevas modificaciones en futuros trabajos.

Las posibles continuaciones de la investigación podrían incluir la ampliación de la muestra y la comparación con resultados en otras universidades y en otros países.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de los profesores Antonio Moreno Verdejo y Luis Rico Romero, del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria de la Universidad de Granada.

La investigación se ha realizado con apoyo del proyecto de investigación «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I, y del Grupo de Investigación FQM-193: Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51(1), 149-171.
- Groetsch, C. W. (2001). Teaching Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematicae*, 24 (1), 89-94.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.
- Martinez-Luaces, V. (2013). Inverse modelling problems in linear algebra undergraduate courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(7), 1056-1064.
- Martinez-Luaces, V. (2016). Inverse Modeling Problems and their Potential in Mathematics Education. En M. Vargas (Ed.), *Teaching and Learning: Principles, Approaches and Impact Assessment*, pp. 151-185. New York: Nova Publishers.
- Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Actas del XV Simposio de la SEIEM*, pp. 513-521. Ciudad Real: SEIEM.
- Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2012). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. *PNA*, Vol 6 (3), pp. 105-114.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.
- Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Ed. Pirámide.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.