QUÉ ELEMENTOS MATEMÁTICOS IDENTIFICAN LOS FUTUROS PROFESORES EN LAS RESOLUCIONES DE ESTUDIANTES A UN PROBLEMA DE COMPARACIÓN DE RAZONES

What mathematical elements are identified by prospective teachers in students' resolutions to a ratio comparison problem

Monje, J.[a], Pérez-Tyteca, P.[a] y Fernández, C.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es examinar qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores de secundaria en las resoluciones de los estudiantes en un problema de comparación de razones, usando como guía un documento teórico sobre un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. 18 futuros profesores de matemáticas participaron en una tarea profesional donde tenían que interpretar respuestas de estudiantes con diferente nivel de comprensión a un problema de comparación de razones sobre ofertas utilizando como guía un modelo de progresión sobre el aprendizaje de este contenido. Los resultados indican que la capacidad de identificar los elementos matemáticos dependió de los elementos implicados en ellas, teniendo mayor dificultad en las resoluciones más conceptuales.

Palabras clave: *mirada profesional, futuros profesores de matemáticas, razón, comparaciones relativas.*

Abstract

The aim of this study is to examine what mathematical elements do prospective secondary school teachers identify in students' resolutions to a ratio comparison problem using as a guide a theoretical document on a progression model in the learning of the comparison of ratios. 18 prospective mathematics teachers took part in a professional task where they had to interpret students' answers with different level of comprehension to a problem of ratio comparison about offers using as a guide a students' learning progression model of this content. The results indicate that the ability to identify the mathematical elements in the resolutions depended on the mathematical elements involved in them, having major difficulty in the most conceptual resolutions.

Keywords: *professional noticing, prospective mathematic teachers, ratio, relative comparisons.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han destacado la importancia de que los profesores adquieran la competencia docente mirar profesionalmente, para aprender a identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, analizar estos aspectos y usar este análisis para tomar decisiones informadas. Esto es, que desarrollen destrezas para analizar la práctica de forma sistemática (van Es y Sherin, 2002). Esto les ayudará a estar mejor preparados para buscar propuestas de acción con el propósito de que los estudiantes progresen en el aprendizaje.

Concretamente, en el área de matemáticas, y poniendo el foco sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, la idea que subyace es que la actividad de comprender y analizar el pensamiento

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Fernández, C. (2018). Qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores en las resoluciones de estudiantes a un problema de comparación de razones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 358-367). Gijón: SEIEM.

matemático de los estudiantes es un proceso de “reconstrucción e inferencia” de la comprensión a partir de la interpretación de lo que el estudiante escribe, dice, o hace. De esta manera, la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica dar sentido a las producciones de los estudiantes yendo más allá de indicar solo lo que es erróneo en su respuesta. Requiere ser capaz de determinar de qué modo las respuestas de los estudiantes son o no significativas desde el punto de vista del aprendizaje matemático (Hines y McMahon 2005; Wilson et al. 2013). De acuerdo con Jacobs, Lamb y Philipp (2010), esta competencia se caracteriza mediante tres destrezas: (a) identificar en las producciones de los estudiantes los elementos matemáticos importantes; (b) interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados; y (c) tomar decisiones basadas en dicha interpretación que permita el progreso conceptual del estudiante. Estos autores consideran que “existe una relación anidada entre las tres destrezas, de modo que decidir cómo responder en base a la comprensión de los estudiantes solo puede ocurrir si los profesores interpretan la comprensión de los estudiantes, y estas interpretaciones solo se pueden hacer si los profesores prestan atención a los detalles de las estrategias de los estudiantes” (p. 197). Así, es esencial que los futuros docentes y/o docentes en ejercicio, en primer lugar identifiquen los elementos matemáticos implicados en las producciones de sus estudiantes para así poder interpretar su comprensión y tomar decisiones que les ayuden a progresar en su aprendizaje.

Por otra parte, las investigaciones están mostrando que proporcionar a los estudiantes para maestro y profesor de matemáticas un marco de referencia, podría ayudarles a centrar su mirada hacia aspectos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes (Levin, Hammer y Coffey, 2009). En este sentido, proporcionarles un modelo de cómo los estudiantes de primaria o secundaria progresan en su aprendizaje en relación a los conceptos matemáticos puede dotarles de un lenguaje matemático para describir el pensamiento de estos y permitirles identificar los objetivos de aprendizaje, anticipar e interpretar el pensamiento matemático de sus estudiantes y dar respuesta con una instrucción apropiada a su progresión en el aprendizaje (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

El análisis de la adquisición por parte de los futuros profesores de secundaria de estas tres destrezas en los programas de formación constituye una importante línea de investigación dentro de la cual se han abordado diferentes dominios matemáticos: el concepto de límite de una función en un punto (Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo, 2018), la clasificación de cuadriláteros y el concepto de derivada (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018), ecuaciones (Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson, 2017), signo igual y equivalencia (van den Kieboom, Magiera y Moyer, 2017). Sin embargo, pocos estudios se han realizado con futuros profesores de secundaria (Nickerson, Lamb, y LaRochelle, 2017; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016) por la falta de artefactos (vídeos y repuestas de estudiantes de secundaria) y por la dificultad de encontrar modelos de progresión en el aprendizaje de los estudiantes de secundaria. Nuestro trabajo realiza un aporte en este sentido, al ser los participantes futuros profesores de secundaria y utilizar como guía para centrar la mirada de estos un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. Además, otro aporte relevante es la tarea profesional utilizada, ya que el problema en relación a la comparación de razones que aparece en la tarea profesional se presta a numerosas resoluciones teniendo en cuenta diferentes elementos matemáticos implicados en la comprensión de la comparación de razones. El objetivo de este estudio es examinar qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores de secundaria en las resoluciones de los estudiantes en un problema de comparación de razones, usando como guía un documento teórico sobre un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. Para la elaboración del documento teórico se ha llevado a cabo una revisión de los estudios previos realizados en el campo de la Didáctica de la Matemática en relación con el aprendizaje de los estudiantes de primaria y secundaria de la comparación de razones.

Revisión de estudios previos sobre comparación de razones

El término relativizar hace referencia a poner algo "en relación con" (Gómez y García, 2014), como expresión de una comparación multiplicativa. La comparación de dos cantidades multiplicativamente es uno de los modos de crear una razón (Lobato y Ellis, 2011). Una razón puede ser interna o externa según sea la naturaleza de las magnitudes implicadas en ella. La razón interna es una relación en una magnitud o sistema, mientras que la razón externa expresa una relación entre magnitudes o dos sistemas (Freudenthal, 1983). Así, de acuerdo con Vergnaud (1983), la diferencia entre ambos tipos de razones se sustenta en el carácter escalar o funcional de la relación multiplicativa entre las cantidades, según sea de un mismo espacio de medida o de dos espacios diferentes de medida respectivamente. En un mismo espacio de medida o conjunto, hay ciertas relaciones multiplicativas que comparan la medida de una parte del mismo con la medida de la otra parte (parte-parte) o que comparan la medida de un subconjunto con la medida del conjunto del cual es parte (parte-todo) (Lamon, 2012). Cuando esto ocurre podemos utilizar expresiones coloquiales como "de cada" o "por cada" que llaman a un razonamiento basado en los esquemas parte-todo o parte-parte. Por el contrario, las relaciones multiplicativas definidas entre elementos de conjuntos distintos, de acuerdo con Singer y Resnick (1992), no admiten esta clase de razonamientos, aunque admiten expresiones coloquiales como las anteriores.

Para favorecer la comparación de razones con referentes distintos resulta útil recurrir a la normalización (Gómez y García, 2014;). Normalizar es un proceso de "reconceptualización de un sistema en relación a una unidad fijada o estándar" (Lamon, 1994, p.94). Es, por tanto, un complejo de técnicas que permiten, mediante la transformación del referente, visualizar ciertas razones (Freudenthal, 1983). Existen, según Fernández (2009), dos maneras para normalizar razones, "una en la que se cambian los referentes mediante escalas de manera que las magnitudes o tamaños resulten normales o familiares y otra en la que se unifican los antecedentes o los consecuentes de las razones para favorecer la comparación" (p.52).

Fijando la atención en las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de razón y proporción, podemos identificar en investigaciones precedentes algunas estrategias correctas, como son la búsqueda de la razón unitaria, la estrategia de la fracción, el producto cruzado y la construcción progresiva (Fernández, 2009). También podemos identificar métodos para comparar razones, como el método unitario y el método del común múltiplo (Hoffer, 1988).

En Monje (2017) se analizaron las respuestas de 339 estudiantes a una tarea de comparación de razones con distinto referente, caracterizando las resoluciones atendiendo a criterios como la interpretación o no del descuento como una cantidad relativa (pensamiento relativo/ no relativo), la naturaleza de la relación multiplicativa empleada (uso de razón interna o externa), el esquema de pensamiento usado (parte-todo o parte-parte), la relación entre cantidades empleada para unificar los referentes (pago/compro; descuento/compro o descuento/pago) o la técnica de normalización empleada (uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva y sus métodos asociados para comparar razones: método de la unidad y método del común múltiplo). De este trabajo se desprende que existe una progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con distinto referente que queda recogida en la Tabla 1

Tabla 1. Modelo de Progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con distinto referente

Nivel 0. Incoherente En este nivel se incluyen las respuestas imprecisas o no identificadas, es decir, el estudiante no deja suficientes rastros para interpretar su resolución. También se incluyen aquellas respuestas en blanco o con anotaciones inconexas que carecen de sentido.
Nivel 1. Respuestas no relativas En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que no relativizan, o bien porque comparan diferencias de cantidades absolutas o bien porque se centran en una sólo en una parte de los datos.

Nivel 1. A. Comparan diferencias
Miran las diferencias entre cantidades de la misma variable, por ejemplo, el dinero que me ahorro en cada oferta o al hacer toda la compra o en un ítem, estas diferencias son las que compara para dar respuesta a la tarea.
Nivel 1. B. Ignoran parte de la información
Se centran sólo en una variable (como el número de ítems) ignorando el resto de información que aporta el enunciado o en aspectos afectivos o subjetivos para dar respuesta a la tarea.

Nivel 2. Tendencia relativa
En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que pese a interpretar el descuento como una cantidad relativa, no tienen éxito en su tentativa de comparar cantidades relativas. Tropiezan con dificultades ligadas al referente (del descuento o del pago) o a la elección de los ítems y/o precios.
Nivel 2. A. Dificultades con el referente
Cuando comparan cantidades relativas no se percatan de que la unidad de referencia del descuento es distinta, pierden de vista el conjunto total de ítems que intervienen en cada oferta.
Nivel 2. B. Dificultades en la elección de los ítems y/o precios
Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes para los que, o bien la elección inadecuada del número de ítems o bien la unificación de los precios, actúan como condicionantes en la comparación de los descuentos, lo que desvirtúa la ventaja de alguna oferta.

Nivel 3. Respuestas relativas
En este nivel los estudiantes interpretan el descuento como una cantidad relativa estableciendo comparaciones relativas exitosas.

Para organizar y categorizar las actuaciones de quienes interpretan el descuento como una cantidad relativa, atender además los siguientes elementos matemáticos:
- *Naturaleza de la relación multiplicativa empleada*: *Enfoque escalar* (uso de la razón interna) o *enfoque funcional* (uso de la razón externa)
- *Esquema de pensamiento* (en el enfoque escalar): *parte-todo y parte-parte*
- *Referentes. Presentación de la relación entre cantidades: pago/compro; descuento/compro o descuento/pago*
- *Técnica de normalización o algoritmos*: *uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva* y sus métodos asociados para comparar razones*: método de la unidad* y *método del común múltiplo*.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes (matemáticos, ingenieros y economistas) son 18 futuros profesores de matemáticas de educación secundaria que estaban matriculados en el Máster de Profesorado de Educación Secundaria en el curso 2017/2018 en la Universidad de Alicante. Estos futuros profesores estaban cursando una asignatura sobre el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria que constaba de diferentes módulos. En uno de estos módulos, que consta de 8 sesiones de 2 horas, se aborda el desarrollo del razonamiento proporcional. Como parte de este módulo, los futuros profesores participaron en una tarea profesional sobre comparación de razones (instrumento de recogida de datos).

Tarea profesional

La tarea constaba de un problema de comparación de razones, extraído de Monje (2017) en la que se mostraban tres ofertas comerciales con los descuentos normalizados de manera diferente y con distinto referente en la que había que determinar qué descuento es mejor (Figura 1).

Figura 1. Tarea de comparación de razones

Además, se mostraban 9 resoluciones de diferentes estudiantes al problema, que reflejaban diferentes características de la comprensión (diferentes niveles de progresión) (Figura 2). La segunda es una respuesta no relativa, la primera, tercera, octava y novena son respuestas relativas y de la cuarta a la séptima son de tendencia relativa.

Para cada una de ellas los futuros profesores debían responder a las siguientes cuestiones en relación a las destrezas de la competencia mirar profesionalmente:

1. *Analiza cada una de las actuaciones de los diferentes estudiantes atendiendo a los niveles del documento teórico. Justifica el nivel indicando los conceptos y elementos matemáticos implicados.*
2. *Si fueras el profesor de cada uno de estos estudiantes, ante las respuestas no relativas y de tendencia relativa que has considerado, ¿qué tarea/s propondrías para que el estudiante progrese en su comprensión? Justifica tu respuesta.*

Para la resolución de la tarea profesional, los futuros profesores disponían de un documento teórico que recogía el modelo de la progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con referentes distintos adaptada de Monje (2017) (Tabla 1). Este documento no solo contenía el modelo de progresión sino actividades/problemas y ejemplos de respuestas que facilitaban su uso. Para que los futuros profesores se familiarizaran con él, el modelo de progresión se aplicó en diferentes contextos de comparación de razones previamente a la resolución de la tarea profesional. Además, antes de proporcionarles la tarea profesional, los futuros profesores habían resuelto el problema de comparación de razones.

Estudiante 1
Respuesta a la tarea.

En la oferta del "3x2": -100%→100:3=33,3% por botella
En la oferta de "-70% en la segunda unidad": -70%→ 70%:2 = 35%
En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio": -50%→ 50%:2 = 25%
El mayor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Estudiante 2
Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
(Precio: 5.58€)	(Precio: 9.74€)	(Precio: 9.74€)
5.58×3=16.76	9.74×2=19.48	9.74×2=19.48
3.72×3=11.16	9.74+2.84=12.58	9.74+4.87=14.61
16.76-11.16=5.6€ ahorro	19.48-12.58=6.9€ ahorro	19.48-14.61=4.87€ ahorro

El mayor ahorro se consigue con la oferta del "-70% en la segunda unidad"

Estudiante 3
Respuesta a la tarea.

Si la botella cuesta 10€.

- *"3x2" significa que te llevas 3 y pagas 2, es decir: 3 botellas por 20€, 6 botellas por 40€, 9 botellas por 60€, etc.*
- *"-70% en la segunda unidad", 70% de 10€ son 7€, entonces segunda botella (3€), entonces: 2 botellas por 13€, 4 botellas por 26€, 6 botellas por 39€, 8 botellas por 52€, etc.*
- *"2ª unidad al 50% de descuento (mitad de precio)", 50% de 10€ son 5€, entonces segunda botella (5€), entonces: 2 botellas por 15€, 4 botellas por 30€, 6 botellas por 45€, 8 botellas por 60€, etc.*

Entre la "3x2" y la 2ª a mitad de precio, mejor la "3x2", sin embargo, la mejor es la de "-70% en segunda unidad".

Estudiante 4
Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% en la segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×3=16.77	*→70%*	*→50%*
3.72×3=11.16		
16.77→100%		
11.16→66.54%		
33.45% de descuento		

El mejor descuento es -70% en la 2ª unidad porque en la primera oferta sólo es un 33% de descuento y en la tercera un 50%.

Estudiante 5
Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en cada una de las ofertas (5,58€), entonces:
En la oferta del "3x2" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 3,72€.
En la oferta del "-70%" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,27€.
En la oferta de la "segunda unidad a mitad de precio" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,65€.
Por tanto, el mejor descuento es el "3x2"

Estudiante 6
Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×2=11.16€	70% de 5.58€=3.906	50% de 9.74=4.87
11.16÷3=3.72€	5.58-3.906=1.674	9.74-4.87=4.87
3.72€/unidad	5.58+1.674=7.254	9.74+4.87=14.61
	7.254÷2=3.62 €/unidad	14.61÷2= 7.305€/unidad

El mejor descuento es "-70% en segunda unidad"

Estudiante 7
Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en las ofertas (20€)

En la oferta del "3x2", si me llevo 3 pago 40€.
En la oferta de "2ª unidad al -70%", pagamos 26€ y sólo me llevo 2.
En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio", pagamos 30€ y sólo me llevo 2.
El mejor descuento es el "3x2"

Estudiante 8
Respuesta a la tarea.

En el "3x2" te regalan 1 de 3 productos. Por cada 1 te descuentan ⅓
En " -70% en la 2ª unidad" te regalan 0.7 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0.35
En "segunda unidad a mitad de precio" te regalan 0.5 de 2 productos, por cada 1 te descuentan 0.25
Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta del -70% en la 2ªunidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.

Estudiante 9
Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{40}{60}$	$\frac{13}{20} \rightarrow \frac{39}{60}$	$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{45}{60}$

El mejor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Figura 2. Transcripciones presentadas en la tarea profesional

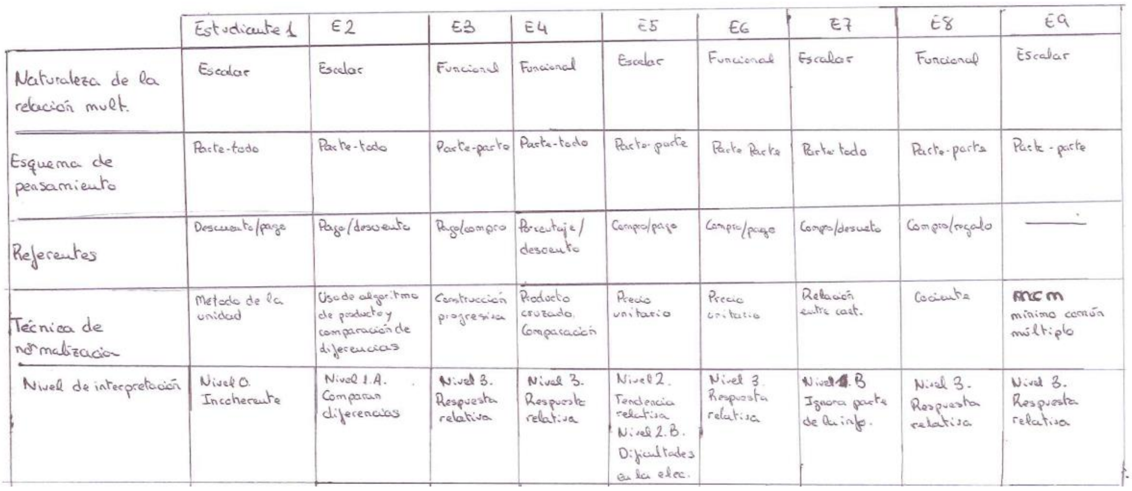
Análisis de datos

Los datos de este trabajo son las respuestas de los futuros profesores a la primera de las preguntas planteadas en la tarea profesional. Estos datos se han analizado siguiendo un procedimiento de carácter inductivo (Strauss y Corbin, 1994) en el que se han ido generando categorías a medida que se han ido analizando los datos, centrando nuestra atención en los elementos identificados por los futuros profesores en cada una de las resoluciones mostradas. Se ha procedido a triangular los análisis entre dos investigadores de modo que se han ido refinando las discrepancias en la clasificación. El análisis ha generado las siguientes categorías:

- Estudiantes que han realizado una identificación parcial: solo nombrando el elemento o reproduciendo retóricamente la información del documento teórico proporcionado sin aportar evidencias concretas de la respuesta.
- Estudiantes que han realizado una identificación completa aportando evidencias de las respuestas de los alumnos que justifican los elementos.
- Estudiantes que han identificado elementos solo en algunas resoluciones.
- Estudiantes que han identificado elementos en todas las resoluciones mostradas.

RESULTADOS

El análisis de los datos ha revelado que casi la totalidad de los estudiantes para profesor (17 de los 18 participantes) sólo han identificado elementos matemáticos en algunas de las resoluciones, no siendo capaces de hacerlo en los nueve casos. Sólo un estudiante ha identificado elementos en todas las resoluciones. Este resultado indica que la destreza de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes en el problema de comparación de razones fue difícil para los futuros profesores y dependió de los elementos matemáticos implicados en las respuestas.

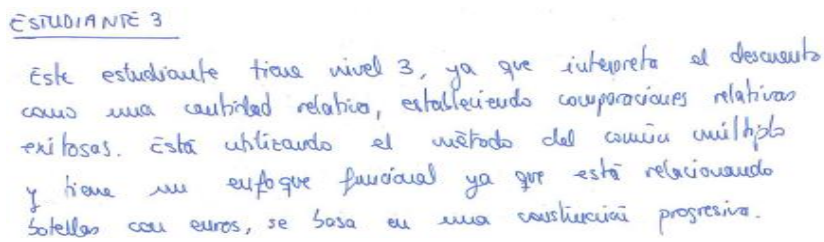


	Estudiante 1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Naturaleza de la relación mult.	Escalar	Escalar	Funcional	Funcional	Escalar	Funcional	Escalar	Funcional	Escalar
Esquema de pensamiento	Parte-todo	Parte-todo	Parte-parte	Parte-todo	Parte-parte	Parte Parte	Parte todo	Parte-parte	Parte - parte
Referentes	Descuento/pago	Pago/descuento	Pago/compro	Porcentaje / descuento	Compro/pago	Compro/pago	Compro/descuento	Compro/regalo	———
Técnica de normalización	Metodo de la unidad	Uso de algoritmo de producto y comparación de diferencias	Construcción progresiva	Producto cruzado. Comparación	Precio unitario	Precio unitario	Relación entre cant.	Cociente	mcm mínimo común múltiplo
Nivel de interpretación	Nivel 0. Incoherente	Nivel 1.A. Comparan diferencias	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 2. Tendencia relativa Nivel 2.B. Dificultades en la elec.	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 1.B Ignora parte de la info.	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 3. Respuesta relativa

Figura 3. Respuesta del EP2

Cinco de los 18 futuros profesores únicamente identifican parcialmente los elementos; es decir, no aportan evidencias concretas que apoyen sus afirmaciones. Un ejemplo es el estudiante para profesor EP2 (Figura 3), que simplemente nombra, sin aportar evidencia alguna, los elementos matemáticos que considera implicados en cada resolución.

Los 13 futuros profesores restantes han identificado parcialmente los elementos en algunas resoluciones y en otras han hecho una identificación completa aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, el estudiante para profesor EP10 (Figura 4) muestra evidencias del elemento matemático *enfoque funcional* cuando escribe “tiene un enfoque funcional ya que está relacionando botellas con euros”, en cambio identifica parcialmente otros elementos cuando menciona *el método del común múltiplo* y la estrategia de *construcción progresiva* sin ofrecer argumentos que justifiquen su elección.

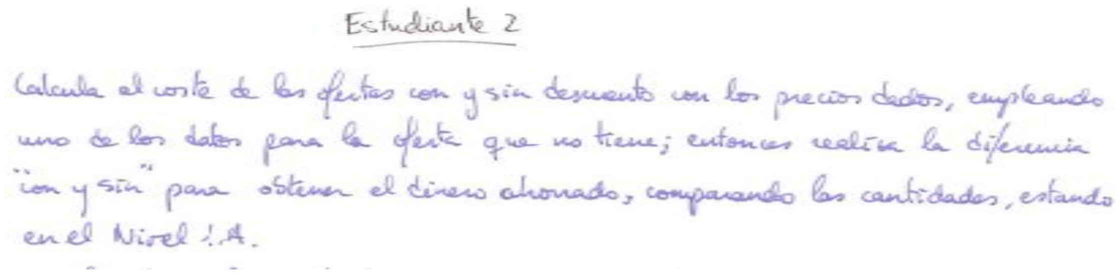


ESTUDIANTE 3

Este estudiante tiene nivel 3, ya que interpreta el descuento como una cantidad relativa, estableciendo comparaciones relativas exitosas. Está utilizando el método del común múltiplo y tiene un enfoque funcional ya que está relacionando botellas con euros, se basa en una construcción progresiva.

Figura 4. Fragmento de respuesta del EP10

Por otra parte, los futuros profesores tuvieron más dificultades en identificar los elementos matemáticos en algunas resoluciones. 11 de los 13 futuros profesores que han realizado identificaciones completas en algunas resoluciones, identifican los elementos en la respuesta no relativa (respuesta 2) aportando evidencias. Por ejemplo, el EP5 (Figura 5), identifica el elemento “Hallan diferencias o no relativiza” cuando explicita “calcula el coste de las ofertas con y sin descuento con los precios dados…entonces realiza la diferencia ‘con y sin’ para obtener el dinero ahorrado”, a su vez identifica la comparación de cantidades absolutas al señalar “comparando las cantidades” refiriéndose al dinero ahorrado.


Estudiante 2

Calcula el coste de las ofertas con y sin descuento con los precios dados, empleando uno de los datos para la oferta que no tiene; entonces realiza la diferencia "con y sin" para obtener el dinero ahorrado, comparando las cantidades, estando en el Nivel 1.A.

Figura 5. Fragmento de respuesta del EP5

Con respecto a las respuestas de tendencia relativa, únicamente dos futuros profesores han realizado identificaciones completas en las 4 resoluciones mostradas. Los 11 restantes- de los 13 que habían realizado identificaciones parciales y completas- aunque han realizado este tipo de identificación en alguna resolución de tendencia relativa, no han sido capaces de aportar evidencias en todas ellas. Por ejemplo, el estudiante EP7, al analizar la respuesta 5, evidencia el elemento *elección inadecuada de ítems* cuando afirma "al comparar descuentos de 3 ítems", en cambio, al analizar la respuesta 6, no nombra ninguno de los elementos matemáticos implicados.

De los 13 futuros profesores que han realizado alguna identificación completa, 7 lo han hecho en alguna respuesta relativa aunque sólo uno de ellos ha sido capaz de hacerlo para las 4 resoluciones mostradas. El estudiante para profesor EP15 aporta evidencias para alguna respuesta relativa pero no para otras. En el caso de la respuesta 1, identifica el elemento *enfoque funcional* poniendo la evidencia "ya que calcula la razón haciendo el cociente entre el descuento y las unidades de cada oferta". Sin embargo, para el caso de la respuesta 8 nombra los elementos: *enfoque escalar, relación parte-todo, método de la unidad* sin aportar evidencias.

Por tanto, los elementos que los futuros profesores han identificado de manera completa con mayor facilidad han sido: *hallan diferencias, comparan diferencias* – presentes en la respuesta no relativa – y *elección inadecuada de ítems, no unificación de precios, uso de referentes distintos* – implicados en las respuestas de tendencia relativa –.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es examinar qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores de secundaria en las resoluciones de los estudiantes en un problema de comparación de razones. En concreto se ha utilizado un problema de comparación de ofertas comerciales en las que aparecían razones con diferente normalización y distinto referente.

Los resultados muestran que ningún futuro profesor ha sido capaz de identificar todos los elementos matemáticos presentes en las resoluciones de los estudiantes, aportando evidencias que respalden sus argumentos. Sin embargo, 13 de los 18 futuros profesores participantes fueron capaces de identificar los elementos matemáticos de manera completa (aportando evidencias de las respuestas) en al menos una resolución. Este resultado es relevante, ya que estos futuros profesores comienzan a centrar su mirada hacia aspectos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, la tarea profesional utilizada (un problema y diferentes resoluciones de estudiantes de secundaria con distinto nivel en la progresión de la comprensión del concepto) y el modelo de progresión dado como guía (documento teórico) puede haber contribuido a la estructuración de la mirada profesional. Por tanto, nuestra investigación aporta información para el diseño de entornos de aprendizaje en los programas de formación que favorezcan el desarrollo de esta destreza (Kupra et al., 2017; Nickerson et al., 2017).

Además, aunque los datos obtenidos indican que la destreza de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes en el problema de comparación de razones fue difícil para los futuros profesores, el desarrollo de esta destreza dependió de los elementos matemáticos implicados en las respuestas. Así, los elementos matemáticos relacionados con un pensamiento no relativo son los que han resultado más fáciles de identificar, mostrando evidencias concretas, para los futuros profesores. Otros elementos presentes en las respuestas de tendencia relativa, como son *elección inadecuada de ítems, no unificación de precios* y *uso de referentes distintos* también han sido identificados con facilidad por la mayoría de los estudiantes, siendo capaces de mostrar evidencias concretas que los sustentan. Estos tres elementos caracterizan las dificultades de cuatro de las respuestas de tendencia relativa mostradas. Con relación a los elementos implicados en las respuestas relativas, estos han sido los más difíciles de identificar por los futuros profesores. En la mayoría de casos los futuros profesores hacen referencia únicamente a la descripción de la estrategia empleada sin profundizar en los elementos matemáticos implicados en ella. Este resultado parece estar indicando que las respuestas más conceptuales (respuestas que implican conocer la relación de las cantidades, el tipo de razón o el esquema de pensamiento) son las más difíciles de identificar por los futuros profesores. Esto puede ser debido a que los futuros profesores tienen un conocimiento más procedimental de los conceptos matemáticos implicados en el razonamiento proporcional (Buforn, Llinares y Fernández, 2018). Sin embargo, para poder desarrollar las destrezas implicadas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es necesario que los futuros profesores tengan un conocimiento conceptual de los elementos matemáticos implicados. Como trabajo futuro se pretende examinar la relación entre el conocimiento que tienen los futuros profesores sobre la comparación de razones (examinando las resoluciones de los futuros profesores al problema) y cómo identifican los elementos matemáticos implicados en las resoluciones.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada, en parte, con el apoyo del Proyecto EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y en parte, con el apoyo del proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación a la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 76*(23), 229-251.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias 36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matematica, 13*, 39-61.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods.* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Krupa, E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-72). London: Springer.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, N.Y: Sunny Press.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers, 3rd edition*. Nueva York: Routledge Taylor y Francis Group.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). *Novice teachers' attention to student thinking. Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Lobato, J. y Ellis, A. (2011). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Monje, J. (2017). *La re-constitución del objeto mental "relativamente" en futuros maestros* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Nickerson, S., Lamb, L. y LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 381-398). London: Springer.

Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 23*, 231-246.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks, Sage Publications.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

van den Kieboom, L. A., Magiera, M. T. y Moyer, J. C. (2017). Learning to notice student thinking about the equal sign: K-8 pre-service teachers' experiences in a teacher preparation program. En E. O. Schack et al. (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 141-159). Springer International Publishing AG.

van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.