COMPARACIONES ENTRE ARGUMENTOS FORMALES E INFORMALES

Comparisons between formal and informal arguments

Ortiz-May, D.[a]

[a]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

El propósito del estudio llevado a cabo es explorar los focos de atención y obstáculos cognitivos que subyacen en el proceso de decidir si una prueba formal está basada en un argumento informal (juicio FBI, por su abreviatura en inglés). Examinar lo que los estudiantes toman en cuenta al hacer este tipo de juicios permite obtener información acerca de la manera en la que interpretan la formalización matemática. En general, se observó que quienes hacen juicios FBI exitosos ponen de manifiesto concepciones más robustas acerca de los aspectos involucrados en la prueba y que las brechas estructurales parecen influir en la transición de argumentos informales a formales. Para ello, se emplea el modelo de focos de atención, la noción de brecha estructural y de brecha de contenido propuestos por Zazkis y Villanueva (2016) para explicar las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al efectuar juicios FBI.

Palabras clave: *prueba, argumentos informales y formales, brecha estructural, brecha de contenido, focos de atención.*

Abstract

The aim of this study is to explore the attention foci and cognitive obstacles that underlie in the process of deciding whether a Formal proof is Based on an Informal argument (FBI judgement). Examining what students consider when making these types of judgments, it is possible to gain some insights about the way in which they construe mathematical formalization. Overall, it was observed that those who make successful FBI judgements show more robust conceptions about the aspects involved in mathematical proof and how conceptual breaches seem to influence the transition from informal to formal arguments. To this effect, Zazkis and Villanueva's (2016) model of attention foci and the notions of structural and concept distances is used to explain difficulties students face when making FBI judgments.

Keywords: *proof, informal and formal arguments, structural distance, content distance, attention foci.*

INTRODUCCIÓN

El tratamiento formal de los contenidos matemáticos en los cursos de nivel superior implica una transición abrupta, la cual representa una fuente de dificultades para una gran cantidad de estudiantes. Ibañez y Ortega (2003) destacan que incluso el proceso de distinguir una prueba formal de una conjetura informal requiere que los alumnos cuenten con esquemas de prueba adecuados; sin embargo, el estudio de las pruebas en bachillerato (alumnos de entre 15 y 18 años) no suele ser lo suficientemente amplio para favorecer la construcción de dichos esquemas.

En la actualidad, existe un consenso general sobre la problemática acerca de la lectura y construcción de pruebas en matemáticas, pues es preocupante la cantidad de estudiantes de cursos superiores de matemáticas que perciben la prueba como una secuencia de pasos deductivos que van desde "A" hasta "B", con la impresión predominante de que la lógica por sí misma dirige la dirección de la prueba de manera automática (Mamona-Downs yDowns, 2016).

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.

Entre las propuestas derivadas de la investigación en educación matemática orientadas a la problemática general sobre la construcción de pruebas matemáticas, se destaca la generación de razonamientos informales o de heurísticas como antesala de la constitución de una prueba formal (Raman, 2003; Mariotti, 2001). Sin embargo, Zazkis, Weber y Mejía-Ramos (2016) exploraron el empleo de argumentos informales como base para la elaboración de pruebas formales y determinaron que dicha estrategia no garantiza el éxito de los estudiantes en las tareas demostrativas. En respuesta a lo anterior, Zazkis y Villanueva (2016) plantean la necesidad de tomar como objeto de estudio la atención de los estudiantes cuando consideran argumentos informales como base del acto de formalización y como producto de su indagación se obtuvo un modelo acerca de los diferentes focos de atención de los estudiantes al hacer juicios acerca de si una prueba formal está basada en argumentos informales (juicios FBI –abreviación en inglés de Formal proof Based on an Informal argument–). En el estudio descrito en este informe, se empleará dicho modelo como una herramienta para estudiar el éxito o fracaso de los estudiantes al hacer juicios FBI con el fin de generar hipótesis para indagaciones futuras acerca de su desempeño en tareas de formalización de argumentos. Por lo tanto, las preguntas específicas de investigación son las siguientes:

- ¿Cuál es el papel que juegan los focos de atención de los estudiantes que inician cursos de matemáticas superiores al analizar argumentos informales como base de una prueba formal?
- ¿Cuáles son las posibles dificultades de los estudiantes que interfieren en el análisis de argumentos informales como base para una prueba formal?

REFERENTES TEÓRICOS

La argumentación puede mirarse como un proceso de producción discursivo lógicamente conectado, en el cual se forman razonamientos, se hacen inducciones y se extraen conclusiones (Goizueta y Planas, 2012), se concibe como un quehacer mental amplio que no está necesariamente limitado a las matemáticas. Por otra parte, la prueba matemática es una estructura formal cuya validez puede evaluarse determinando si obedece a un conjunto de convenciones matemáticas y reglas lógicas bien definidas (Weber, 2008). En dicha definición se emplea la palabra “formal” en la caracterización de la prueba.

De esta manera, puede definirse una prueba como un argumento construido dentro de un sistema simbólico-verbal bien definido, mientras que un argumento informal no está necesariamente construido dentro de dicho sistema, sin embargo, ambos tipos de razonamiento tienen la finalidad de establecer un resultado. La prueba matemática es entonces un modo de razonamiento sintáctico, pues posee una estructura deductiva verbal y simbólica mientras que los argumentos informales son razonamientos semánticos ya que no son necesariamente deductivos (Weber y Alock, 2009); éstos últimos consisten en diagramas, dibujos, expresiones coloquiales, gráficas, tablas, y cosas por el estilo. De esta manera, la formalización se define como el proceso de transformar un razonamiento semántico en un razonamiento sintáctico (un argumento informal en una prueba).

Puesto que se estudiarán juicios acerca de si una prueba está basada en un argumento informal, es necesario destacar que se considera que una prueba está basada en un argumento informal cuando existe un *mapeo* entre ambas cadenas de inferencias que tiene dos propiedades:

- El significado de las inferencias se conserva, tanto como sea posible, por las reglas del sistema verbal-simbólico dentro del que se concibe el argumento sintáctico
- El mapeo preserva la estructura lógica. Dos inferencias (o cadenas de inferencias) correspondientes aparecen en el mismo orden, tanto en el argumento informal, como en la prueba formal.

Focos de atención y distancias de argumentación

En esta sección se describen dos elementos teóricos principales planteados en la indagación de Zazkis y Villanueva (2016), los cuales están directamente orientados a la forma de responder a la segunda pregunta de investigación propuesta en este estudio. El primero consiste en un modelo sobre los focos de atención de los estudiantes al hacer tareas de comparación entre argumentos informales y pruebas propiamente formales. Este modelo está formado por cuatro focos de atención diferentes:

- Foco estructural: Se refiere al orden y conexiones entre las inferencias de los razonamientos. Un foco exclusivamente estructural de atención pasa por alto los detalles específicos de los contenidos involucrados.
- Foco de contenido: Es decir, identificar los conceptos e ideas matemáticas que se presentan en dos pruebas distintas. Se caracteriza por ignorar los aspectos globales de la prueba.
- Foco metodológico: Consiste en aquellos modos de demostración empleados en las pruebas; por ejemplo, por contradicción, deducción, reducción al absurdo, inducción, u otros.
- Foco holístico: Motivaciones de las pruebas, vías de resolución principales, características globales de las mismas.

Pedemonte (2007) expone el concepto de *unidad cognitiva,* que se refiere a la continuidad entre la generación de una conjetura y la construcción de la prueba correspondiente. Puesto que este trabajo versa sobre juicios entre pruebas preestablecidas y no generadas por el mismo estudiante, el concepto de unidad cognitiva no es aplicable; sin embargo, la falta de continuidad puede explicarse a través de la idea de distancia entre un argumento y una prueba, que es el segundo elemento teórico de la indagación de Zazkis y Villanueva (2016) que se considera en este estudio.

Ahora bien, el concepto de distancia entre argumento y prueba se observa a través de dos elementos:

- La brecha estructural es la diferencia entre el orden de las inferencias/afirmaciones correspondientes. Si el arreglo de las producciones informales y formales difiere sustancialmente al grado de que no es posible encontrar una correspondencia entre ellas, entonces se dice que la brecha estructural no puede ser cubierta; y
- La brecha de contenido da cuenta de las diferencias entre la manera en la que las ideas son representadas en la prueba y en los argumentos informales. Si un estudiante es incapaz de notar las conexiones entre ambas producciones, se dice que la brecha de contenido no ha sido cubierta.

METODOLOGÍA

Puesto que se desean observar focos de atención de los estudiantes al hacer juicios FBI, se proponen tareas en las cuales ellos deban comparar pruebas con razonamientos informales. Estas tareas están situadas en el nivel más básico de la prueba matemática pues consisten en la comparación de pruebas construidas por el investigador.

En el proceso de validación de pruebas intervienen procesos cognitivos complejos como la construcción de diagramas o textos alternativos, además de sistemas de creencias de los estudiantes con respecto a los recursos conceptuales empleados en las pruebas (Selden y Selden, 2003; Weber, 2008). Por lo tanto, se comunicó a los estudiantes que las pruebas eran correctas y no necesitaban ser validadas, con el fin de asegurar que los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes para la realización de las tareas estuvieran ligados directamente a sus concepciones de la prueba matemática y a los focos de atención puestos en las características de éstas.

Participantes y procedimiento

El estudio fue conducido en una universidad pública de la Ciudad de México. Los participantes fueron 17 alumnos de un curso de Cálculo Diferencial en el primer año de universidad; todos de carreras afines a matemáticas con un rango de edad de 18 a 21 años. Las tareas propuestas por Zazkis y Villanueva (2016) se adaptaron con el fin de poder ser aplicadas por medio de un cuestionario de papel y lápiz (ver sección Materiales). Los estudiantes contaron con un tiempo máximo de 2 horas para resolver las tareas de manera escrita.

En cada una de las cuatro tareas proporcionadas, se incluyó una terna de argumentos orientados a probar un resultado: un argumento informal y dos pruebas. El objetivo de las tareas fue el de comparar cada prueba con el argumento informal con la finalidad de formular un juicio FBI. En cada tarea, solo una de las pruebas es la formalización del argumento informal. Como abreviación, cuando se hable de dicha prueba se referirá como el argumento formalizado, mientras que la otra prueba será referida como el distractor.

Puesto que la aplicación del instrumento de recolección de datos es un cuestionario de lápiz y papel y no una entrevista estructurada, no fue posible asegurar la significancia de las respuestas de todos los participantes en tiempo real. Debido a ello, 7 de las producciones de los estudiantes no aportaron información relevante por diversas razones: respondieron únicamente con "sí" o "no", indicaron que no comprendían el tema o bien, malinterpretaron el sentido de las tareas. Por lo tanto, dichas respuestas fueron descartadas.

MATERIALES

En esta sección se incluyen tres de las cuatro tareas empleadas en el estudio. El principal motivo por el que se ha omitido la Tarea 4 en este documento es debido a las limitaciones de espacio. Por ello, se han seleccionado las producciones de estudiantes que proporcionan material suficiente para ejemplificar el análisis de resultados que contribuye a responder las preguntas de investigación, todas ellas correspondientes a las primeras tres tareas. Ahora bien, en cada tarea se identificó al argumento informal con la letra I, y con las letras F y G cada prueba formal; adicionalmente, se agregó un subíndice correspondiente al número de la tarea. En la Figura 1 se muestran las cuatro preguntas específicas para la Tarea 1, estos cuestionamientos se formularon en el resto de las tareas con la única variación del subíndice.

Indicaciones específicas:

1. ¿Dirías que la prueba F_1 se construyó a partir de I_1?
2. ¿Qué conexiones o diferencias entre la prueba y el argumento consideras significativas para concluir lo anterior?
3. ¿Dirías que la prueba G_1 se construyó a partir de I_1?
4. ¿Qué conexiones o diferencias entre la prueba y el argumento consideras significativas para concluir lo anterior?

Figura 13. Preguntas planteadas al final de la Tarea 1

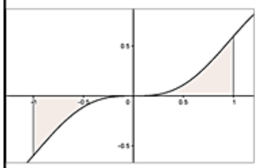
Un juicio FBI es correcto cuando, para alguna tarea dada, se indica que el argumento formalizado sí está basado en el argumento informal, o bien, que la prueba distractora no está basada en el argumento informal. Por ejemplo, para la Tarea 1 (Figura 2) un juicio FBI correcto consiste en identificar que la prueba G_1 sí está basada en el argumento informal, sin embargo, existe la posibilidad de que esté sustentado pobremente o bien, puede no estar sustentado en lo absoluto. Para ello, se delimitaron criterios mínimos para cada tarea de lo que un estudiante debería destacar en sus justificaciones para afirmar que una prueba está construida a partir de un argumento informal. En este sentido, el juicio FBI de un alumno es *satisfactorio* si además de ser correcto, sus comparaciones satisfacen los criterios mínimos. Por otro lado, si el juicio FBI es correcto, pero no cumple con los criterios mínimos, será considerado *insuficiente*.

En la Tarea 1, la prueba F_1 no está basada en el argumento informal. La identificación de la prueba distractora es un proceso de negación, por lo que basta con destacar alguna de las discrepancias señaladas en la Figura 2 para que el juicio FBI sea considerado como satisfactorio.

TAREA 1

Probar que $\int_{-a}^{a} \sin^3 x\, dx = 0$

Argumento I_1



($I_1 - 1$) $\sin^3 x$ es una función impar y el intervalo es simétrico.

($I_1 - 2$) Eso significa que toda el área *ganada* de un lado se *perderá* en el otro lado.

($I_1 - 3$) Por lo tanto, la integral evaluada en ese intervalo es cero.

Prueba F_1

$$
\begin{aligned}
(F_1 - 1)\quad & \int_{-a}^{a} \sin^3(x) = \int_{-a}^{a} \sin(x)\sin^2(x)\,dx \\
& = \int_{-a}^{a} \sin(x)\ (1-\cos^2(x))dx \\
& = \int_{-a}^{a} (\sin x - \sin x \cos^2 x)dx \\
(F_1 - 2)\quad & = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x \Big]_{-a}^{a} \\
(F_1 - 3)\quad & = \cos a - \frac{1}{3}\cos^3 a - \cos(-a) + \frac{1}{3}\cos^3(-a) \\
& = [\cos a - \cos(-a)] + [\frac{1}{3}\cos^3 a - \frac{1}{3}\cos^3(-a)] \\
(F_1 - 4)\quad & = 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

Discrepancias de la prueba distractora:
- No se emplea la idea de función impar
- No se emplea la idea de "ganancia" de un lado y "pérdida" del otro

Prueba G_1

$$
\begin{aligned}
(G_1 - 1)\quad & \sin(u) = -\sin(-u) \\
& \sin^3(u) = -\sin^3(-u) \\
(G_1 - 2)\quad & \text{Sea } -u = x, \text{ entonces } -du = dx \\
(G_1 - 3)\quad & \int_{-a}^{a} \sin^3(x) = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-a}^{0} \sin^3(x)\,dx \\
(G_1 - 4)\quad & = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-(-a)}^{-0} \sin^3(-u)\,(-du) \quad \text{(Sustituyendo } u\text{)} \\
& = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-(-a)}^{-0} -\sin^3(-u)\,(du) \\
& = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{a}^{0} -\sin^3(-u)\,du \\
(G_1 - 5)\quad & = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{a}^{0} \sin^3 u\,du \quad (\text{ya que } \sin^3(u) = -\sin^3(-u)) \\
(G_1 - 6)\quad & = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx - \int_{0}^{a} \sin^3 u\,du \quad \text{(Volteando la integral)} \\
& = 0
\end{aligned}
$$

Criterios mínimos (prueba formalizada):
- La prueba se basa en la noción de función impar
- Todo lo que se gana de un lado se pierde en el otro.

TAREA 2

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, entonces es único

Argumento I_2

($I_2 - 1$) Si el límite no fuera único, podríamos decir que existen dos, sean L_1, L_2

($I_2 - 2$) Podemos *controlar* el tamaño ε del vecindario alrededor de cada uno.

($I_2 - 3$) Si se selecciona un vecindario suficientemente pequeño, estos no se sobrepondrán.

($I_2 - 4$) Entonces cuando lleguemos suficientemente lejos en la secuencia, estaremos en ambos vecindarios

($I_2 - 5$) Ya que no podemos estar en dos lugares al mismo tiempo, se llega a una contradicción

Prueba F_2

($F_2 - 1$) Por contradicción, se asume que la secuencia $\{a_n\}$ no tiene un único límite.
($F_2 - 2$) Entonces, existe L_1 y L_2 tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, y $L_1 > L_2$.
($F_2 - 3$) Sea $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Por definición, existe una N tal que si $n > N$ entonces:

$$|L_1 - a_n| < \varepsilon \qquad |L_2 - a_n| < \varepsilon$$

($F_2 - 4$)

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \ \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L_1 \ \Rightarrow\ a_n > L_1 - \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

$$|a_n - L_2| < \varepsilon \ \Rightarrow a_n - L_2 < \varepsilon \ \Rightarrow\ a_n < L_2 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

($F_2 - 5$) Pero para $n > N$ se tiene que $a_n > \frac{L_1+L_2}{2}$ y que $a_n < \frac{L_1+L_2}{2}$, lo cual es imposible.

Criterios mínimos (prueba formalizada):
- Suposición de dos límites
- Control del tamaño de la vecindad
- Contradicción de "dos lugares al mismo tiempo"

Prueba G_2

($G_2 - 1$) Por contradicción, se asume que la secuencia $\{a_n\}$ no tiene un único límite.
($G_2 - 2$) Entonces, existe L_1 y L_2 tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, y $L_1 \neq L_2$.
($G_2 - 3$) Por definición, para cada $\varepsilon > 0$, existe una N tal que si $n > N$ entonces:

$$|L_1 - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |L_2 - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

($G_2 - 4$) Considérese $n > N$.

$$
\begin{aligned}
& |L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \\
(G_2 - 5)\quad & \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \text{ por a la desigualdad del triángulo} \\
& = |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| \\
(G_2 - 6)\quad & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

($G_2 - 7$) Entonces $|L_1 - L_2| < \varepsilon$. Ya que ε puede hacerse tan pequeña como se desee, $L_1 = L_2$, contradiciendo la suposición inicial.

Discrepancias de la prueba distractora:
- No se presenta la idea de superposición
- La contradicción es diferente

Figura 14. Tarea 1 y Tarea 2, con sus respectivos criterios mínimos

En síntesis, para identificar satisfactoriamente la prueba distractora, basta con notar una de las discrepancias señaladas en las Figura 2 y Figura 3, sobre las Tareas 1, 2 y 3. Sin embargo, para identificar satisfactoriamente la formalización del argumento informal, deben satisfacerse todos los criterios mínimos.

TAREA 3

Demostrar que la derivada de una función par es impar

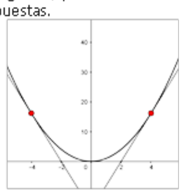
Argumento I_3

$(I_3 - 1)$ Las funciones pares tienen una simetría reflexiva a través del eje Y

$(I_3 - 2)$ Si tomamos dos tangentes correspondientes, esa simetría implica que las tangentes tendrán la misma magnitud, igual de inclinadas, pero en direcciones opuestas.

$(I_2 - 3)$ Eso significa que cuando tomemos la derivada, que corresponde a la pendiente de esas tangentes, la derivada tendrá la misma magnitud, pero en direcciones opuestas

$(I_2 - 4)$ Lo cual significa que será impar porque la disparidad significa que las cosas tengan la misma magnitud, pero en direcciones opuestas.



Prueba F_3

$(F_3 - 1)$ Si $f(x)$ es par, entonces por definición $f(x) = f(-x)$. Entonces:

$(F_3 - 2)$ $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$(F_3 - 3)$ $$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-a-h) - f(-a)}{h}$$

$(F_3 - 4)$ $$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(-a-h) - f(-a)}{-h}$$

$(F_3 - 5)$ $$= -\lim_{u\to 0} \frac{f(-a+u) - f(-a)}{u} \quad \text{Donde } u = -h$$

$$= -f'(-a)$$

$(F_3 - 6)$ Por lo tanto, $f'(x)$ es una función impar

Prueba G_3

$(G_3 - 1)$ Si $f(x)$ es par, entonces por definición $f(x) = f(-x)$. Entonces:

$(G_3 - 2)$
$$f(x) = f(-x)$$
$$f'(x) = f'(-x) \cdot (-1) \quad \text{Por regla de la cadena}$$
$$f'(x) = -f'(-x)$$

$(G_2 - 3)$ Por lo tanto, $f'(x)$ es una función impar

Criterios mínimos (prueba formalizada):

- Empleo de la simetría axial de una función par
- Definición de límite de la derivada corresponde a la idea de tangentes

Discrepancias de la prueba distractora:

- No se usa la idea de rectas tangentes
- Nada en el argumento informal sugiere el uso de la regla de la cadena

Figura 15. La Tarea 3, y sus criterios mínimos

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La Tabla 1 contiene un resumen del desempeño general de los participantes en las tareas del estudio. La primera fila muestra el número de estudiantes que fue capaz de identificar la prueba formalizada del argumento informal. En la segunda fila, se encuentra el número de alumnos señalaron correctamente que la prueba distractora no estaba basada en el argumento informal. Finalmente, la tercera fila contiene el número de estudiantes que identificaron tanto la prueba distractora, como la prueba formalizada.

Tabla 1. Número de juicios FBI satisfactorios, de acuerdo con los criterios mínimos

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Identificó la prueba formalizada	4/10	2/10	2/10	3/10
Identificó la prueba distractora	7/10	5/10	4/10	3/10
Identificó ambas	3/10	2/10	2/10	2/10

Por otra parte, es importante mencionar que los juicios son incorrectos si se caracteriza a la prueba distractora como basada en el argumento informal o bien, si se señala a la formalización del argumento como una prueba que no está basada en dicho argumento.

El papel de los focos de atención

Un ejemplo de juicio FBI correcto es el del estudiante E5 en la Tarea 2 (Figura 4). Al igual que la mayoría de los estudiantes en esta tarea, ella identifica que ambas pruebas proceden por contradicción de modo que considera un foco de atención metodológico. Ella también toma en cuenta los aspectos de contenido de la prueba al señalar que el argumento “estar en dos lugares al mismo tiempo” se traduce como el hecho de que la misma épsilon acota la sucesión de dos formas diferentes.

Finalmente, el foco estructural empleado por esta estudiante se pone de manifiesto cuando describe la manera en que están ligadas las conexiones (describe la prueba como una secuencia de pasos usando conectores como luego-después-finalmente). La estudiante es capaz de hacer una inspección completa de las pruebas a partir de emplear diversos focos de atención, lo que funciona como una herramienta que le permite obtener un resultado satisfactorio.

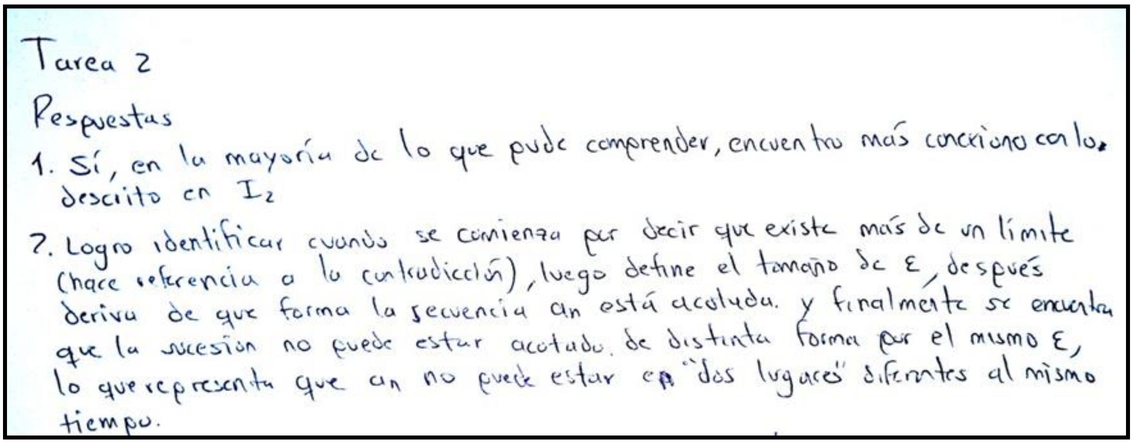

Tarea 2
Respuestas
1. Sí, en la mayoría de lo que pude comprender, encuentro más concriono con lo descrito en I_2
2. Logro identificar cuando se comienza por decir que existe más de un límite (hace referencia a la contradicción), luego define el tamaño de ε, después deriva de que forma la secuencia an está acotada. y finalmente se encuentra que la sucesión no puede estar acotado, de distinta forma por el mismo ε, lo que representa que an no puede estar en "dos lugares" diferentes al mismo tiempo.

Figura 16. Respuesta de la estudiante E5 a la Tarea 2

Por otro lado, poner un foco de atención por encima del resto constituye un obstáculo considerable para hacer un juicio FBI correcto. Por ejemplo, el estudiante E3 señala equívocamente que la prueba distractora está basada en el argumento informal en la Tarea 2 solamente considerando que ambos proceden por contradicción (Figura 5), de modo que pasa por alto la manera en la que las inferencias se interconectan para llegar al resultado y tampoco toma en cuenta las diferencias entre las ideas generales de las pruebas.

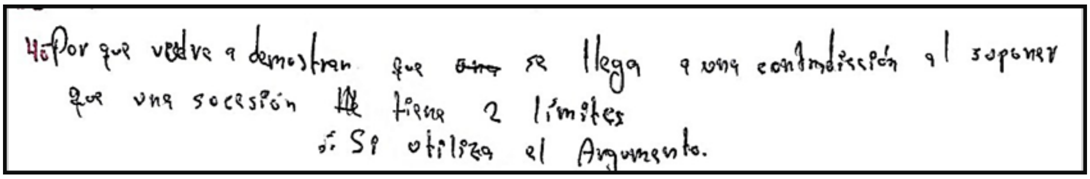

4.-Por que vuelve a demostrar que ~~una~~ se llega a una contradicción al suponer que una sucesión tiene 2 límites
∴ Si utiliza el Argumento.

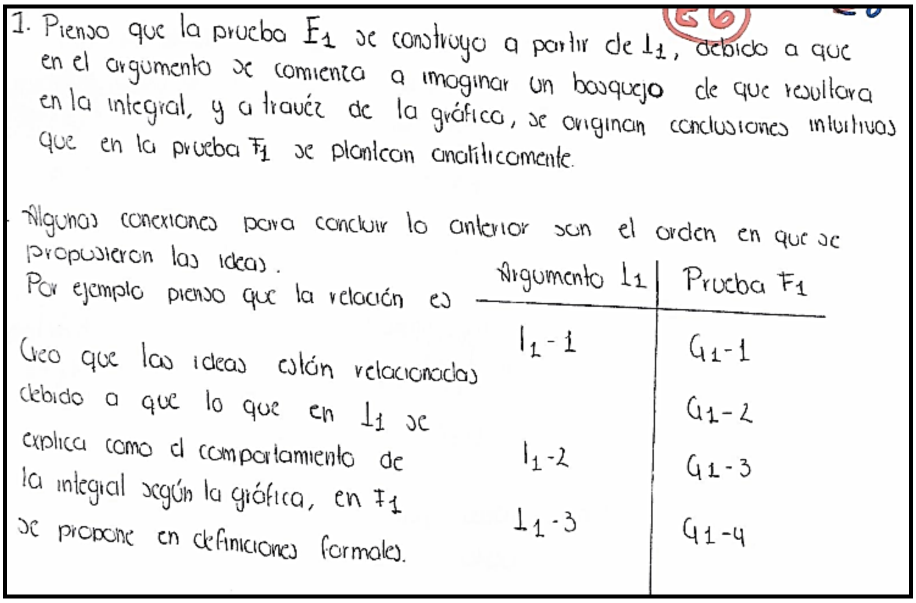
Figura 17. Respuesta del estudiante E3 a la Tarea 2

Además de considerar los contenidos matemáticos involucrados, los estudiantes que hicieron juicios FBI correctos tienden a mirar la manera en la que éstos son empleados para constituir una prueba. Este modo de proceder indica que estos estudiantes pueden concebir la prueba matemática como un objeto que posee subelementos y conexiones entre ellas, y no únicamente como un proceso. En contraparte, los juicios FBI insuficientes o incorrectos están construidos a partir de observaciones limitadas por la predominancia de un foco de atención sobre el resto. Esto sugiere que los estudiantes que los hicieron no consiguen conceptualizar la prueba matemática en su totalidad, puesto que se detienen en aspectos muy puntuales de la misma sin prestar atención al resto de las conexiones que se presentan.

El papel de las brechas conceptuales

En el caso de estudiantes que inician cursos de matemáticas superiores, los focos de atención al comparar razonamientos formales e informales no son los únicos aspectos que determinan el éxito o fracaso de juicios FBI correctos.

La idea anterior se ilustra a través de la producción de la estudiante E6 con respecto a la Tarea 1, quién hace un juicio FBI incorrecto al concluir que la prueba distractora sí se construyó a partir del argumento informal (Figura 6). Ella nota que la prueba y el argumento informal se basan en la misma idea global sobre la forma de la función en un intervalo simétrico, lo que describe como el "bosquejo" de la prueba (foco holístico). En su producción, es muy clara la comparación que hace de las inferencias que considera correspondientes entre los dos argumentos (foco estructural) y lo hace interpretando los contenidos empleados, por ejemplo, cuando traduce los procesos de evaluación de la integral como la pérdida y ganancia de áreas (foco de contenido).


E6

1. Pienso que la prueba F_1 se construyo a partir de I_1, debido a que en el argumento se comienza a imaginar un bosquejo de que resultara en la integral, y a travéz de la gráfica, se originan conclusiones intuitivas que en la prueba F_1 se plantean analíticamente.

Algunas conexiones para concluir lo anterior son el orden en que se propusieron las ideas.
Por ejemplo pienso que la relación es

Argumento I_1	Prueba F_1
I_1-1	G_1-1
	G_1-2
I_1-2	G_1-3
I_1-3	G_1-4

Creo que las ideas están relacionadas debido a que lo que en I_1 se explica como el comportamiento de la integral según la gráfica, en F_1 se propone en definiciones formales.

Figura 18. Respuesta de la estudiante E6 a la Tarea 1

A pesar de que la respuesta de la estudiante E6 se caracteriza por ser multifocal, sigue siendo un juicio FBI incorrecto. Esto ocurre porque sus comparaciones estructurales a través de los contenidos involucrados tienen errores. Es decir, la brecha de contenido entre el argumento informal y su formalización no ha podido ser cubierta: la estudiante E6 no puede encontrar la "traducción" adecuada del proceso de ganancia y pérdida de áreas simétricas en un sistema verbal-simbólico formal.

En ningún momento la estudiante E6 nota que la "separación algebraica" en la prueba distractora no puede vincularse con ningún paso del argumento informal. Esto la orilla a pasar por alto los aspectos de contenido de la prueba y poner un énfasis mayor en el foco estructural, pues sabe que el vínculo entre el inicio y el final de la demostración se lleva a cabo mediante la idea de integrales, sin embargo, ignora las características puntuales de ese razonamiento.

Otros ejemplos claros sobre los obstáculos que representan las brechas estructurales y de contenido al realizar juicios FBI correctos se ponen de manifiesto en las producciones de los estudiantes E7 y E3 en la Tarea 3. La justificación del estudiante E7 (Figura 7) para señalar que F_3 no está basada en I_3 muestra una brecha de contenido que no ha podido ser superada, pues él no es capaz de coordinar el concepto de derivada como límite y su representación gráfica como la pendiente de una recta tangente.

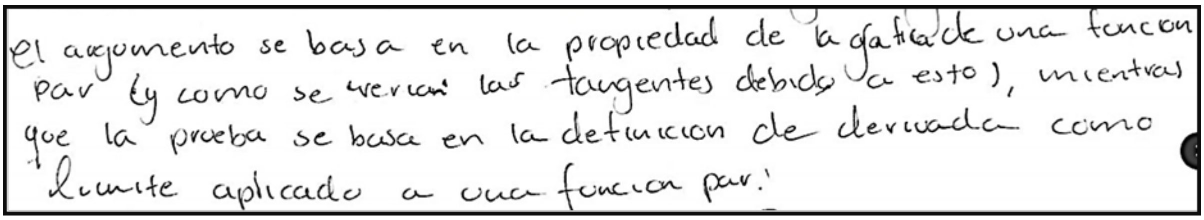

el argumento se basa en la propiedad de la gráfica de una funcion par (y como se verían las tangentes debido a esto), mientras que la prueba se basa en la definicion de derivada como límite aplicado a una funcion par.

Figura 19. Respuesta del estudiante E7 a la Tarea 3

De manera similar, el estudiante E3 (Figura 8) también falla en reconocer a la formalización del argumento informal en la Tarea 3 al señalar que el razonamiento informal "trata un caso particular".

Esto representa una brecha estructural en el sentido de Pedemonte (2007), pues es incapaz de identificar que el razonamiento informal usa un caso particular para mostrar una propiedad estructural independiente del mismo. Es decir, si bien el argumento informal usa una función específica para ilustrar su argumento, lo hace con el fin de mostrar la motivación general que construye la prueba formal.

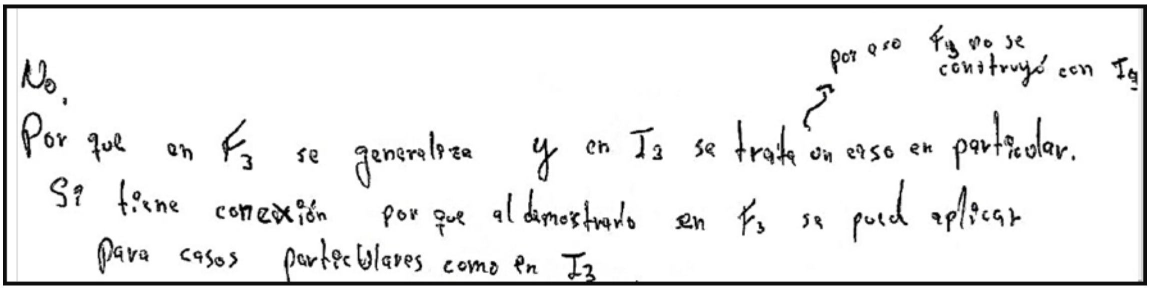


Figura 20. Respuesta del estudiante E3 a la Tarea 3

La incapacidad de detectar los elementos estructurales de un argumento informal podría constituir un obstáculo cuando los individuos construyan sus propias pruebas, pues interfiere con el uso de estrategias intuitivas consideradas vitales para dicha acción. Por otro lado, las brechas de contenido en el mapeo de razonamientos preconstruidos son una señal de alarma sobre la comprensión conceptual de los alumnos sobre ciertos contenidos y su posible imposibilidad para emplearlos.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio sobre el desempeño de los estudiantes en tareas de comparación de razonamientos formales e informales muestran que los estudiantes novicios en cursos de matemáticas superiores se enfocan con mayor frecuencia en aspectos superficiales de los argumentos, atendiendo menos a la lógica estructural, resultado que Inglis y Alock (2003) declara en su estudio.

Los juicios FBI exitosos suelen estar sustentados en una comparación articulada de los aspectos que abarca la prueba, mientras que los insuficientes y los incorrectos muestran la imposición de un tipo de foco de atención por encima de los otros, así como la presencia de brechas de contenido o estructurales que no han podido ser cubiertas.

Cabe destacar que los estudiantes tienden a sobre-simplificar los argumentos, es decir, reducirlos a una única sentencia y emplearla como la representación global de la prueba; dicha estrategia podría considerarse como un recurso fallido, pues los estudiantes frecuentemente la utilizan como sustitución de un análisis completo en las tareas de comparación lo cual conlleva a un planteamiento equívoco.

De esta manera, el desempeño de los estudiantes en tareas de comparación de argumentos formales e informales puede emplearse para identificar posibles dificultades cognitivas relacionadas con la formalización. Este tipo de tareas ofrecen una guía para generar estrategias de instrucción sumamente específicas, enfocadas en el desarrollo de nociones de la prueba en matemáticas y en la generación de estrategias intuitivas para la lectura y validación de argumentos.

Más investigación relacionada con la formalización de pruebas es necesaria. Por ejemplo, podrían plantearse las siguientes preguntas con el fin de establecer un punto de partida para la extensión de esta indagación: ¿De qué manera intervienen los focos de atención de los estudiantes en aspectos de la prueba para la construcción de pruebas basadas en argumentos informales?, y ¿existe una relación entre el desempeño de los estudiantes en actividades de comparación de pruebas y en actividades de construcción de pruebas a partir de argumentos informales?

Agradecimientos

El estudio del cual este documento es un informe se hizo con el apoyo de una beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México para realizar estudios de postgrado, con número CVU de asignación 863106. Adicionalmente, se reconoce la participación de la Dra. Olimpia Figueras para la estructuración de este comunicado.

Referencias

Ibañez, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 49-63.

Goizueta, M. y Planas, N. (2012). Análisis de interpretaciones escritas del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI,* 295-302. Jaén: SEIEM.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2016). Mathematical structure, proof and definition in advanced mathematical thinking. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 546-553). New York: Routledge.

Mariotti, M. A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 25-53.

Inglis, M. y Alcock, L. (2003). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Selden, J. y Selden, A. (2003). Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Reasearch in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431-459.

Weber, K. y Alcock, L. J. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York: Routledge.

Zazkis, D. y Villanueva, M. (2016). Student conceptions of what it means to base a proof on an informal argument. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 318-337.

Zazkis, D., Weber, K. y Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 155-173.