

REPRESENTACIONES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS: UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES DE PRIMARIA DE LATINOAMÉRICA

Representations of the geometric objects: an experience with Latin America primary school teachers

Ortiz, A.^a y Sandoval, I.^a

^aUniversidad Pedagógica Nacional

Resumen

El razonamiento espacial se usa en la vida escolar, laboral y cotidiana. Diferentes estudios señalan su complejidad dado que involucra interacciones entre acciones y competencias para comprender y transformar objetos y relaciones espaciales. En este reporte presentamos resultados de una experiencia con 17 profesores latinoamericanos de primaria, quienes participaron en dos sesiones de un taller. El análisis se basa en las producciones (individuales y grupales) tanto orales como escritas de dos actividades, centrando la atención en tres aspectos: i) uso del lenguaje; ii) interpretación de representaciones, y iii) utilización del sistema de referencia. Los resultados con este grupo de profesores muestran cómo mover, sentir e interpretar son acciones necesarias para la realización de tareas descriptivas que posibiliten la re-construcción de representaciones bi y tridimensionales de un mismo cuerpo.

Palabras clave: *razonamiento espacial, profesores de primaria, representaciones 2D y 3D.*

Abstract

Spatial reasoning is used in different scenarios of daily living. Several studies have demonstrated that the spatial reasoning complexity is based on the interaction between the actions and competences used on the objects' transformations and spatial relationships. This report shows the results about a spatial reasoning experiment. A total of 17 Latin American primary school teachers participate in two sections of a workshop, which were design to analyze the oral and writing productions based on individuals and groups. The experiment was focused on three main ideas: (I) use of language, (II) interpretation of representations, and (III) reference frame. The results with this group of teachers show how “move, feel and interpret”, are necessary actions for the accomplishment of descriptive tasks that make possible the reconstruction of bi and three-dimensional representations of the same object.

Keywords: *spatial reasoning, primary teachers, 2D and 3D representations.*

INTRODUCCIÓN

Conocer, explorar y moverse en el espacio donde se vive es una necesidad de los seres humanos. Comprender los aspectos espaciales de la realidad y matematizarlos es una tarea que se aprende en la escuela. En la actualidad, investigaciones sobre razonamiento espacial han mostrado que esta habilidad no solo es importante como herramienta para evaluar la inteligencia de una persona, sino que se usa en la vida laboral, cotidiana y académica. Más aún, se ha encontrado que aquellos estudiantes de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés), requieren de este tipo de razonamiento. Otros estudios señalan que estas habilidades también son requeridas en otras carreras universitarias como, por ejemplo, arquitectura, artes, diseño gráfico, geología, química, y en otras especialidades técnicas como para taxistas, reporteros, chef, entre

otras (Davis y el SRSR, 2015, p. 56). Sin embargo, en las actividades escolares el énfasis está puesto más en el uso que en su desarrollo.

Hoffer (1981 citado en Dindyal, 2015) menciona que el desarrollo de razonamiento espacial potencia habilidades visuales (de reconocimiento, observación de las propiedades, mapas de interpretación, proyección de imagen), aptitudes verbales (correcta terminología y la comunicación precisa en la descripción de los conceptos espaciales y las relaciones), habilidades comunicativas (que se comunican a través del dibujo, la habilidad para representar formas geométricas en 2D y 3D, para hacer gráficos de escala, figuras isométricas croquis), habilidades lógicas (clasificación, reconocimiento de las propiedades esenciales como criterios, patrones más exigentes, formular y comprobar hipótesis, hacer inferencias, utilizando ejemplos de lo contrario) y todo ello en su conjunto, tiene incidencia en aplicaciones de la vida real. Por su parte, Samara y Clements (2009, p. 161), refieren que el pensamiento espacial incluye dos competencias a desarrollar. Por un lado, la orientación espacial que involucra la localización espacial y navegación intuitiva, los modelos y mapas, y las coordenadas y estructuración espacial. Y por otro, la visualización espacial e imaginación, que implica el uso de transformaciones, orientación y movimiento, relaciones parte-todo, y clasificación y lenguaje.

Hay diferentes aproximaciones y términos vinculados con el razonamiento espacial como *relación* espacial (Sinclair, et al., 2016), *visualización* espacial (Gutiérrez, 1991; Arıcı, y Aslan-Tutak, 2015), *habilidad* espacial (Mulligan, 2015; Pittalis, y Christou, 2010), *pensamiento* geométrico en tres dimensiones (Pittalis y Christou, 2010), *competencia* espacial (Vázquez y Noriega, 2010), *conocimiento* espacial (Soury-Lavergne, y Maschietto, 2015), *visualización* y *razonamiento* espacial (Fernández, 2013) y *geometría* espacial (Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres, 1992). La intención aquí no es únicamente señalar esta diversidad sino más bien la complejidad de acciones involucradas y sus interacciones al desarrollar tareas que involucran el razonamiento espacial. Acciones como imaginar objetos estáticos o dinámicos y actuar sobre/con ellos (rotación mental, ampliar/reducir, cambiar de dimensión, sistema de referencia, entre otros).

Ahora bien, respecto a las dificultades reportadas destacan aquellas donde se requiere coordinar representaciones, construcciones y transformaciones de objetos bi y tri-dimensionales (Pittalis y Christou, 2010; Gonzato, Godino y Contreras, 2012; Arıcı y Aslan-Tutak, 2015; Bruce y Hawes, 2015; y Moss, Hawes, Naqvi y Caswell, 2015) así como la visualización de objetos desde diferentes perspectivas (Mulligan, 2015; Sinclair et al, 2016). Por ejemplo, interpretar representaciones 2D y 3D de un objeto 3D no es una acción inmediata (Duval, 1998), se requiere generar experiencias suficientes al estudiante en el trabajo con representaciones planas y establecer diferencias y relaciones entre estas dimensiones. La mayoría de los estudios han sido realizados con estudiantes y pocos con profesores (formación inicial o en servicio). Los estudios con profesores, como el realizado por Otumfuor (2013), da evidencias de la relación entre uso del razonamiento espacial, desplegado en estrategias como gestos, y el uso de diferentes representaciones, para la instrucción matemática. Como este autor lo señala, tanto los conocimientos matemáticos del profesor como el movimiento de su cuerpo influyen en el desarrollo del razonamiento espacial de sus estudiantes.

Fernández (2013) enfatiza, resultado de su detallada investigación documental sobre este tema, que debido a la poca atención desde el currículo y a la falta de entrenamiento para usar representaciones visuales, la visualización espacial está en detrimento. Sin embargo, esta autora encontró que se le reconoce a la visualización “como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración” y más aún, para el uso de tecnologías digitales como “entornos de aprendizaje y/o herramientas”. Entonces es necesario, como lo menciona Fernández (2013), de “acciones formativas centradas en el desarrollo de habilidades y procesos visuales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría” (p. 36). Para lograrlo es central el trabajo con profesores, desde su formación y en programas de desarrollo profesional. Sin embargo, son pocos los estudios con profesores, lo que muestra una necesidad de más investigaciones sobre las acciones realizadas por

ellos cuando resuelven tareas que implican razonamiento espacial. En esta línea va nuestra investigación. En particular, reconocer cómo desarrollar habilidades de razonamiento espacial y qué acciones dan cuenta de este desarrollo. En esta comunicación se describen acciones propias del razonamiento espacial usadas por profesores de primaria en situaciones problemáticas y su relación con conocimientos matemáticos especializados.

PERSPECTIVA TEÓRICA

De una representación lineal del razonamiento espacial a una como sistema

El razonamiento espacial se considera como un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel mental) y transformar (a nivel físico) el espacio donde vive o desarrolla una tarea (Davis y el SRSB 2015). La perspectiva de sistema permite representar interacciones, movimiento y yuxtaposición entre acciones, elementos y competencias emergentes (Figura 1). En el diagrama se identifican tres subsistemas: exterior, intermedio e interior.

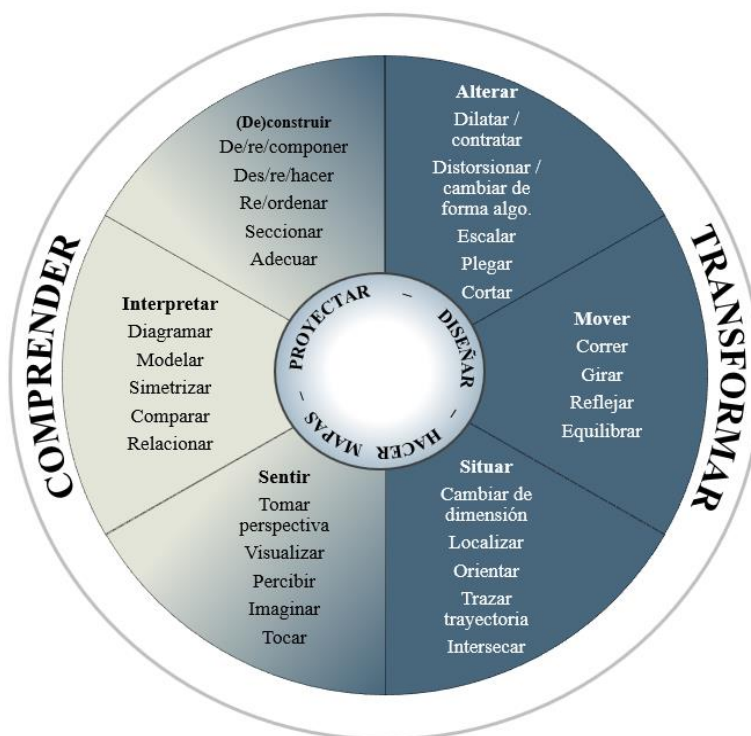


Figura 1. Representación del razonamiento espacial como sistema. Fuente: Davis y el SRSB, 2015, p. 141)

En el exterior considera los elementos de comprensión (cognitivo) y transformación (físico). En el intermedio se encuentran seis elementos, sentir, interpretar, (de) construir, alterar (modificar), mover y situar, (los cuales se describirán más adelante), y grupos de acciones que se definen de acuerdo con el elemento al cual pertenecen. Este subsistema tiene dos secciones, una con un tono de gris oscuro que determina los elementos que dan cuenta de transformaciones, y la otra con un tono de gris claro que determina los elementos que hacen parte de comprensiones. En el subsistema interior se encuentran tres competencias emergentes, proyección, diseño, elaboración de mapas. Estas competencias no son estáticas, pues están en movimiento circular continuo lo que significa que pueden estar en correspondencia con cualquier grupo de elementos del subsistema intermedio.

La lista de acciones que caracterizan al razonamiento espacial no es exhaustiva, sin embargo, son nuestro punto de partida y un referente en la construcción de actividades y su análisis. Pretendemos dar evidencias de cómo diferentes estrategias para reconocer, representar y detonar acciones de razonamiento espacial pueden producirse cuando hay un diseño cuidadoso de las actividades.

Actividades donde la imaginación, la transformación y el movimiento son centrales para el trabajo con representaciones bi y tridimensionales.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Para comprender las acciones en términos de los conocimientos de los profesores, partimos del modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014). Este modelo se refiere al conocimiento específico (en su conjunto) del profesor de matemáticas el cual se compone de dos dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El primer dominio está compuesto de tres subdominios: conocimiento de los temas, de la estructura de la matemática y de la práctica matemática. El segundo, el Conocimiento Didáctico del Contenido, está compuesto por conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, de las características del aprendizaje de las matemáticas y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En este caso, nos centraremos en el conocimiento de los temas, es decir, describir qué conoce el profesor sobre el razonamiento espacial al momento de realizar tareas que lo involucran, los fenómenos que reconoce importantes y le dan sentido a su enseñanza en la escuela y las aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. En particular, las representaciones de objetos bi y tri-dimensionales.

METODOLOGÍA

Se adoptó una metodología cualitativa de estudio de caso interpretativo (Creswell, 2003) dado que la atención está en lo realizado por los participantes a través de sus propias reflexiones sobre las acciones realizadas. Los episodios seleccionados ejemplifican el potencial analítico de la propuesta de Davis y el SRS (2015) para movilizar subsistemas del razonamiento espacial. Aquí se presenta el trabajo realizado por 3 de los 17 maestros de primaria, cada uno proveniente de un país latinoamericano diferente. Ellos participaron en un taller (otoño 2016) de dos sesiones, con una duración total de 6 horas. Los resultados forman parte de una investigación más amplia.

El taller se diseñó para que los profesores, a partir de su experiencia y del desarrollo de las actividades propuestas, reflexionaran sobre la complejidad de las representaciones de objetos geométricos bi y tridimensionales. Además, reflexionar sobre el papel del razonamiento espacial en la enseñanza de las matemáticas. Este taller “Imaginación, transformación y movimiento: Implicaciones en y fuera de la escuela” formó parte del programa de desarrollo profesional denominado “Escuelas México” y fue financiado por la Secretaría de Educación Pública (SEP), la Agencia Mexicana de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AMEXIC) y la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI). Los participantes tenían amplia experiencia como docentes en primaria. Ocho de ellos impartían todas las asignaturas (matemáticas, sociales, español, biología, arte) del grado escolar en un grado particular y los demás impartían una sola asignatura (inglés, tecnología, agricultura, español, arte y geografía) en uno o más grados. Basados en sus propias experiencias, reconocieron la importancia de adquirir y desarrollar el razonamiento espacial tanto en su formación, como en sus estudiantes, pues argumentaron que al desarrollarlo hay un mejor entendimiento no solo en las distintas áreas del conocimiento, sino también en el lenguaje necesario para lograr una comunicación que moviliza ideas, objetos y/o sujetos. Las dos investigadoras encargadas de dirigir el taller observaron las acciones de los profesores al realizar las tareas asignadas sin intervenir en su desarrollo, únicamente orientaron la discusión por medio de preguntas o para comprender una estrategia de solución propuesta.

Los resultados presentados en el siguiente apartado provienen de la revisión de video grabaciones y de los registros escritos (individuales y grupales) obtenidos en el taller. Al momento de hacer el análisis se generaron las siguientes categorías:

- *Interpretación de las representaciones*: son las acciones realizadas por un sujeto para de-construir y re-construir la representación de un objeto (2D, 3D). En este proceso se puede hacer uso de acciones vinculadas con movimiento e interpretación (Figura 1).
- *Uso del lenguaje* (verbal oral, gestual y escrito): Son los términos (expresiones lingüísticas) con los significados/sentidos propios de la cultura de cada sujeto a fin de comunicar lo observado e interpretado respecto a las relaciones espaciales entre los objetos bajo estudio.
- *Sistema de referencia*: son las acciones que le permiten al sujeto analizar el espacio donde se encuentra y reconocer las convenciones que como observador tiene del objeto de análisis. Por ejemplo, situarse dónde está o dónde no está el objeto de interés, a fin de construir y estructurar una posición/ubicación para establecer relación entre lo que le rodea, ubicación entre objetos, etc. Las acciones más movilizadas son las de situar y sentir (Figura 1).

Descripción de las sesiones

En cada sesión los profesores desarrollaron las actividades y al finalizar se concluyó con una reflexión sobre: (i) las dificultades enfrentadas en el desarrollo de cada actividad y (ii) las habilidades requeridas para su desarrollo, señalando aspectos que, desde lo planteado por la investigación en Educación Matemática, permiten reflexionar sobre la complejidad y los procesos cognitivos implicados en su implementación.

En la primera sesión las actividades involucraban réplica de figuras bi y tridimensionales en la que uno de los profesores realizaba la construcción a partir de la descripción dada por su compañero. Después, en colectivo, reescribían las instrucciones para replicar correctamente la construcción. En la Figura 2, se presentan las actividades desarrolladas.


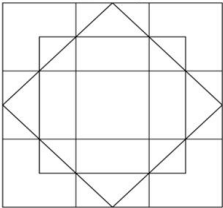
	
<p>a. A partir del objeto formado por piezas que recibe uno de los participantes, su compañero sin ver deberá replicarlo, siguiendo las indicaciones dadas.</p>	<p>b. A partir del dibujo que recibe uno de los participantes, su compañero sin ver deberá replicarlo en una hoja en blanco, siguiendo las indicaciones dadas por su compañero.</p>

Figura 2. Ejemplo de actividades primera sesión

En la segunda sesión las actividades involucraban cambios de representaciones de 2D a 3D, seguir indicaciones para salir de un laberinto y diseñar una actividad para sus estudiantes. En la Figura 3, se ilustran ejemplos de las actividades propuestas.

Como actividad de cierre del taller se solicitó a los participantes el diseño de una actividad que, desde el punto de vista de ellos, potenciara habilidades de razonamiento espacial en sus estudiantes. Para el diseño se pidió mencionar las herramientas tecnológicas que utilizarían, el objetivo a lograr en los alumnos, los conceptos, disciplinas que involucra y sugerencias a un profesor que quisiera implementarla.

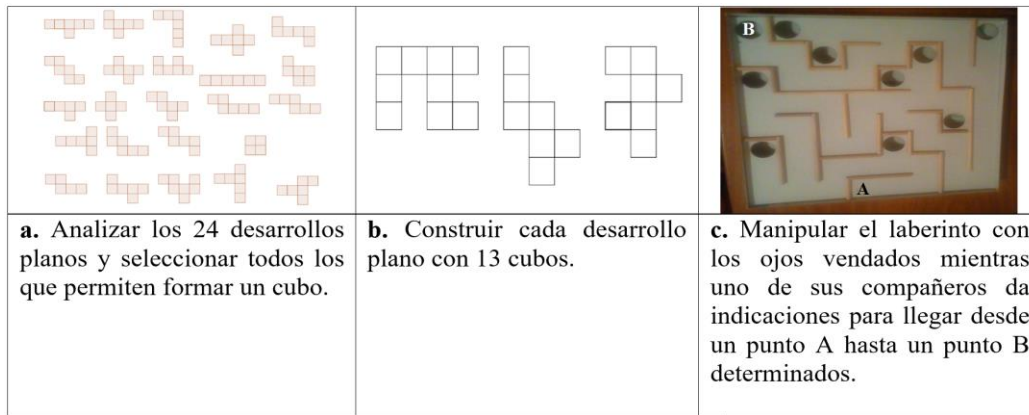


Figura 3. Actividades segunda sesión

DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al analizar las dos sesiones del taller se identificaron tres aspectos movilizados y que dan cuenta de la complejidad del razonamiento espacial: uso del lenguaje, interpretación de representaciones y utilización del sistema de referencia. Estos aspectos dan cuenta de los conocimientos de los profesores de primaria, en este caso, en el uso e interpretación de representaciones 2D y 3D de objetos geométricos en contextos de comunicación. Estos conocimientos del tema son los que permiten al profesor decidir los atributos relevantes, irrelevantes, correctos o incorrectos de los objetos geométricos usados en las situaciones problemáticas propuestas. A continuación, presentamos a manera de ejemplo, una breve descripción de algunos momentos del taller en los que se identifican estos tres aspectos.

Episodio 1. Replicar un objeto tridimensional a partir de instrucciones orales

El primer episodio que ejemplificaremos es el resultado que obtienen los profesores identificados como P1 y P2 en la primera actividad (Figura 2.a). Al finalizar la actividad, las investigadoras I1 e I2 les piden comparar la figura dada y la construcción obtenida. La profesora P2 quien realizó la construcción notó que en las acciones que involucraban de-construir, su compañero, el profesor P1, cuando le dio las indicaciones no logró poner en interacción acciones del elemento movimiento (en particular, girar) y el elemento sentir (específicamente, asumir perspectiva). Veamos en el siguiente fragmento de esta interacción:

- I1: ya pueden comparar [...] comparen [P1, el profesor que dio las instrucciones a P2, coloca la representación como se muestra en la Figura 4.a]
- P2: Éste fue el que fallé [P2 observa las dos figuras y señala un cubo como se muestra en la Figura 4.b]
- I2: ¿Qué fue lo que pasó ahí?
- P2: Que él lo estaba viendo así [P2 rota la figura dada como se muestra en la Figura 4.c] [...] y yo lo estaba viendo al contrario [...] es como el negativo.

(Fragmento 1, Episodio de P2 y P1)

Inicialmente, P2 interpreta que la construcción no quedó igual a la dada porque uno de los cubos estaba mal ubicado. Después, a partir de la interacción entre acciones vinculadas con los elementos interpretación (a través de comparación de los dos modelos, el dado y el obtenido), sentir (acciones como visualizar e imaginar), y movimiento (en particular giros), nota que no es sólo un cubo, sino que todos los cubos parecen estar en posiciones contrarias, es decir, los cubos que ella ubicaba a su derecha eran los que estaban a la derecha de P1. Por su parte, P2 expresa que hizo falta tener un mismo *sistema de referencia* a la hora de establecer la comunicación entre ellos para dar las instrucciones efectivas para la construcción. Por lo tanto, el objeto construido no cumplía con ser

una réplica de la dada. Esto muestra una dificultad similar a la reportada por Mulligan (2015) con estudiantes cuando visualizan un objeto. La interpretación de P1 hacia la representación estuvo mediada por un sistema de referencia sin considerar al otro sujeto y su posición frente al objeto a construir (en este caso P2).

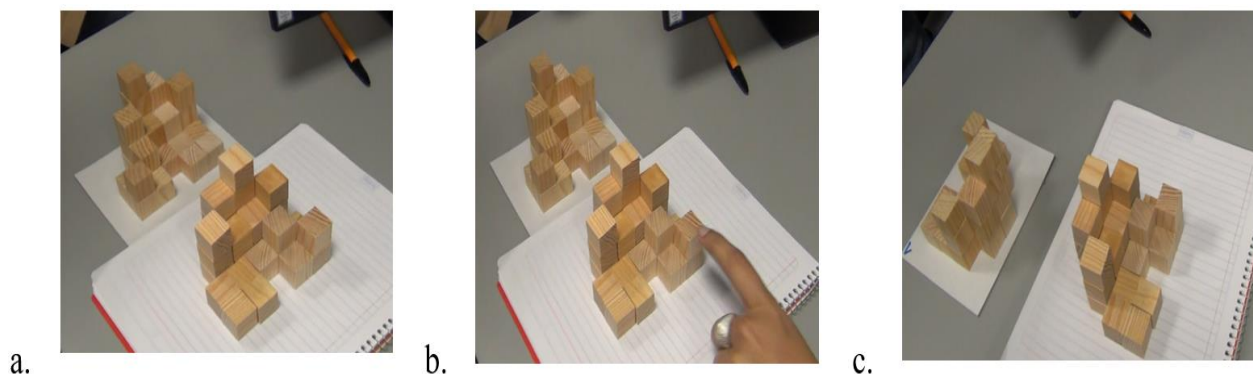


Figura 4. Comparación entre el objeto dado y el construido

En este episodio se evidencia como los profesores ponen en juego acciones de la Figura 1 a fin de comprender y transformar sus relaciones espaciales con un objeto dado. Las acciones muestran carencias en los conocimientos de los profesores vinculados con la interpretación y establecimiento de relaciones espaciales de objetos tridimensionales a través del lenguaje (uso de terminología geométrica correcta), aspectos que influyeron en las dificultades para realizar la tarea, conocimientos necesarios tanto para quien da las instrucciones como para quien las recibe.

Episodio 2. Cambiando de dimensión 2D a 3D

En este segundo episodio se relata la conversación sostenida entre investigadora I1 y la profesora P3 quien desarrolló la actividad. El trabajo realizado por P3 consistió en analizar 24 desarrollos planos y seleccionar todos aquellos que permitieran formar un cubo (Figura 3.a). Un primer criterio usado por P3 fue elegir aquellos desarrollos con seis cuadrados. El siguiente fragmento muestra otros criterios considerados por P3 en su selección:

- P3: Me encanta ver la simetría
 I1: A ver [...]
 P3: Entonces a través de la simetría es que yo puedo sobreponer esta parte de aquí con esta [señala uno de los desarrollos planos]
 I1: ¿Cuál es la simetría?
 P3: Aquí está, por ejemplo, si busco la simetría entre esta figura [señala el desarrollo plano que se ve en figura 6.a], se me sobrepone, está esta y está esta, pero al usar la imaginación al traer esto para acá, automáticamente ya estaría el cubo [luego de señalar la figura, mueve sus dedos indicando un encajamiento de las partes que considera simétricas, como se muestra en la Figura 5]

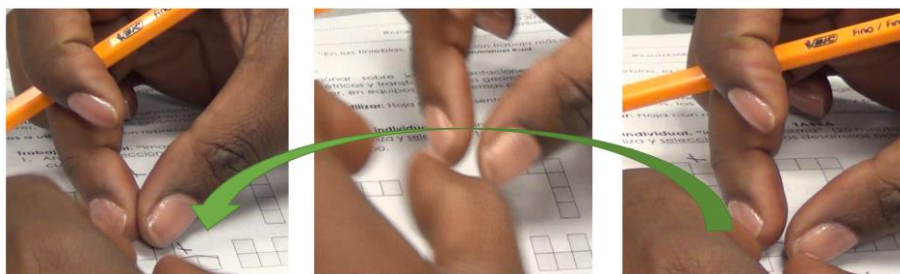


Figura 5. Movimiento de P3 con los dedos. (El movimiento de los dedos debe ser leído de derecha a izquierda)

- I1: ¿Y así lo hiciste con todos?
- P3: No todos
- I1: ¿Por qué?
- P3: Habría otras que no, no llevaban esta misma forma, porque tenía que ir utilizando otra forma de visualizarlas. Porque por ejemplo esta [señala otro desarrollo plano como se muestra en la Figura 6]
- I1: Si [...]
- P3: Fue a través de cómo ir [...] como formando la cajita aquí, entonces como que al imaginar esta, wow, tengo cara acá, tengo este lado, pero aún me falta la base y como tengo la base de arriba con esta.

(Fragmento 2, Episodio de P3)

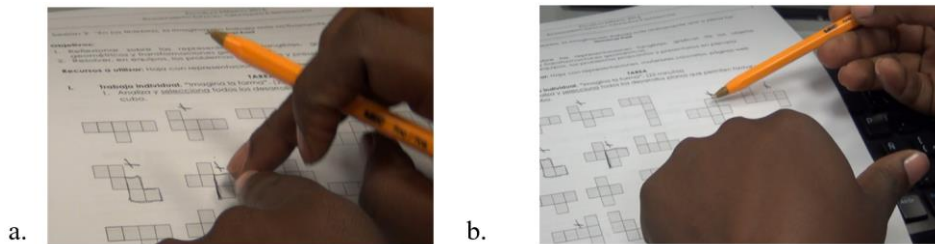


Figura 6. Simetría y transformaciones espaciales como criterios de selección

En este segundo episodio se muestra como P3 interpreta los desarrollos planos (representación en 2D) que posiblemente pueden formar un cubo (3D). El primer criterio implica conocer la cantidad de caras de un cubo, exactamente 6 (cambio de dimensión 3D a 2D). Los siguientes dos criterios reflejan acciones de comprensión propias del sentir (visualizar, imaginar), interpretar (establecer relaciones) y situar (cambiar de dimensión 2D a 3D). Simultáneamente P3 realiza procesos de transformación como situar (cambiar de dimensión) y alterar (cambiar de forma). El primer desarrollo que interpreta lo asocia con simetría, el segundo lo forma imaginando la construcción de una caja y, en ambos desarrollos usa sus dedos para moldear los cubos que se forman con las representaciones bidimensionales dadas. En estas acciones se evidencia, lo que para Samara y Clements (2009, p. 161), es parte de la competencia de visualización espacial e imaginación, esto es el uso de transformaciones, orientación y movimiento, relaciones parte-todo, y clasificación y lenguaje. Como ya se mostró, los conocimientos movilizados por la profesora al momento de realizar la tarea involucran comprensión de representaciones y su análisis tanto en el plano como en el espacio, puntualmente, los gestos con las manos cobran importancia al momento de explicar su razonamiento. Cuando el profesor identifica en estos movimientos una manera de comunicar relaciones espaciales entre objetos, resulta un aprendizaje importante también para la instrucción, pues se reconoce que los gestos (lenguaje corporal) se convierten en una herramienta para evidenciar significados construidos (Otumfuor, 2013).

REFLEXIONES FINALES

En los episodios anteriores se evidencia la necesidad de habilidades propias del razonamiento espacial, pues los maestros debían interpretar cuales de las figuras en 2D (desarrollos planos) formaban un objeto en 3D (cubo) y establecer un sistema de referencia eficiente para que a partir de instrucciones se lograra la construcción de objetos 3D. Los maestros enfrentados a estas actividades combinaron acciones cognitivas y de movimiento y transformación con los materiales concretos, es decir, se requería interpretar la actividad para realizar construcciones o movimientos corporales que derivaran en una solución exitosa. Transversal a estas acciones, se moviliza el lenguaje (no sólo lingüístico sino también corporal). En la primera actividad, P1 necesitaba usar un lenguaje lo suficientemente claro para que P2 replicara la construcción. Este lenguaje requirió de convenciones

espaciales y geométricas que evidenciaron las relaciones entre los objetos descritos. En la segunda actividad la profesora P3, al expresar/comunicar la forma como interpretó los desarrollos planos de un cubo, reflejó un conocimiento tanto de lenguaje geométrico (simetría) como corporal (usa los dedos para ejemplificar un cambio de representación de 2D a 3D).

Sin embargo, en ambos casos y a lo largo del taller se evidenció poco uso de un lenguaje espacial al trabajar con objetos bi y tri-dimensionales. Por ejemplo, cuando P2 reconoce la ausencia de un mismo sistema de referencia (acordado previamente) para realizar una réplica de la construcción dada, lo comunicó diciendo “es como el negativo”, terminología inadecuada para referirse a las acciones propias de esta actividad geométrica, aunque esta expresión puede ser válida para actividades donde se invierte el sentido al realizar un movimiento isométrico (isometría directa/opuesta). Esta carencia de vocabulario espacial se identificó a lo largo del taller, por ejemplo, términos que para algunos significaban “líneas” para otros eran “segmentos”, hablaban de “vértices” cuando querían referirse únicamente a “puntos”, se referían a “cuadros grandes y pequeños” para “cuadrados inscritos en otro cuadrado”, mencionaban “lados” para referirse a las caras de un cubo. Estos aspectos dan cuenta de la necesidad de discutir y reflexionar sobre las relaciones y diferencias entre terminologías y convenciones usadas al interior de una misma figura plana, entre figuras planas y entre figuras planas y cuerpos geométricos. Al dar indicaciones de movimiento o construcción utilizaron términos de proximidad como “muévelo un poquito, colócalo ahí arribita, ponlo cerca a...”. No obstante, estas expresiones son significativas para quien lo comunica, se notó dificultades en la interpretación por parte de quien recibía el mensaje, es decir, quien debía construir o manipular algún objeto.

Estudios como el realizado por Arıcı y Aslan-Tutak (2015) muestran cómo el lenguaje (en términos de instrucciones) a veces es poco comprendido por los estudiantes y esto impide la realización de actividades como las relacionadas con origami, pues en estas es necesario el reconocimiento de convenciones (símbolos que indican dobleces básicos en instrucciones de armado) y terminología geométrica (base cuadrada, puntos medios, entre otros). En nuestro estudio, esta situación se evidenció en los procesos comunicativos para hacer las réplicas de figuras y cuerpos geométricos. Al finalizar cada sesión del taller, los profesores participantes en sus reflexiones reconocieron la importancia de tener un lenguaje común y convenciones geométricas de manera que les permitiera lograr una comunicación efectiva en tareas como construir, interpretar, situar, mover, sentir y/o alterar algún objeto. El papel del profesor de primaria no sólo es tomar conciencia de las implicaciones del razonamiento espacial en tareas de enseñanza, sino en cómo construir tareas para posibilitar desarrollarlo en sus estudiantes. Para ello es necesario contar con conocimientos matemáticos especializados, como por ejemplo, conocimientos del tema a enseñar. Este tipo de conocimiento le permite al profesor interpretar y coordinar representaciones, en este caso bi y tridimensionales de objetos geométricos, establecer relaciones espaciales y usarlas en contextos de comunicación. El conocimiento matemático no es suficiente para lograr una instrucción efectiva, se requiere además de conocimientos relacionados con su didáctica. Cabe señalar que el trabajo con objetos bi y tridimensionales son abordados desde los primeros grados escolares.

En esta investigación el desafío ha estado tanto en el diseño de actividades para promover el desarrollo del razonamiento espacial como para valorar su efectividad al momento de su implementación. En el proceso de análisis de las producciones de los profesores nos enfrentamos a dos retos principales. Por un lado, identificar las acciones que dan cuenta de interacciones entre los diferentes subsistemas señalados en la Figura 1. Y por otro, interpretar cómo emergen estas acciones en el proceso de comunicación de los sujetos, pues hay acciones con los objetos físicos, a través de gestos y de movimientos del cuerpo de quienes se comunican (Figura 5 y 6, el caso de la profesora P3), aspectos que también informan sobre el razonamiento espacial (Otumfour, 2013). Por tanto, es necesario continuar con investigaciones cuyo objetivo sea construir secuencias

didácticas encausadas en desarrollar habilidades de razonamiento espacial en salones de clase, en diferentes niveles educativos y en programas de formación de profesores.

Referencias

- Arıcı, S. y Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13(1)*, 179-200.
- Bruce, C. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM, 47(3)*, 331-343.
- Creswell, J. (2003). *Research Design qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Segunda edición. Nebraska, Estados Unidos: Sage publications.
- Davis, B. y el SRSO. (2015). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*. New York, NY: Routledge.
- Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM, 47(3)*, 519-529.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Gonzato, M., Godino, J., Contreras, A. y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la geometría de sólidos en la EGB. *Memoria de proyecto de investigación no publicada. Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo", Valencia, España*.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, España* (pp. 44-59).
- Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S. y Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM, 47(3)*, 377-390.
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM, 47(3)*, 511-517.
- Otumfuor, B. (2013). *The impact of teacher spatial ability on geometry instruction* (Tesis doctoral). University of Georgia.
- Pittalis, M. y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75(2)*, 191-212.
- Sarama, J. y Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Sinclair, N., Bussi, M., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM, 48(5)*, 691-719.
- Soury-Lavergne, S. y Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM, 47(3)*, 435-449.
- Vázquez, S. y Noriega, M. (2010). La competencia espacial: Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación matemática, 22(2)*, 65-91.