

CÓMO INTERPRETAN ESTUDIANTES PARA MAESTRO RESPUESTAS DE ALUMNOS DE PRIMARIA A PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES

How prospective teachers interpret primary students' answers to fractions division-measure problems

Montero, E.^a y Callejo, M. L.^b

^aESCUNI Centro Universitario de Magisterio, ^bUniversidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta comunicación es caracterizar la interpretación que hacen estudiantes para maestro (EPM) de las respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Los participantes fueron 21 EPM del tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria, que participaron en un experimento de enseñanza, que tenía como objetivo desarrollar una mirada profesional en el dominio de las fracciones y sus operaciones. Los EPM realizaron las siguientes tareas: resolver problemas, y anticipar y analizar respuestas de alumnos de Primaria. Se les proporcionó información teórica sobre la progresión en el desarrollo de los problemas de división-medida basada en los trabajos de Empson y Levi (2011). Los resultados muestran que al final del experimento los EPM han ampliado su repertorio de las estrategias usadas por los alumnos de Primaria y han mejorado la interpretación de las mismas.

Palabras clave: *fracciones, problemas de división-medida, mirada profesional, progresión en el aprendizaje.*

Abstract

The purpose of this communication is to characterize the interpretation of pre-service teachers (PST) to the answers of Primary students to fractions division-measure problems. The participants were 21 PST enrolled in the 3rd year of undergraduate studies in Primary Education. The experiment was focused in developing their professional noticing in fractions and their operations. PST did the following tasks: solving problems, and anticipate and analyze Primary students' answers. They were provided with theoretical formation on the progression of the strategies applied to solve fractions division-measure problems, based in the works of Empson and Levi (2011). Results show that PST expanded their repertory of the strategies used by the Primary students as well as a better interpretation of such strategies.

Keywords: *fractions, division-measure problems, professional noticing, progression in teacher knowledge.*

INTRODUCCIÓN

Una de las tareas profesionales de los maestros es saber interpretar y dotar de significado las respuestas de los estudiantes, la cual es considerada una de las destrezas de la “mirada profesional” (van Es y Sherin, 2008; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Estudios previos han mostrado que los maestros pueden mejorar la “mirada profesional” sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, aunque ello no sea fácil, y que se puede comenzar a abordar en los programas de formación inicial. Evidencias de este desarrollo se pueden encontrar en las investigaciones de Fernández, Llinares y Valls (2013), en el contexto de la proporcionalidad con futuros maestros de Primaria.

Montero E. y Callejo, M. L. (2018). Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 378-386). Gijón: SEIEM.

Uno de los dominios matemáticos en los que se ha mostrado que tanto los alumnos de primaria como los propios estudiantes para maestro (EPM) tienen dificultades es el de las estructuras multiplicativas, y en particular los problemas de división-medida (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002). En esta comunicación nos centraremos en los problemas de división-medida con fracciones, correspondientes a la estructura de «isomorfismo de medidas» (Vergnaud, 1994).

Pocas investigaciones se han centrado en cómo interpretan los EPM problemas con fracciones (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016) y lo han hecho en la línea de caracterizar el conocimiento que utilizan los EPM cuando resuelven tareas profesionales, pero no de desarrollar este conocimiento. Fernández, Callejo y Márquez (2012) propusieron un problema de división-medida con fracciones a EPM y les pidieron valorar cuatro respuestas de estudiantes de Primaria a este mismo problema; los resultados muestran que hubo EPM que no resolvieron el problema correctamente pero, en cambio, supieron interpretar y valorar las respuestas de los estudiantes y, por otro lado, algunos EPM tuvieron dificultad para interpretar y valorar respuestas con procedimientos incorrectos pero resultados correctos o que utilizaban procedimientos distintos a los que ellos habían empleado. Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014) propusieron a EPM resolver un problema de reparto con números naturales cuyo resultado es una fracción e interpretar las respuestas de siete estudiantes; los resultados muestran la necesidad de profundizar en el conocimiento que los EPM tienen sobre las fracciones, como por ejemplo no expresar la unidad de medida; por otra parte algunos EPM mostraron dificultades para comprender e interpretar las estrategias de los estudiantes, en particular las que eran diferentes a las que ellos habían utilizado. Los resultados de ambos trabajos muestran la importancia de desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza (MKT) para que los EPM puedan interpretar las respuestas de los estudiantes y poder proponerles tareas para que avancen en su comprensión.

En esta comunicación nos centramos en caracterizar la interpretación que hacen EPM de las respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Estos EPM habían participado en un experimento de enseñanza con el objetivo de desarrollar la mirada profesional sobre este tipo de problemas.

MARCO TEÓRICO

En los últimos años, la adquisición y el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” es un objetivo de los programas de formación y una línea de investigación en Didáctica de la Matemática. Van Es y Sherin (2008) han subrayado la importancia de identificar lo que es relevante en una situación de enseñanza-aprendizaje, usar el conocimiento del contexto y hacer conexiones entre los eventos específicos y los principios más amplios. Por su parte Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la competencia docente “mirar profesionalmente” centrándose en el pensamiento matemático de los niños y han señalado tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) decidir las acciones a desarrollar en la clase.

Para desarrollar estas destrezas es importante que los futuros maestros tengan referencias en las que apoyarse, como la progresión en el desarrollo de la comprensión de los conceptos o procedimientos matemáticos. En el contexto de las operaciones con fracciones, Empson y Levi (2011) han elaborado una progresión en el desarrollo de las estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones, dentro de los problemas que denominan de “grupos múltiples”. Esta progresión consta de tres etapas e indica cómo van evolucionando las estrategias a lo largo del tiempo.

Modelado directo y Adición repetida. Se representa cada grupo fraccionario, ya sea dibujando o por una fracción. Por ejemplo, en el problema siguiente “Tengo 12 chocolatinas y quiero dar $\frac{3}{4}$ de chocolatina a cada niño, ¿a cuántos niños puedo dar?”, se divide cada chocolatina en cuartos, se

agrupa 3 cuartos juntos que se dan a 1 niño. Se continúa este proceso hasta que se usen todos los cuartos en que se han dividido las 12 chocolatinas. Como hay 16 grupos de $\frac{3}{4}$, se puede dar a 16 niños.

Estrategias de agrupamiento y combinación [pensando aditivamente]. En este caso no se representa cada grupo fraccionario sino que se crea un agrupamiento más eficiente al combinar grupos fraccionarios. Se utiliza estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo: 3 chocolatinas para 4 niños; 3 chocolatinas más, 4 niños más, etc.

Estrategias multiplicativas [con proporcionalidad, proceso constructivo, o directamente con multiplicación]. Se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la multiplicación. Por ejemplo: 3 chocolatinas para 4 niños. Si tenemos 12 chocolatinas, hay 4 grupos de 3 chocolatinas, luego se puede dar a $4 \times 4 = 16$ niños.

En esta progresión subyace la idea de construir el concepto de fracción como cantidad usando el concepto de unidad iterativa (Steffe y Olive, 2010). En el ejemplo de la primera estrategia se usa la fracción unitaria $\frac{1}{4}$ que se va iterando sucesivamente; cada tres iteraciones se tiene un grupo de $\frac{3}{4}$; se termina las iteraciones cuando se alcanza 12 unidades. En la segunda se utiliza una fracción no unitaria, $\frac{3}{4}$, que se va iterando hasta llegar a 12 unidades. En la tercera hay un salto cualitativo respecto de las anteriores, pues se pasa de estrategias aditivas a multiplicativas, usando la idea de proporcionalidad.

En este contexto nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo anticipan EPM de Primaria respuestas de niños a un problema de división-medida con fracciones?
- ¿Cómo clasifican EPM de Primaria las estrategias empleadas por niños de 5º Primaria resolviendo dos problemas de división-medida con fracciones?
- ¿En qué medida la anticipación y las tareas profesionales realizadas en el experimento de enseñanza han ayudado a los EPM a clasificar las estrategias de los estudiantes de Primaria?

MÉTODO

Los participantes fueron 21 estudiantes para Maestro en Educación Primaria que estaban cursando la asignatura “Matemáticas y su Didáctica II” de 3er curso del Grado en Maestro en Educación Primaria. Esta asignatura incluye dos bloques: i) Fracciones y ii) Magnitudes y su medida.

Para el bloque de las fracciones se diseñó un experimento de enseñanza que se desarrolló en 8 sesiones de 2 horas. Se han seleccionado aquellos EPM que participaron al menos en 6 sesiones y asistieron a las dos sesiones en que se recogieron los datos de la investigación.

El objetivo del experimento de enseñanza era: Desarrollar en los EPM una mirada profesional del pensamiento matemático de los alumnos sobre las fracciones y sus operaciones. Para desarrollar esa mirada se trabajó con los EPM una propuesta de iniciación a las fracciones (Empson, 1995) y una progresión de las estrategias de resolución de problemas de división-medida (Empson y Levi, 2011).

En las cuatro primeras sesiones se le pidió a los EPM analizar las estrategias empleadas por niños de Primaria en problemas de reparto equitativo donde el resultado es una fracción. Trabajaron en grupos de 2 o 3 y luego discutieron en gran grupo. Disponían de un documento teórico: “*Using Sharing Situations to help children learn fractions*” (Empson, 1995), que propone los problemas de reparto como una vía de iniciación a las fracciones.

En la quinta sesión se pidió a los EPM resolver un problema y anticipar dos posibles estrategias de resolución de niños de Primaria a este problema. Disponían del documento sobre “*Progresión en el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de ‘Grupos Múltiples’*”, elaborado a partir de Empson y Levi (2011). También podían clasificar las estrategias usando la categoría de fracción como operador.

En las sesiones sexta y séptima se pidió a los EPM describir las estrategias utilizadas en una selección de sus respuestas anticipatorias dadas en la sesión anterior. Estas respuestas fueron seleccionadas atendiendo a la variedad de estrategias y modos de representación. Trabajaron por parejas y luego discutieron en gran grupo.

En la octava sesión los EPM debían analizar de las respuestas de tres niños de 5° de Primaria a dos problemas: (a) Describiendo cada una de las respuestas; (b) Interpretando la comprensión de cada uno de los alumnos sobre las estrategias de resolución de problemas de división-medida; (c) Haciendo una propuesta para cada uno de los alumnos para mejorar su comprensión.

Instrumentos de recogida de datos

Los datos de la investigación se recogieron en las sesiones 5 y 8 y son las respuestas de los EPM a tres tareas:

- Resuelve el siguiente problema como si fueras un profesor de Matemáticas de Primaria: *Tengo 12 chokolatinas. ¿A cuántos niños puedo alimentar con estas chokolatinas si doy tres cuartos ($3/4$) de chokolatina a cada niño?*
- Resuelve el mismo problema de dos maneras distintas como si fueras un niño de Primaria.
- Indica en la “*Progresión en el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de Grupos Múltiples*” según Empson y Levi (2011), dónde se hallan las respuestas de los 3 niños de 5° de Primaria a los dos problemas (Figura 1).

El texto entregado a los EPM mostraba únicamente las respuestas de los tres niños de 5° de Primaria, que debían ser clasificados atendiendo a las siguientes características: El niño A emplea modelización directa con representación simbólica; el niño B estrategia multiplicativa con representación simbólica; el niño C modelización directa con representación icónica.

Análisis de datos

Las categorías para clasificar las respuestas de los EPM fueron las siguientes:

- Modelado Directo y Adición Repetida.
- Estrategias de Agrupamiento y combinación [pensando aditivamente].
- Estrategias Multiplicativas [con proporcionalidad, proceso constructivo, o directamente con multiplicación].
- Fracción como operador.

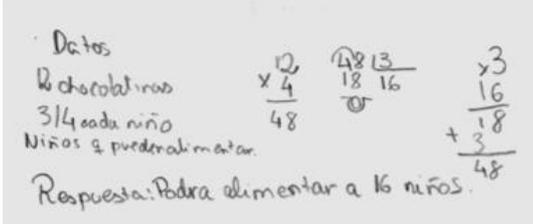
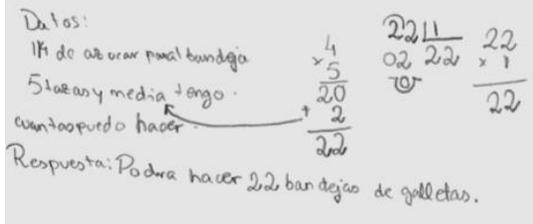
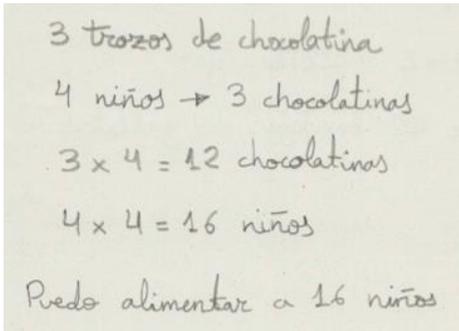
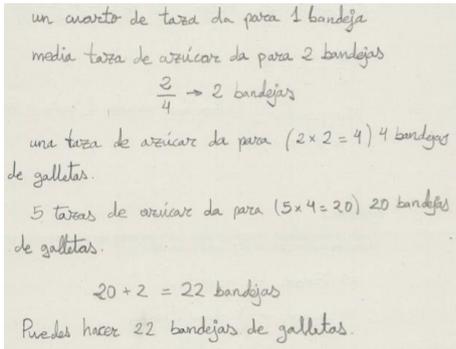
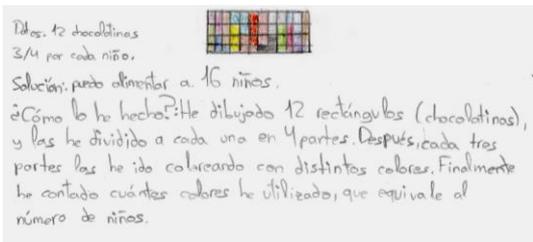
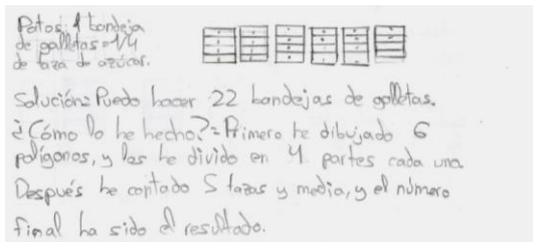
Niño	Problema de las chokolatinas	Problema de las galletas
	<i>Tengo 12 chokolatinas. ¿A cuántos niños puedo alimentar con estas chokolatinas si doy tres cuartos (3/4) de chokolatina a cada niño?</i>	<i>Para hacer una bandeja de galletas necesitamos utilizar un cuarto de una taza de azúcar. Si tienes 5 tazas y media, ¿cuántas bandejas de galletas puedes hacer?</i>
A		
B		
C		

Figura 1. Respuestas de los niños A, B y C a los problemas de las chokolatinas y las galletas

RESULTADOS

Presentamos los resultados en tres apartados correspondientes a los tres instrumentos de recogida de datos.

Estrategias de los EPM resolviendo un problema

Los EPM resolvieron el problema de las chokolatinas empleando sólo dos tipos de estrategias: fracción como operador y modelización directa (Tabla 1).

Tabla 1. Estrategias empleadas por los EPM resolviendo el problema de las chokolatinas

Progresión estrategias (Empson y Levi (2011))					
I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador	No contesta o respuesta errónea
8 (38.1%)	0	0	0	12 (57.1%)	1 (4.7%)

La Figura 2 muestra dos ejemplos de respuestas de los EPM correspondientes a los dos tipos de estrategias.

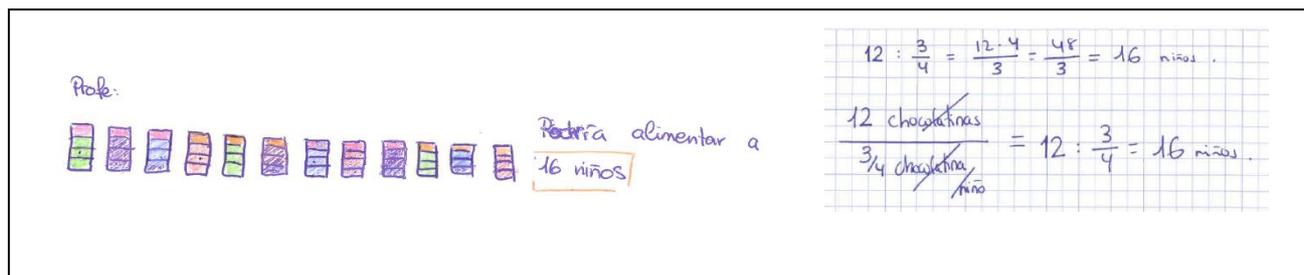


Figura 2. Ejemplos de resolución por modelización directa y usando la fracción como operador

Anticipación de respuestas de alumnos de Primaria

Cuando se pidió a los EPM que resolvieran el problema como niños de Primaria emplearon mayoritariamente estrategias de Modelización directa (MD): 19 de los 21 EPM emplearon esta estrategia al menos en una ocasión y 10 de ellos en sendas resoluciones. De los 9 EPM que se aventuraron a emplear estrategias diferentes de la MD en una de las respuestas, 5 lo hicieron en la segunda resolución, mientras que 4 siguieron el camino inverso, dejando la MD para la segunda resolución. Solo un EPM empleó estrategias diferentes de la MD en ambos casos, primero con la fracción como operador y posteriormente con una estrategia multiplicativa. Un EPM no supo contestar correctamente en ninguno de sus dos intentos (Tabla 2).

Tabla 2. Estrategias empleadas por los EPM resolviendo el problema de las chocolatinas de dos formas distintas como si fueran niños de Primaria (niño 1 / niño 2)

Niño 1/Niño 2	I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador	No contesta o errónea
I.1. Modelización directa	10	0	1	1	2	1
I.2. Adición repetida	0	0	0	0	0	0
II. Aditivas: agr. y comb.	1	0	0	0	0	0
III. Multiplicativas	2	0	0	0	0	0
Fracción operador	1	0	0	1	0	0
No contesta o errónea	0	0	0	0	0	1

Clasificación de las estrategias usadas por niños de Primaria

En cuanto a la clasificación por parte de los EPM de las estrategias empleadas por los tres niños de Primaria, menos de la cuarta parte clasificó correctamente las estrategias del niño A (23.8% chocolatinas y 19% galletas); la mayoría las clasificó como operador (61.9% y 57.1% respectivamente) y otros como multiplicativas (14.3% y 23.8%). Todos los EPM clasificaron correctamente las respuestas del niño B a ambos problemas. Por último, más de la mitad de los EPM clasificó correctamente las estrategias del niño C (66.7 y 57.1%); los demás clasificaron las estrategias como adición repetida y aditivas (Tabla 3).

Tabla 3. Clasificación de estrategias empleadas por los tres niños en los problemas de las chokolatinas (x/) y de las galletas (/y)

Progresión estrategias Empson y Levi (2011)					
	I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador
Niño A	5 / 4	0	0	3 / 5	13 / 12
Niño B	0	0	0	21 / 21	0
Niño C	14 / 12	3 / 4	4 / 5	0	0

Nota. Las celdas sombreadas corresponden a las respuestas correctas.

Algunas de las razones dadas por los EPM para justificar su clasificación fueron las siguientes: Pablo (nombre ficticio) clasificó correctamente la respuesta del niño A en el problema de las chokolatinas como Modelización directa, destacando que el niño entiende el significado de la fracción 3/4, porque divide las 12 chokolatinas en cuartos y luego procede a agruparlos de 3 en 3.

“Realizar este proceso de averiguar los trozos totales y luego dividirlos entre los que reparte, nos indica que entiende perfectamente lo que representa el numerador y el denominador, pero no sabemos si sabe operar con fracciones.”

También clasificó correctamente la respuesta del niño B en el mismo problema como Estrategia multiplicativa identificando los agrupamientos que hace interpretando qué puede haber detrás de lo escrito por el niño.

“El alumno es capaz de anticipar que con tres chokolatinas podrá alimentar a 4 alumnos. Tras este agrupamiento llega un paso que me genera bastantes dudas: $3 \times 4 = 12$ chokolatinas. Este dato ya lo conocía y por tanto puedo suponer que al conocer las chokolatinas 12 y haber obtenido un agrupamiento de tres chokolatinas busca el número de agrupaciones que puede hacer: $3 \times \underline{\quad} = 12$. La operación típica o habitual hubiera sido una división pero realmente la finalidad es la misma.”

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es caracterizar la interpretación que hacen EPM, que han participado en un experimento de enseñanza, de las respuestas dadas por alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Los resultados muestran que al final del experimento los EPM han ampliado su repertorio de las estrategias usadas por los alumnos de Primaria y han mejorado la interpretación de las mismas. Las respuestas a las preguntas de investigación permiten constatar cómo se ha producido este progreso de la sesión 5 a la 8.

- ¿Cómo anticipan EPM de Primaria respuestas de niños a un problema de división-medida con fracciones?

Los resultados muestran que los EPM emplearon solo dos tipos de estrategias cuando se les pidió resolver el problema de las chokolatinas: modelización directa y fracción como operador. Estas estrategias están en los extremos de la progresión; no usaron estrategias aditivas de combinación ni multiplicativas. Este hecho parece que ha condicionado las respuestas anticipatorias de las estrategias que podían usar niños de Primaria, como indicamos a continuación.

Hemos visto que de los 21 EPM, 19 usaron la modelización directa como una forma de resolución por los alumnos de Primaria, y de ellos 10 la utilizaron en las dos respuestas de anticipación. De los 9 restantes, solo 2 consideraron que la fracción como operador era una posible forma de resolución de los alumnos de Primaria; los 7 restantes usaron estrategias aditivas de agrupamiento o multiplicativas, por tanto fueron capaces de ir más allá de sus propias resoluciones. No siempre la primera respuesta anticipatoria fue una de las que ellos habían utilizado resolviendo el problema.

Por otra parte, en conjunto, pocos EPM propusieron ejemplos de estrategias aditivas de agrupamiento y multiplicativas. Y además algunos no fueron capaces de dar una segunda respuesta.

Estos resultados muestran la necesidad de proporcionar información acerca de las estrategias de resolución de problemas de los alumnos de Primaria, como han señalado otros trabajos (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014). El trabajo conjunto compartiendo las distintas respuestas anticipatorias requirió a los EPM hacer el esfuerzo de comprender aquéllas que eran diferentes de las propias. Esta dificultad también ha sido señalada en el trabajo de Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014).

- ¿Cómo clasifican EPM de Primaria las estrategias empleadas por niños de 5º de Primaria resolviendo dos problemas de división con fracciones?

Casi las tres cuartas partes de los EPM han clasificado correctamente las estrategias de modelización directa con representación icónica del niño C. En cambio, menos de la cuarta parte interpretaron correctamente la estrategia de modelización directa con representación simbólica del niño A; la mayoría la interpretaron como operador (alrededor del 60%) o como estrategias multiplicativas (entre 14% y 24%) que se encuentran en el otro extremo de la progresión. Por tanto, los EPM han identificado más fácilmente las estrategias de modelización directa con representación icónica que con representación simbólica. Esto muestra la necesidad de profundizar, por una parte, en la característica de la estrategia modelización directa, que es el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa, dividiendo el todo en fracciones unitarias, ya sea mediante un dibujo o de forma numérica.

Todos los EPM clasificaron correctamente las estrategias multiplicativas del niño B, por lo tanto parece que esta estrategia, que no utilizaron cuando resolvieron el problema y que apenas aparece en las respuestas anticipatorias, la saben identificar. Aunque hay que hacer notar que algunos EPM identificaron incorrectamente como multiplicativas las estrategias usadas por el alumno A. Por ello también hay que profundizar más en la diferencia entre las estrategias aditivas y las multiplicativas; en las primeras se usa la idea de unidad iterativa y en las segundas la idea de proporcionalidad.

- ¿En qué medida la anticipación y las tareas profesionales realizadas en el experimento de enseñanza han ayudado a los EPM a clasificar las estrategias de los niños?

Hemos visto un avance de los EPM en cuanto a la interpretación de las estrategias de los alumnos de Primaria. Consideramos que las tareas de anticipación que se pusieron en común y fueron objeto de debate, así como la información teórica proporcionada, ayudaron a interpretar las estrategias usadas por dichos alumnos de Primaria. Asimismo, los EPM interpretaron y discriminaron con un alto nivel de corrección las estrategias multiplicativas. En cambio, tuvieron más dificultad en interpretar las estrategias aditivas. En un segundo ciclo del experimento de enseñanza sería necesario enfatizar el uso de la unidad iterativa en las estrategias aditivas.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R y EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO)/ FEDER, Gobierno de España.

Referencias

- Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W. y Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, 76(9), 652-659.
- Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

- Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM.
- Fernandez, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast* 10, 441-468.
- Greer B., Verschaffel L. y De Corte E. (2002) "The Answer is Really 4.5": Beliefs about Word Problems. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Mathematics Education Library* (pp. 271-292). Dordrecht: Springer.
- Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19, 135-150.
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, 48, 1-27.
- Steffe, L. P. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer
- van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24, 244-276.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.