

DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

High school students' definitions and examples of independence and dependence on events

Megías, A. I.^a, Gea, M. M.^b y Batanero, C.^b

^aIES Martín García Ramos, ^bUniversidad de Granada

Resumen

El concepto de independencia estadística es fundamental para comprender el experimento compuesto y el muestreo; no obstante, la investigación realizada es muy escasa. Para complementarla, el objetivo de este estudio fue analizar las definiciones que proporcionan una muestra de 52 estudiantes de primer y segundo curso de Bachillerato de la dependencia e independencia de sucesos y los ejemplos que proponen de sucesos dependientes e independientes. Aunque la mayoría proporciona definiciones correctas, pocos son capaces de proponer ejemplos adecuados y el contexto de estos ejemplos se reduce en gran medida a los juegos de azar. No obstante, se observa mejor desempeño en los estudiantes de segundo curso.

Palabras clave: *dependencia e independencia, definición, ejemplo, estudiantes de Bachillerato.*

Abstract

The concept of statistical independence is fundamental to understand compound experiments and sampling; nevertheless, the research carried out is very scarce. To complement this research, this study was aimed to analyse the definitions and examples of dependence and independence of events provided by a sample of 52 1st and 2nd year high school students. Although most of them provide correct definitions, few are able to propose suitable examples and the context of these examples is greatly reduced to games of chance. However, better performance is observed in the 2nd year students.

Keywords: *dependence and independence, definition, example, high school students.*

INTRODUCCIÓN

La probabilidad es, en la actualidad, un contenido importante en el currículo. La identificación, estimación y cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso se introduce en Educación Primaria (MECD, 2014), siendo en cuarto curso de Educación Secundaria cuando se introducen la independencia y dependencia de sucesos, que se tratan también de manera informal en cursos previos (Fernandes, Correia y Contreras, 2013), y cuya comprensión es necesaria en el estudio de la correlación y regresión que se realiza en el primer curso de Bachillerato, junto a los teoremas de la probabilidad total y de Bayes introducidos en el segundo curso de Bachillerato de ambas especialidades. También se requiere en el estudio de la inferencia estadística, introducida en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales en segundo curso de Bachillerato (MECD, 2015).

A pesar de la importancia del tema en la formación de nuestros estudiantes, no siempre se dedica el tiempo suficiente a su enseñanza y la escasa investigación previa indica que los estudiantes finalizan sus estudios con errores y sesgos de razonamiento (Borovcnik, 2012), entre los que destacamos la representatividad o la recencia positiva y negativa (Sánchez y Valdez, 2015). Dicha investigación está generalmente basada en la respuesta a preguntas de opción múltiple, donde los

estudiantes deciden si dos sucesos concretos son o no independientes, por lo que los resultados podrían variar al realizar un estudio con preguntas de respuesta abierta. Para aportar información sobre este tema, el objetivo de este trabajo es analizar las definiciones que los estudiantes de Bachillerato proporcionan y los ejemplos que proponen sobre la independencia y dependencia de sucesos. En lo que sigue se describen los fundamentos y métodos utilizados, se presentan y discuten los resultados y se finaliza con algunas conclusiones.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El interés de que un estudiante sea capaz de proporcionar una definición adecuada de los conceptos que estudia fue resaltado por Zazkis y Leikin (2008), pues una definición adecuada, incluso usando un vocabulario informal, muestra la comprensión de un concepto. Vinner (1991) indicó que las definiciones de los conceptos en el currículo y los libros de texto determinan el conjunto de propiedades que se incluirán en la enseñanza y modelan la imagen del concepto que crean los estudiantes. Para enunciar correctamente una definición, según Leikin y Winicki-Landman (2001), además de nombrar los conceptos implicados en la misma y que previamente se encuentran definidos, se deben establecer sus condiciones necesarias y suficientes. Desde el punto de vista matemático, definir supone dar un nombre a un objeto que previamente existía y estaba caracterizado por unas propiedades. Así, en la enseñanza, la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997).

Aunque definir un concepto pueda parecer una actividad sencilla, en una investigación previa, donde se pidió definir la probabilidad simple y condicional a una muestra de profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas, 2013), se observaron errores o imprecisiones en ambas definiciones en el 25% de la muestra, lo que nos ha llevado a realizar este trabajo, donde también se solicitan ejemplos, pues la comprensión de una definición se manifiesta implícitamente cuando esta se aplica.

Nos centramos en el concepto de independencia, que es aparentemente sencillo, pero, tanto en la historia de la probabilidad como en la resolución de problemas por parte de los estudiantes, se han descrito numerosas dificultades (Borovcnik, 2012; Huerta y Arnau, 2017). La independencia está ligada a la probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si y sólo si la probabilidad de uno de ellos no cambia si se condiciona por el otro; es decir, dos sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A|B)=P(A)$ o $P(B|A)=P(B)$; o lo que es lo mismo, $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$.

Algunas investigaciones muestran errores en la aplicación de la dependencia e independencia de sucesos aleatorios como la investigación de Sánchez (1996) con 88 profesores de matemáticas en secundaria. Algunos de los participantes confundieron los sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes y otros participantes creían que para que dos sucesos sean independientes tienen que pertenecer a experimentos aleatorios diferentes, aunque esto no es necesario.

En un trabajo más reciente, D'Amelio (2004) propuso un problema sobre independencia a estudiantes universitarios en una carrera de humanidades, encontrando estudiantes que usaban la regla de adición de probabilidades, en lugar de utilizar la regla de la multiplicación, para probar la independencia de dos sucesos. Como en investigaciones previas, estos estudiantes confundían los sucesos mutuamente excluyentes e independientes. Resultados muy similares fueron obtenidos en las investigaciones de Cordani y Wechsler (2006).

Los anteriores estudios de evaluación se realizan utilizando preguntas de opción múltiple, donde las posibles respuestas del estudiante están fijadas de antemano. Un tipo de investigación que permite profundizar mejor en la comprensión de estos conceptos es realizado por Kataoka, Hernandez y Borim (2010), con 34 alumnos de máster, 22 de grado y 27 de secundaria, a los que piden explicar el significado de un suceso independiente. También dio a los estudiantes ejemplos de sucesos obtenidos en experimentos de lanzamientos de dados, en los que el estudiante tenía que decidir si

eran o no independientes. Fue frecuente que los estudiantes asociaran la independencia al hecho de que los experimentos fuesen sucesivos (y no simultáneos); igualmente, muchos no diferenciaron entre independencia y sucesos mutuamente excluyentes.

Nuestro trabajo utiliza preguntas abiertas; en concreto, se pide definir la dependencia e independencia de sucesos y proporcionar ejemplos de los mismos. Con ello se completan las investigaciones anteriores y la desarrollada por Contreras et al. (2013) en una muestra de futuros profesores.

METODOLOGÍA

La muestra estuvo formada por 52 estudiantes, 21 de primer curso y 31 de segundo curso de Bachillerato, que realizaban sus estudios en tres centros distintos de la provincia de Málaga, uno privado y los otros dos públicos. El motivo de elegir estudiantes de Bachillerato fue tomar cursos en los que se había dado el tema de probabilidad en cursos previos, hecho que se validó con el profesor de cada centro, y además, que tuviesen la madurez suficiente para dar una definición sobre dependencia e independencia de sucesos aleatorios. Las edades de los estudiantes se encuentran entre los 16 y 19 años, la mayoría de 17 y 18. Aunque la muestra es intencional y reducida, porque los centros públicos se encuentran en un pueblo de la provincia con pocos estudiantes en Bachillerato, el escaso tamaño de muestra se compensa con el profundo análisis de las respuestas de los participantes.

La tarea propuesta a estos estudiantes se presenta en la Figura 1 y es similar a la utilizada por Contreras et al. (2013) aunque, en su caso, se pregunta por la probabilidad simple y condicional y no por la independencia o dependencia.

1. Explica con tus propias palabras la diferencia entre dos sucesos independientes y dos sucesos dependientes.
2. Pon un ejemplo de dos sucesos que sean independientes y otro ejemplo de dos sucesos que sean dependientes.

Figura 1. Tarea propuesta a los estudiantes

La tarea se realizó por escrito, de forma individual y habiendo estudiado el bloque de contenidos de estadística y probabilidad del curso 2016/17 en cada centro participante. Se trata de un estudio descriptivo, esencialmente exploratorio, y para clasificar las respuestas se utiliza el análisis de contenido, que es un estudio sistemático de documentos que permite identificar variables y categorías en los mismos para realizar inferencias (Sandín, 2003). En nuestro caso, las respuestas se clasifican en categorías, que parten de las determinadas en Contreras et al. (2013), y los códigos se asignan a las categorías mediante varias revisiones y comparaciones, siguiendo el proceso cíclico típico de la investigación cualitativa (Sandín, 2003). A continuación, se presentan y discuten los resultados.

TIPOS DE DEFINICIONES

En primer lugar, se clasificaron las definiciones aportadas por los estudiantes, diferenciando las respuestas dadas para sucesos dependientes e independientes. Para considerar la definición correcta, según Leikin y Winicki-Landman (2001), se comprobó que el estudiante incluyese las condiciones necesarias y suficientes para la dependencia o independencia, además de incluir otros conceptos previamente definidos. En el siguiente ejemplo, el estudiante define correctamente tanto la independencia como la dependencia entre sucesos, pues explica una condición necesaria y suficiente, que consiste en que, en el caso de dependencia de un suceso, su probabilidad incluye la de obtener el otro, que cambia como consecuencia de ello y en el caso de independencia, no existe esta influencia. Además, el estudiante incluye en la definición otros conceptos previos como suceso y probabilidad:

Dos sucesos dependientes son aquellos donde la probabilidad de que uno suceda influye en la probabilidad de que el otro suceda; sin embargo, en dos sucesos independientes, uno no influye en el otro para nada (E1).

Hemos considerado que la definición aportada por el estudiante es imprecisa cuando cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001), al incluir condiciones necesarias o suficientes para definir la dependencia e independencia, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias. Un ejemplo se muestra a continuación, donde aparentemente el estudiante comprende el suceso e incluye una condición necesaria de la dependencia (la influencia del otro suceso), pero el vocabulario usado es muy pobre y no se llega a aludir a la probabilidad, que es lo que cambia en el caso de la definición de dependencia; en la definición de independencia no se indica que el cambio de la probabilidad condicionada se produce al incluir el suceso en la condición:

Dos sucesos independientes son aquellos en los que en la probabilidad condicionada no cambian son iguales, da lo mismo. En cambio, dos sucesos dependientes dependen cada uno de ellos y si se hace algo cambia (E2).

Otro ejemplo de definición imprecisa de independencia es el que sigue. El estudiante indica que los sucesos no tienen relación (lo que es una condición suficiente), pero ha añadido una característica que no es cierta, puesto que la dependencia de dos sucesos, en general, no se deduce del enunciado de un problema; por otro lado, no se indica qué se entiende por relación entre los sucesos:

Los dos sucesos independientes no tienen una real relación entre ambos y para comparar no se puede sacar únicamente por el enunciado (E3).

La definición sería incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes o se confunden conceptos implicados en las mismas. Un ejemplo de definición incorrecta de dependencia e independencia se reproduce a continuación, donde se comete un error al aplicar la fórmula del producto para dar la definición. El estudiante indica que, en el caso de sucesos independientes, la probabilidad de la unión es igual a la probabilidad del suceso; sin embargo, la condición que se cumpliría en este supuesto es que la probabilidad condicionada sería igual a la probabilidad simple o bien que la probabilidad de la intersección sería igual al producto de probabilidades. Esta confusión en el uso de la regla del producto y la regla de la suma al definir la independencia de sucesos fue también encontrada entre estudiantes universitarios en la investigación de D'Amelio (2004):

Los sucesos son independientes cuando al realizar $P(A \cup B)$, el resultado es igual a $P(B)$. Por el contrario, dos sucesos son dependientes cuando $P(A \cup B) \neq P(B)$ (E4).

Los resultados obtenidos en la definición de la dependencia de sucesos se presentan en la Tabla 1, en la que se observa que la mayor proporción de estudiantes ofrecen definiciones correctas (38,5%), a lo que podemos añadir otro 17,3% que da una definición básicamente correcta, aunque imprecisa. Por otro lado, el 23,1% responden incorrectamente y el 21,1% no es capaz de proporcionar una definición, por lo cual, sumados estos dos porcentajes, los resultados son bastante peores que los reportados por Contreras et al. (2013) en la definición de probabilidad condicional; aunque ello es lógico, teniendo en cuenta que dicha muestra estuvo constituida por futuros profesores. Nuestros resultados indican la necesidad de reforzar el concepto, puesto que casi la mitad de los estudiantes de Bachillerato de la muestra no es capaz de definirlo, ni siquiera en forma imprecisa.

Tabla 1. Frecuencia de tipo de definición de suceso dependiente por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Correctas	4	16	20
Correcta pero imprecisa	4	5	9
Incorrecta	5	7	12
Blanco	8	3	11
Total	21	31	52

Completamos estos resultados con la Figura 2, que permite comparar más fácilmente los porcentajes obtenidos en los dos grupos de estudiantes y observar el mejor desempeño de los estudiantes de segundo curso, donde más de la mitad da una definición correcta que, sumadas a las que contienen una pequeña imprecisión, se acercan al 68%, muy cerca de los resultados de Contreras et al. (2013) con futuros profesores. Los estudiantes de primer curso destacan por la alta proporción de aquellos que no son capaces de dar una definición (38,1%), mostrando menor conocimiento del tema.

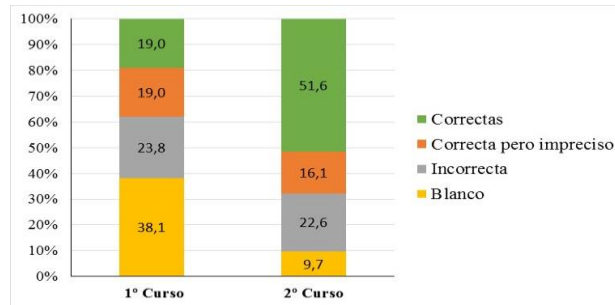


Figura 2. Porcentaje de tipo de definición de sucesos dependientes por curso

La Tabla 2 refleja los resultados obtenidos para las definiciones de sucesos independientes, que son en su mayoría correctas (55,8%). En cuanto a las respuestas correctas pero imprecisas, representan el 11,5% y las incorrectas el 13,5% siendo el porcentaje más bajo que en la definición de dependencia. Por último, han contestado en blanco un 19,2%; sin embargo, hacemos notar que no hemos encontrado en las definiciones la confusión entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes que Cordani y Wechsler (2006), D’Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) describen en sus investigaciones. Interpretamos este hecho porque nosotros hemos pedido al estudiante dar la definición, mientras que en dichas investigaciones se propusieron ejemplos de sucesos independientes y mutuamente excluyentes que los estudiantes no discriminaron. Por el contrario, sí se ha confirmado la confusión entre la necesidad de que se cumpla la regla del producto y la regla de la suma en la definición de la independencia descrita por D’Amelio (2004), aunque esto ocurre en casos muy aislados.

Tabla 2. Frecuencia de tipos de definición de suceso independiente por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Correctas	7	22	29
Correcta pero imprecisa	3	3	6
Incorrecta	3	4	7
Blanco	8	2	10
Total	21	31	52

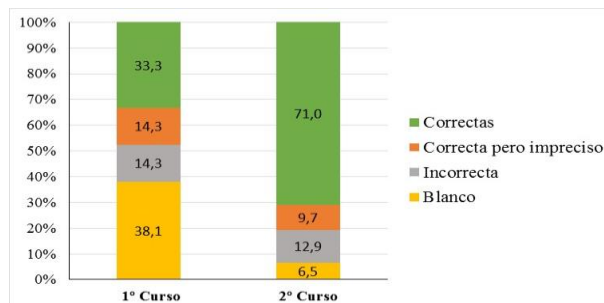


Figura 3. Porcentaje de tipos de definición de sucesos independientes por curso

Igual que en la definición de sucesos dependientes, los resultados son mucho mejores en el segundo curso (Figura 3), hasta el punto que el 71% de las definiciones dadas por estos alumnos son correctas frente a sólo el 33% en los estudiantes de primero, lo que confirma el mejor conocimiento,

a la vez que madurez, de los segundos. Además, estos apenas dejan las definiciones en blanco, lo que contrasta con el alto porcentaje de sus compañeros de primero (38,1%) que no llegan a dar la definición.

EJEMPLOS PROPORCIONADOS POR LOS ESTUDIANTES

En la segunda tarea propuesta se pidió a los estudiantes proporcionar un ejemplo de sucesos dependientes e independientes, tanto para comprobar si realmente han comprendido el concepto o simplemente reproducen la definición y si analizan la fenomenología que les asocian. Aunque se pidió un ejemplo, algunos estudiantes dieron dos, que se han clasificado, dependiendo de si al ejemplo se aplica o no el concepto y cómo se aplica, en correctos, incorrectos (según sea uno o los dos ejemplos incorrectos) e imprecisos (correctos pero al menos uno de ellos es impreciso). Además, se ha hecho una clasificación paralela de los ejemplos para estudiar el contexto en que se proponen, que puede ser los juegos de azar o alguno de los contextos considerados en el informe PISA (ME, 2009).

Ejemplos de sucesos dependientes

El ejemplo proporcionado se considera correcto cuando se puede aplicar el concepto de dependencia en dicho ejemplo, de modo que la probabilidad de cada uno de los sucesos descritos depende del otro suceso. Así, en el siguiente ejemplo, el estudiante proporciona de manera correcta dos situaciones en que se produce la dependencia de sucesos, extraídos de su experiencia personal:

Dependientes es, por ejemplo, si en la casa hay dos comidas y mi hermana elige una, yo me tengo que comer la otra, dependiendo de lo que ella elige.

Si mi amigo va a una fiesta iré y si ella no va no iré; depende de lo que ella diga (E5).

En el siguiente ejemplo se muestra la respuesta de un estudiante que proporciona un ejemplo incorrecto de sucesos dependientes, pues los sucesos propuestos (ser rey y ser espadas) son independientes, ya que la probabilidad del suceso “rey de espadas” es igual a $1/40$ que es el producto de la probabilidad “ser rey ($1/4$)” y “ser espada ($1/10$)”. Este ejemplo es precisamente el utilizado por Sánchez (1996) en su cuestionario en un ítem de respuesta cerrada y, la respuesta de este estudiante, que ha proporcionado espontáneamente este ejemplo, indica que confunde independencia y ser sucesos mutuamente excluyentes:

Dependientes: Que salga el rey al coger una carta de la baraja y que sea de espadas (E6).

Otro estudiante ha respondido de forma incorrecta en el primero de los dos ejemplos dados sobre sucesos dependientes ya que, generalmente, aprobar un examen no depende de otro. El segundo ejemplo sería una respuesta correcta pero imprecisa, pues en caso de lluvia sería más probable resbalar o tener un accidente similar, aunque el estudiante no lo indica.

Dependientes: Aprobar un examen habiendo aprobado otro anteriormente. Romperse una pierna según la probabilidad de que llueva (E7).

El siguiente ejemplo proporcionado por un estudiante es impreciso, pues no indica si el experimento se hace con o sin reemplazamiento; si hubiese sido con reemplazamiento sería independiente:

Dependiente: Sabiendo que ha salido bola blanca, la probabilidad de que la segunda sea verde (E8).

El 26,9% de los estudiantes sugieren dos ejemplos correctos y sólo un estudiante da ejemplos correctos pero imprecisos (1,9%). El porcentaje de los que dan solo un ejemplo correcto es un 7,7% y aunque las repuestas incorrectas son sólo un 11,5%, podemos apreciar que hay mayoría de respuestas en blanco con un porcentaje del 51,9%, confirmando que es más difícil dar un ejemplo correcto que la definición del concepto. Al comparar los cursos, los de segundo curso, en mayor porcentaje, proporcionan dos respuestas correctas y hay un menor porcentaje de respuestas en blanco.

Tabla 3. Frecuencia de número y tipo de ejemplos de sucesos dependientes por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Dos ejemplos correctos	3	11	14
Correctos pero imprecisos	0	1	1
Un sólo ejemplo correcto	2	2	4
Dos ejemplos incorrectos	1	5	6
Blanco	15	12	27
Total	21	31	52

Ejemplos de sucesos independientes

Como en el caso de sucesos dependientes, se clasificaron los ejemplos según se aportasen dos ejemplos correctos, correctos pero alguno de ellos con alguna imprecisión, uno solo correcto o todos incorrectos o en blanco. A continuación, se muestran los ejemplos de dos estudiantes, ambos correctos, el primero de ellos proporcionado desde la experiencia personal:

Independiente es, por ejemplo, que mi hermana vaya al cine y yo a la biblioteca (E5).

Independiente: Sabiendo que a Juan le gusta el verde, la probabilidad que haga sol mañana (E8).

Tabla 4. Frecuencia de número y tipo de ejemplos de sucesos independientes por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Dos ejemplos correctos	4	12	16
Correctos pero imprecisos	0	2	2
Un sólo ejemplo correcto	1	1	2
Dos ejemplos incorrectos	4	3	7
Blanco	12	13	25
Total	21	31	52

Observando la Tabla 4 podemos afirmar que el porcentaje de ejemplos correctos es del 30,8%, de correctas pero imprecisas es un 3,8%, coincidiendo este porcentaje con el de respuestas en las que tan solo hay un ejemplo correcto. En cuanto a respuestas incorrectas, el porcentaje es de 13,5% y destacamos el elevado número de respuestas en blanco (48,1%). En la Figura 4 se resumen los datos obtenidos a partir de las Tablas 3 y 4, confirmando la elevada ausencia de respuesta en los ejemplos de sucesos dependientes e independientes. Añadimos que los ejemplos de sucesos independientes y los ejemplos de probabilidad condicionada tienen el porcentaje más alto de respuestas incorrectas.

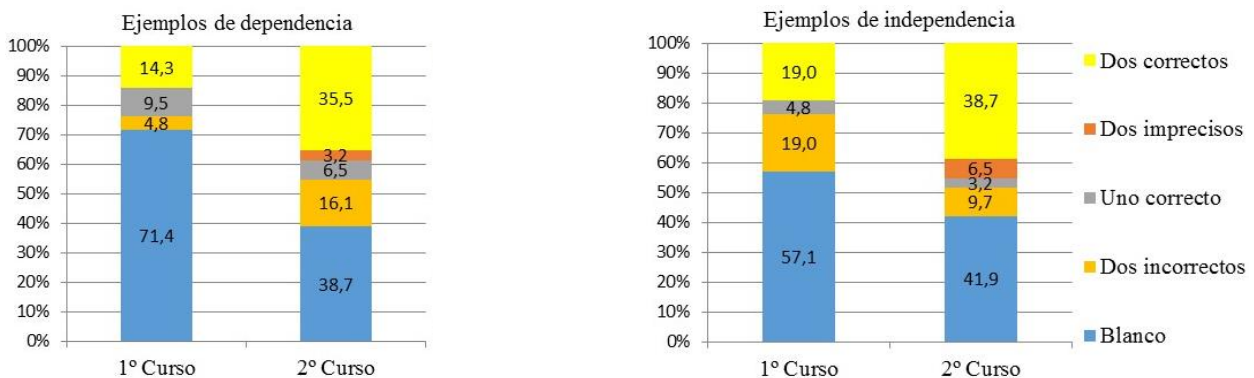


Figura 4. Porcentaje de tipo y número de ejemplos por curso

Contextos propuestos en los ejemplos

Se han analizado los contextos en las respuestas de los estudiantes según los recogidos en las pruebas de evaluación PISA, organizadas por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) (ME, 2009). En dichas pruebas participan estudiantes de secundaria (15

años) de 65 países, incluida España; por lo tanto, sería deseable que los contextos sugeridos en PISA se muestren en los ejemplos que proponen. Los contextos considerados han sido: personal, profesional, social y científico. Se añade el de juego de azar por su peso en el cálculo de probabilidades. A continuación, se presenta cada uno de los contextos junto a un ejemplo extraído de las respuestas.

- **Situación personal:** Son problemas relacionados con las actividades del día a día del propio individuo, su familia y su grupo de iguales. Como ejemplo, podría ser la práctica de deporte, familia, juegos, salud o transporte personal, deportes, o viajes. Así, el siguiente ejemplo se ha clasificado en esta categoría, pues pertenece a la vida personal del estudiante (aprobar una asignatura es algo que le concierne directamente).

Probabilidad de aprobar una asignatura según la nota sacada en los exámenes (E9).

- **Situación profesional:** Son problemas que se centran en el mundo laboral que el estudiante encontrará en el futuro o que conoce por sus familiares o maestros. Se trata de problemas sobre medida, control o coste de un proceso de producción o una construcción, sobre diseño en carpintería, arquitectura o jardinería; coste o salario de mano de obra, etc. El ejemplo que reproducimos en lo que sigue pertenece a un estudio de mercado y de producción que se usa en las empresas para saber si un producto tendrá o no el éxito de venta que se pretende.

Que se venda un producto depende del precio (E10).

- **Situación Social:** En este caso, se incluyen los problemas que el estudiante podría encontrar en su comunidad más amplia que la familiar (comunidad de vecinos, ayuntamiento o ciudad, su país, etc.). El siguiente ejemplo es uno de los más frecuentes en el contexto social. Cuando una pareja está esperando un hijo, todos quieren saber el género del bebé, y antes de ir a la consulta suelen hacer predicciones sobre el género del niño que se espera.

Probabilidad de que sea niña si se tiene un niño (E11).

- **Situación Científica:** Los problemas clasificados en esta categoría están relacionados con la aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología. Algunos problemas relacionados con la ciencia tratan de la meteorología, ecología, medicina, genética, o física. Esta situación es más abstracta que el resto, ya que implica la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema matemático.

Cuando veo el tiempo y sé que va a llover cojo el paraguas (E13).

- **Juegos de azar:** Hemos separado en este contexto los juegos de azar como la lotería, los juegos de cartas, experimentos con bolas en urnas, etc., y otros juegos que aparecen en los medios de comunicación. Por un lado, son muy frecuentes en los libros de texto, pues tienen espacios muestrales finitos y permiten aplicar en forma sencilla la probabilidad. Por otro, es el contexto en que se originó históricamente el cálculo de probabilidades (Batanero, Henry y Parzys, 2005). Los dos siguientes ejemplos son de sucesos dependientes e independientes usando bolas de colores.

Independencia: Sacar bola roja y bola azul sabiendo que hay 5 bolas rojas y 5 azules en una urna.

Dependencia: Sacar bola azul sacado previamente bola roja (E12).

En la Tabla 5 se muestra el número total de ejemplos propuestos en cada contexto. Como se puede observar, el 34,6% de los ejemplos dados está relacionados con juegos de azar, ocupando el porcentaje más alto de respuestas. El porcentaje de respuestas dadas en el contexto personal es del 27,5% y el más bajo corresponde al contexto profesional, al que le pertenece un porcentaje del 9,1%. Los ejemplos en contexto social y científico están aproximados (15,6% y 13%, respectivamente).

Tabla 5. Frecuencia de ejemplos propuestos en cada contexto

	1º Curso	2º Curso	Total
Juegos de azar	15	20	35
Personal	9	18	27
Profesional	0	9	9
Social	2	13	15
Científico	1	12	13
Total	27	72	99

En la Figura 4 presentamos los porcentajes de los contextos usados por curso, donde vemos algunas diferencias importantes. Aunque en ambos cursos los contextos más usados han sido los juegos de azar y personal, aparecen en mayor proporción en el primer curso (33,3%), en particular, los juegos de azar (55,6%). El contexto profesional sólo aparece en segundo curso, donde son mucho más frecuentes los contextos social y científico; de lo que se deduce que estos estudiantes comprenden mejor las aplicaciones del tema a diversas áreas fuera de los juegos de azar.

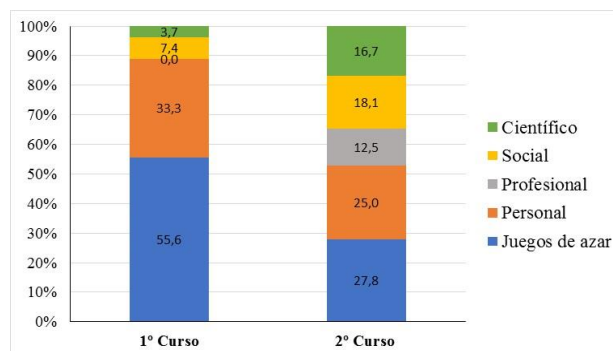


Figura 5. Porcentaje de contextos en los ejemplos propuestos en cada curso

CONCLUSIONES

El trabajo muestra mejores resultados en los estudiantes de segundo curso de Bachillerato, que en su mayoría fueron capaces de proporcionar definiciones correctas de la dependencia e independencia de sucesos y ejemplos pertinentes de estos conceptos en contextos variados. No obstante, es todavía alta la proporción de estudiantes, y especialmente en primer curso, que falla en las tareas propuestas.

La principal razón de proporcionar una definición incorrecta fue añadir condiciones innecesarias que reflejan sus sesgos de razonamiento, en forma similar a otras investigaciones, como las de Contreras et al. (2013). Aunque el principal sesgo de confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes citado por Cordani y Wechsler (2006), D'Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) no se refleja explícitamente en las definiciones, sí aparece dicho sesgo en casos aislados en los ejemplos proporcionados de sucesos independientes. Es preocupante la proporción de estudiantes que es incapaz de dar un ejemplo, incluso cuando proporcionan una definición del concepto. Por otro lado, sobre todo en primer curso, apenas se citan contextos diferentes a los juegos de azar.

Estos resultados, aunque no son generalizables por el escaso tamaño de muestra, pueden orientar la acción del profesor para mejorar el aprendizaje de estos conceptos, donde sería necesario que el estudiante adquiriese una definición correcta, que pueda apreciar sus aplicaciones en diferentes contextos, más allá de los juegos de azar y sea capaz de explicarla según las condiciones necesarias y suficientes que la determinan.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM
- Cordani, L. K. y Wechsler, S. (2006). Teaching independence and exchangeability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Brasil): International Association for Statistics Education. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/icots7/3I1_CORD.pdf
- D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 138-144). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Fernandes, J. A., Correia, P. F. y Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5-26.
- Huerta, P. H. y Arnau, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87-106.
- Kataoka, V., Hernandez, H. y Borim, C. (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics*. Lubjana: International Statistical Institute. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C132_KATAOKA.pdf
- Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 62-73.
- Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Ministerio de Educación. (2009). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de alumnos de la OCDE. Informe español*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México: Cinvestav.
- Sánchez, E. y Valdez, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131.148.