GENERALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN UNA ESTUDIANTE DE CUARTO DE PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO DESDE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL

Generalisation and inductive reasoning by a fourth grader. A case study from the functional thinking approach

Pinto, E.[a] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo abordamos la generalización como parte del proceso de razonamiento inductivo en estudiantes de Educación Primaria. A través de un estudio de caso, describimos cómo una estudiante de cuarto (9 años) sigue los pasos de un modelo de razonamiento inductivo, al trabajar con un problema de generalización que involucra una función lineal. Mediante una entrevista clínica semiestructurada, recogimos evidencias que muestran que la estudiante generalizó la relación entre variables siguiendo, en un orden propio, cuatro de los siete pasos del modelo. Algunos de estos pasos se presentaron de manera simultánea. La estudiante organizó los primeros casos particulares dados, estableciendo una conjetura con base en ellos. Luego, al aumentar el tamaño de los casos particulares, ella modificó sus conjeturas las que luego validó con nuevos casos particulares. Finalmente generalizó.

Palabras clave: *generalización, pensamiento funcional, razonamiento inductivo.*

Abstract

In this paper, we address generalisation as part of the inductive reasoning process with students in elementary grades. Through a case study, we describe how a fourth-grader (9 years old) follows the stages of an inductive reasoning model, working with a generalisation problem that involves a linear function. Through a semi-structured clinical interview, we collected evidence showing that the student generalised the relationship between variables following four of the seven steps, in a particular way. Some stages were presented simultaneously. The student organised the first particular cases given, establishing a conjecture based on them. When increasing the particular cases, the student validated her conjectures with new particular instances. She finally generalised.

Keywords: *generalisation, functional thinking, inductive reasoning.*

INTRODUCCIÓN

La noción de generalización tiene diferentes acepciones, dependiendo de la perspectiva teórica en que nos ubiquemos. Aún así, existe un acuerdo en asumir que la generalización es un elemento central de la actividad matemática en general; y del pensamiento algebraico, en particular (e.g., Kaput, 2008) porque permite la generación de conocimiento matemático (Pólya, 1945). Situados en el contexto del pensamiento algebraico, el número de investigaciones que tratan la generalización en estudiantes de Educación Primaria ha crecido en las últimas décadas, poniendo el énfasis en que generalizar entrega la oportunidad de dar sentido a los cálculos que realizan y apartar la información irrelevante, lo que permitirá establecer conexiones entre las relaciones y estructuras matemáticas identificadas (Stephens, Blanton, Knuth, Isler y Murphy-Gardiner, 2015). Desde el pensamiento funcional, un tipo de pensamiento algebraico que tiene a la función como el contenido matemático esencial (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011), interesa la generalización como

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 457-466). Gijón: SEIEM.

proceso y como producto. En este sentido, nuestro interés de investigación sigue ambos focos: cómo los estudiantes razonan hasta llegar a la generalización (proceso) y cómo expresan dicha generalización (producto). Nos centramos en la generalización de estudiantes de cursos intermedios de primaria al trabajar con tareas que involucran funciones pues este tipo de trabajo se reconoce como una necesidad a profundizar (Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017).

El razonamiento inductivo es uno de los procesos que lleva a la generalización y su importancia radica en que, por una parte, favorece la construcción de conocimiento científico mediante la observación de casos particulares y, por otra, permite la verificación de una conjetura mediante el trabajo con casos particulares (Pólya, 1945). Existen escasas investigaciones que tratan este tipo de razonamiento en cursos de primaria y algunas investigaciones han estado centradas en: (a) Educación Infantil (e.g., Majón, 2016), (b) en los primeros o últimos cursos de primaria (e.g., Lampert, 1990), o (c) al describir el trabajo de los estudiantes de todos los cursos de primaria (e.g., Ortiz, 1998).

Por tanto, el objetivo general de investigación es describir el proceso de generalización de un estudiante de cuarto de primaria, al trabajar con un problema que involucra una función lineal, mediante un modelo de razonamiento inductivo.

GENERALIZACIÓN

Algunos autores señalan que la generalización se ha abordado en Educación Primaria como: (a) el desarrollo de una regla que sirve como una declaración sobre relaciones y propiedades, (b) la extensión o ampliación de rangos de razonamiento más allá de los casos considerados, y (c) la identificación de aspectos comunes entre los casos (Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017). Asumir la generalización como proceso (generalising) supone referirse a cualquiera de los tres elementos anteriores, mientras que la generalización como producto (generalisation) se refiere al resultado de los tres elementos descritos.

Desde el enfoque funcional del pensamiento algebraico, la generalización incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresando dichas relaciones mediante diferentes representaciones (verbal, simbólica, tabular, gráfica, por ejemplo), así como razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). Investigaciones previas (e.g., Pinto y Cañadas, 2017) muestran que estudiantes de tercero y quinto de primaria expresaron la generalización de relaciones entre variables al trabajar con el problema de las baldosas (Figura 1).

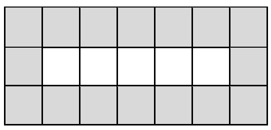

Figura 1. Imagen del problema de las baldosas (p. 410)

Los estudiantes, respondiendo a diferentes preguntas que buscan determinar la cantidad de baldosas grises dado el número de baldosas blancas, establecieron relaciones generales como: "el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6" o "fórmula = (X x 2) + 6 = 16; X = número de baldosas blancas". Ambas respuestas, expresadas mediante diferentes representaciones, aluden a la relación general. Interesa, por tanto, profundizar en cómo los estudiantes de estos cursos llegan a establecer este tipo de relaciones.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

En el contexto de la Educación Matemática, el razonamiento inductivo involucra el trabajo con casos particulares y la generalización a partir de ellos, mediante la búsqueda de patrones basados en los casos presentados, la formulación de conjeturas a partir del patrón y la comprobación de dicho patrón (Pólya, 1945). Cañadas y Castro (2007) describen el razonamiento inductivo mostrado por estudiantes de Educación Secundaria en problemas de generalización a través de un modelo constituido por siete pasos y diseñado *ad hoc*. En la Figura 2 presentamos una síntesis de dicho modelo.

1. Trabajo con casos particulares. Comienza la experimentación con los casos particulares involucrados en el problema.
2. Organización de casos particulares. Los casos particulares son organizados de alguna manera, empleando diferentes estrategias para facilitar el trabajo con los casos involucrados.
3. Búsqueda y predicción de patrones. Los casos particulares son observados (que pueden o no estar organizados) y, a partir de dicha observación, se establece el siguiente caso.
4. Formulación de conjeturas. Una conjetura es “una afirmación basada en hechos empíricos, que no ha sido validada” (p. 69). En esta etapa, la formulación de conjeturas está basada en casos particulares que aún no han sido comprobados.
5. Validación de conjeturas. La validación de conjeturas se realiza con nuevos casos específicos (diferentes a los del paso previo), pero no para el general.
6. Generalización. Una vez validada la conjetura, esta satisface a todos los casos (incluyendo al caso general).
7. Demostración. Corresponde a la presencia de razones que explican la conjetura, con el objetivo de persuadir a otra persona que la generalización ha quedado validada (podría ser una prueba formal).

Figura 2. Modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007)

En relación con el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), las autoras destacan que: (a) no todos los pasos tienen la misma importancia y la generalización es uno de los pasos clave en el proceso, (b) no se tienen que dar todos los pasos para lograr la generalización, y (c) los pasos no se tienen que dar en el orden descrito para llegar a la generalización. Diversas investigaciones han utilizado este modelo para: (a) describir el razonamiento inductivo de estudiantes de Educación Infantil (e.g., Majón, 2016), (b) diseñar cuestionarios que indagan en el proceso de generalización de estudiantes los primeros cursos de Educación Primaria (e.g., Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, aceptado) y (c) describir y caracterizar el razonamiento inductivo de maestros de primaria en formación (Barrera, Castro y Cañadas, 2009). En Educación Infantil, por ejemplo, Majón (2016) describe y caracteriza el razonamiento inductivo de 12 estudiantes de 5 y 6 años al resolver un problema de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. Los principales resultados muestran que los estudiantes evidenciaron tres pasos del modelo, incluyendo un estudiante que generalizó la relación funcional involucrada en el problema.

MÉTODO

La investigación que presentamos es cualitativa y exploratoria. Específicamente, presentamos un estudio de caso de una estudiante de cuarto de primaria (9 años), mediante la realización de una entrevista clínica semiestructurada (Ginsburg, 1997).

Contexto de la investigación

Durante el curso 2014-2015 trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de tercero de un colegio español, con los que exploramos diferentes aspectos del pensamiento funcional, en el contexto de un experimento de enseñanza. En la Tabla 1 presentamos un resumen de las tareas trabajadas con los estudiantes en cada una de las sesiones.

Tabla 1. Sesiones previas

Sesión	Enunciado del problema	Función involucrada
1	María y Raúl son dos hermanos que viven en la Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	f(x)=x+5
2 y 3	Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.	f(x)=3x
4	Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño.	f(x)=2x+6

Sujeto de investigación

Después de analizar las respuestas de los estudiantes a las diferentes tareas, encontramos que estos expresaron relaciones de correspondencia y covariación en algunas tareas, así como la generalización de algunas de estas relaciones. Por ejemplo, en el trabajo de la cuarta sesión, tres estudiantes generalizan la relación funcional de correspondencia, mediante diferentes representaciones (Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016). A partir de dicho análisis, organizamos a los 24 estudiantes en tres grupos según su rendimiento (alto-medio-bajo), con base en sus avances en la identificación de patrones y en la generalización. Para profundizar en el trabajo y razonamiento de los estudiantes, entrevistamos a ocho estudiantes un curso después. Estos estudiantes fueron seleccionados por la tutora de la clase, de entre los tres grupos que le proporcionamos y teniendo en cuenta que tuvieran buena disposición a colaborar.

En este trabajo nos centramos en una de estas ocho estudiantes entrevistadas: Susana[1] (9 años). La estudiante tiene un desempeño académico similar al promedio de sus compañeros y durante las sesiones del experimento de enseñanza generalizó la relación entre variable en una de las tareas propuestas (problema de las edades de María y Raúl). Escogimos a esta estudiante pues generaliza la relación entre variable presentada en la tarea que presentamos a continuación.

Entrevista e instrumento de recogida de datos

Implementamos entrevistas clínicas semiestructuradas pues permiten obtener información más específica y las preguntas se van acomodando a las respuestas de los estudiantes (Ginsburg, 1997). En la Figura 3 presentamos el problema planteado a Susana.

Elsa quiere llevar a todos los amigos que tiene en el mundo a Arendelle para que estén con ella cuando sea nombrada reina. Para eso ha decidido conducir un tren que salga desde Granada y que pare en todos los pueblos en los que Elsa tiene amigos. El tren es conducido por Elsa. En cada pueblo que para el tren, ella recoge a 3 amigos.

Figura 3. Problema del tren

Este problema involucra la función f(x)=3x+1. Una vez presentado el problema, planteamos preguntas que seguían el modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007), con el propósito de indagar sobre los mismos. Estas preguntas involucran:

- casos particulares (e.g., la tercera parada está en Málaga, ¿cuántos pasajeros irán en el tren al salir de la estación de Málaga?),
- la relación general (Elsa ha parado en un pueblo y no recuerda qué número de parada es la de ese pueblo, pero al llegar a la estación, ve en qué número de parada está. ¿Cómo puedes saber cuántas personas hay en el tren?”), y

- el uso de la letra (e.g., "Elige una letra para representar el número de pueblos en los que Elsa tiene amigos ¿Por qué eliges esa letra? ¿Qué valores puede tener esa letra? ¿Cuántos amigos van en el tren?).

Durante la entrevista, la estudiante disponía de un papel y lápiz que podía emplear libremente. La entrevista fue grabada mediante videocámara. Por tanto, nuestras fuentes de información son: (a) vídeo de la entrevista, (b) transcripción de la entrevista y (c) producción escrita de la estudiante.

Categorías y análisis de datos

Con base en el objetivo de investigación, diseñamos un sistema de categorías que parte de los siete pasos del modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007). El tercer paso de este modelo de razonamiento está centrado en la idea de patrón. Desde el marco del pensamiento funcional, nos parece relevante modificar la idea de patrón (la que está más asociada a la recurrencia que al establecimiento de una relación funcional) por la noción de estructura, entendida como la composición de un conjunto de elementos numéricos (expresados mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y las propiedades de dichas operaciones (Pinto y Cañadas, 2017). De esta forma, nos parece más coherente, bajo nuestra perspectiva de trabajo, hablar de "identificación de estructuras" en el tercer paso.

Emplearemos la variable tiempo de desarrollo de la entrevista para describir el proceso que sigue Susana. Para realizar esta descripción, empleamos un gráfico que recoge los pasos del modelo, marcando regiones rectangulares que representan el tiempo de la entrevista que la estudiante ha estado en cada paso. Así mismo, indicamos el momento en que se realizó cada tipo de pregunta (caso particular, caso general o uso de letra).

RESULTADOS

De manera general, la entrevista tuvo una duración de 12 minutos. En la Figura 4 presentamos los tiempos que siguió Susana en cada uno de los pasos del razonamiento inductivo.

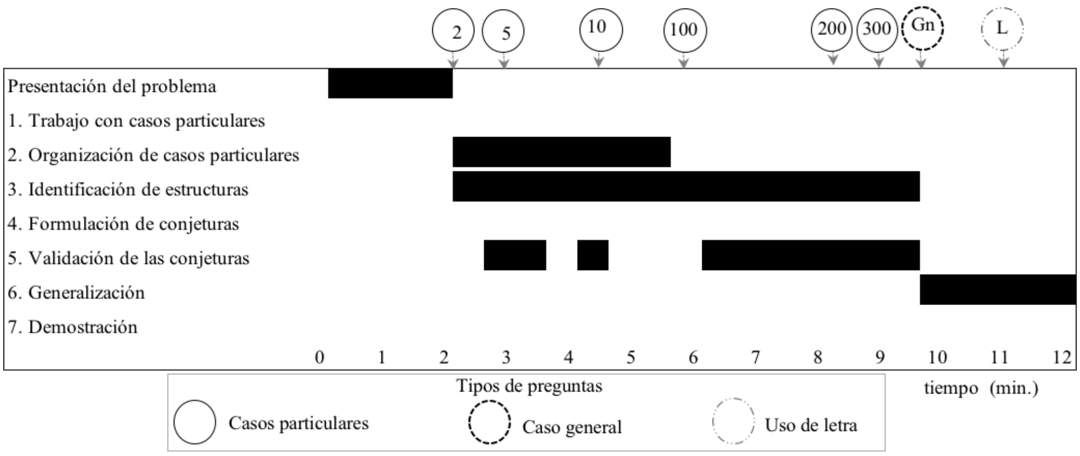

Figura 4. Proceso de generalización de Susana

En la Figura 4 se observa que, tras la introducción del problema (2 minutos), Susana estuvo más de tres minutos organizando casos particulares y más de siete minutos identificando estructuras. Por otra parte, la validación de sus conjeturas se observa en diferentes partes de la entrevista (no marcamos el paso "formulación de conjeturas" pues consideramos que para validar conjeturas el estudiante ya las formuló, por lo que no es necesario incorporar información extra). En los últimos dos minutos de entrevista, la estudiante generalizó y no llegó a la demostración. A continuación, presentamos algunos extractos que ayudan a clarificar cada paso del modelo que sigue la estudiante, lo que permitirá describir el proceso que sigue Susana al generalizar, añadiendo algunos fragmentos de la transcripción de la entrevista y de sus respuestas escritas.

Organización de casos particulares

Una vez introducido el problema, la entrevistadora (E) realizó preguntas que involucraron diferentes casos particulares (2, 5 y 10). Susana (S) debía responder cuántas personas iban en el tren tras la parada indicada. En el siguiente extracto presentamos las respuestas de la estudiante al primer caso particular.

25. E: La primera parada es en Armilla y ahí se suben tres pasajeros. La siguiente parada la va a hacer en Albolote.
26. S: Y se suben otros tres [pasajeros].
27. E: Eso. Cuando salga de Albolote, ¿cuántas personas irán en el tren?
28. S: Siete, contando con Elsa.

En este extracto se observa que la estudiante ha respondido correctamente a la pregunta (línea 8) pero no tenemos evidencias de si establece la relación entre variables pues solo responde a la pregunta. En este extracto, la estudiante tardó menos de un minuto en responder. Luego, se presentaron dos nuevos casos particulares: 5 y 10, con los cuales Susana tardó aproximadamente tres minutos en organizarlos. De manera espontánea, la estudiante representó estos nuevos casos particulares (5 y 10), así como otros previos a los números preguntados, tal como se observa en la Figura 5.

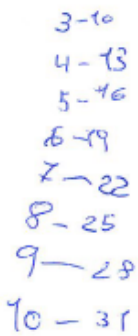

Figura 5. Organización de casos particulares de Susana

Susana organizó los casos particulares en dos columnas. En la columna de la izquierda, ubicó el número de paradas y en la columna derecha el número de personas en el tren, separando ambas cantidades por un guión (–). Al explicar su procedimiento, la estudiante señaló que “siempre va sumando tres”. La estudiante evidenció recurrencia en el cálculo de los casos particulares, al determinar la cantidad de pasajeros en una determinada parada.

Identificación de estructuras

Tras la organización de casos particulares mostrada anteriormente, las siguientes preguntas involucraron casos particulares mayores que 100. En el siguiente extracto presentamos la discusión entre la entrevistadora y la alumna al preguntarle por la cantidad de personas en 100 paradas.

31. E: Y ahora imagínate que siguen pasando paradas (…) y llegamos a la parada 100.
32. S: ¡Uy!
33. E: ¿Cómo lo calcularías? [pasajeros que van en el tren]
34. S: Pues no pondría todo esto [indicó los datos organizados de la Figura 5].
35. E: Porque estaríamos aquí la mañana o el día, ¿verdad?
36. S: Sí. Haría 4 por 100 (…). Sí, 4 por 100.
37. E: ¿Por qué?

38. S: Porque en la parada 2 hay 7 personas. Pero en la parada anterior había 4 personas [refiriéndose a la cantidad de pasajeros en la parada 1] (…) entonces, lo multiplico por 100 y me da 400.

39. E: Pero, te voy a preguntar una cosa: ¿aquí también te sirve multiplicar por cuatro? [indicando al caso particular relativo a 10 paradas].

40. S: (…) Me he equivocado. Es por tres.

41. E: ¿Por qué por tres?

42. S: Porque son 3 personas las que se suben.

43. E: Vale. (…) y cuándo llevas 100 paradas, ¿cuántas personas van?

44. S: 300.

45. E: ¿Y ahí van todas las personas? ¿o te falta alguien?

46. S: ¡Elsa! 301 personas [agrega uno a la cantidad final].

En el extracto anterior, la estudiante identificó tres estructuras diferentes: (a) multiplicar por 4 (línea 36), (b) multiplicar por 3 (línea 40) y (c) multiplicar por 3 y sumarle uno 1 (línea 46). En la Figura 6 presentamos la expresión escrita de Susana al determinar la cantidad de personas que van en el tren después de 100 paradas.

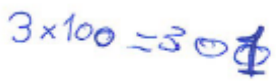

Figura 6. Evidencia de la estructura "multiplicar por tres y sumar 1"

En esta respuesta se observa que, después de escribir 3x100=300, Susana incluye el valor constante de la función, resultando 301. De esta forma, la estructura "multiplicar por 3 y sumarle 1" es adecuada al problema. Esta misma estructura, que involucra a las dos variables, la empleó para los casos particulares 200 y 300, así como también para el caso general, tal como describimos en las siguientes secciones (ver líneas 49-54).

Validación de conjeturas

La validación de conjeturas aparece, transversalmente, en el trabajo con diferentes casos particulares. Tres veces la estudiante validó su conjetura: (a) con el caso particular 5 (en un minuto), (b) con el caso particular 10 (menos de un minuto) y (c) con los casos particulares 100, 200 y 300 (casi cuatro minutos). En el extracto anterior, por ejemplo, Susana identificó tres estructuras diferentes. Con las dos estructuras primeras, Susana comprobó con otro caso particular que no eran válidas y modificó su respuesta (líneas 40 y 46). En la validación de la última estructura, multiplicar por tres y sumarle uno (línea 46), se generó el siguiente diálogo.

49. E: (…) ¿Y si son 200 paradas?

50. S: Pues sería lo mismo. Tres por 200, que sería como si fuera un dos [refiriéndose al 200]. Sería seis (…) sería igual a 601 personas (…) [la estudiante escribe la expresión de la Figura 7].

Figura 7. Validación de la conjetura de Susana

51. E: ¿Y si fueran 300 paradas? (…)

52. S: mmmm. ¡901! (…)

53. E: Lo has hecho súper rápido esta vez. ¿Cómo lo has hecho?

54. S: Pues, ya, como tenía esto [refiriéndose a la respuesta anterior]. He pensado tres por tres son nueve, le pongo dos ceros más uno: 901. [La estudiante escribe “300–901”].

En este extracto, Susana validó su conjetura con los casos particulares 200 y 300. En la Figura 7 es posible identificar que Susana expresó numéricamente cómo determinar la cantidad de personas que va en el tren, dadas 200 paradas. Inicialmente registró 600 y después escribió el 1 para formar 601 (línea 50). Por otra parte, en la línea 54 la estudiante solo registró los valores de las variables “300–901”.

Generalización

Susana, tras validar su conjetura “multiplicar por tres y sumar uno” con los casos particulares 2, 5, 10, 100, 200 y 300 expresó la regla para el caso general. A continuación, presentamos un extracto.

58. E: Entonces, ¿lo haces todo el rato igual? [refiriéndose a cómo llegó a las respuestas de los casos previos]

59. S: Sí.

60. E: Entonces, para cualquier número de paradas, ¿cómo lo vas a hacer?

61. S: (…) multiplicando ese número por tres más uno.

De manera verbal, la estudiante expresó la regla que relaciona las variables (número de paradas y cantidad de personas) del problema (línea 61). En el siguiente fragmento se observa la introducción de otras posibles representaciones de la generalización.

62. E: (…) Si Z es cualquier número de paradas. ¿Cómo podrías explicar tú, en general, cómo calcular el número de personas?

63. S: Pues multiplicaría ese 3 por este *Z* y le sumaría siempre 1.

64. E: Vale. ¿Y sabrías escribir eso que me acabas de decir?

65. S: Creo que sí [la estudiante escribe las expresiones de la Figura 8].

a. b.

Figura 8. Respuestas de Susana usando letras y números

La Figura 8a fue la primera representación que usó la estudiante. En esta expresión, Susana empleó la letra que mencionó la entrevistadora (*Z*) y el número 1. Al pedirle que explique su respuesta, ella señala: “no sé, es que no sé qué es *Z*”. A continuación, la entrevistadora le pregunta por otra forma de expresar su idea usando la letra *Z*, por lo que la estudiante escribe lo que aparece en la Figura 8b, y dice “tres mil trescientos treinta y uno”, sin entregar detalles sobre la forma de expresar dicha relación.

Finalmente, la entrevistadora preguntó a Susana por la validez de la expresión simbólico-algebraica “*Z* x 3 + 1”. En el siguiente extracto presentamos la discusión que se generó entre ambas.

79. E: ¿Te parece que eso puede estar bien? [refiriéndose a la expresión *Z* x 3 + 1].

80. S: Sí (…) Pero tendría que saber qué número es este [refiriéndose a *Z*].

81. E: Claro. Y ya cuando sepamos qué número es ese, ya sabemos el número total.

82. S: Sí.

En este extracto, la estudiante acepta la expresión dada (línea 80) pero tiene la necesidad de otorgar un valor numérico concreto a *Z*. A continuación, Susana espontáneamente coloca el signo igual (=) y encierra la letra Z en un cuadrado con un signo de interrogación, como mostramos en la Figura 9.

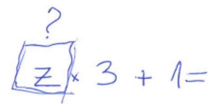

Figura 9. Representación del caso general con simbolismo algebraico

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos una adaptación del modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) para describir el proceso de razonamiento inductivo en general y de la generalización en particular, que sigue una estudiante de cuarto de primaria, al resolver un problema que involucra una función lineal. La adaptación del tercer paso del modelo original (búsqueda y predicción de patrones) a la "identificación de estructuras" nos ha permitido resaltar el rol que tiene la relación entre las variables del problema (número de parada y número de pasajeros). Por otra parte, y tal y como destacan las autoras del modelo, Susana siguió cuatro pasos del citado modelo, en un orden diferente al propuesto. Antecedentes muestran que estudiantes de Educación Infantil mostraron evidencias de tres pasos del modelo de razonamiento: identificación de patrones, validación de conjeturas y generalización (Majón, 2016), a diferencia de los cuatro pasos evidenciados por Susana: la organización de los casos particulares es el elemento que aparece en esta estudiante y que se diferencia con los resultados en contextos de Educación Infantil.

El análisis del tiempo que la estudiante pasa trabajando en cada uno de los pasos del modelo de razonamiento inductivo, así como la organización de la información en el esquema presentado, contribuyen a los trabajos previos de forma novedosa. En particular, incluir el tiempo como un elemento descriptivo nos ha permitido resaltar que hay pasos que se presentaron de manera transversal y simultánea durante la entrevista (organización de casos particulares, identificación de estructuras y validación de conjeturas), logrando identificar en qué momento de la entrevista esto se produjo, así como con el tipo de pregunta que esta situación ocurrió.

Asumir la generalización como un proceso y como un producto nos permite comprender cómo los estudiantes generalizan. Particularmente, logramos describir cómo Susana, de manera natural, organizó los primeros casos particulares, estableciendo una regla recursiva. A medida que fue validando sus conjeturas con otros casos particulares, la estudiante las modificó, quedándose con que "multiplicar por tres y sumar uno" satisface su respuesta a diferentes casos particulares. Susana empleó la estructura incluso al trabajar con una letra: *Z Z Z* 1 (tres veces la letra y luego pone el uno para incluir a Elsa). La estudiante está siendo consistente con la estructura identificada. Posteriormente, Susana aceptó el uso de la letra como una expresión, pero enfatizó que necesitaba conocer su valor, por lo que le otorga un significado de incógnita (Molina, Ambrose y del Río, 2018), escribiendo los signos "?" e "=" (Figura 9).

Susana generalizó la relación entre variables de manera verbal (multiplicando ese número por tres más uno), aunque en los pasos previos del modelo de razonamiento empleó diferentes representaciones (tabular, verbal, simbólico-numérico, simbólico-algebraico). Por otra parte, durante la entrevista, la estudiante fue validando y justificando sus conjeturas, lo que permite resaltar lo que señalan algunos autores: la relación entre la generalización y la justificación es esencial en el aprendizaje matemático (e.g., Strachota, 2015). Las dos ideas anteriores, sobre representaciones y justificación, apuntan a una línea abierta de investigación interesante en la descripción del trabajo de los estudiantes. Somos conscientes de las limitaciones que tiene un estudio de caso, dado lo reducido de la muestra. Destacamos que esto nos ha permitido profundizar en el razonamiento de esta estudiante y abre posibles líneas de trabajo para una muestra mayor.

Notas

[1]Empleamos nombres ficticios para proteger la identidad de los estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; el primer autor es becario de una beca de doctorado otorgada por el Gobierno de Chile a través de CONICYT, folio 72160307-2015.

Referencias

Barrera, V. J., Castro, E. y Cañadas, M. C. (septiembre, 2009). *Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación*. Trabajo presentado en el grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del XIII congreso de la SEIEM. Santander, España: SEIEM.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Majón, M. (2016). *Generalización y razonamiento inductivo de alumnos de Educación Infantil en tareas de patrones numéricos* (Trabajo de Fin de Master). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Ambrose, R. y del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-years-old. The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 261-280). Nueva York, NY: Springer.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (aceptado). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias.*

Ortiz, A. (1998). Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en Educación Primaria. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 33-55). Pamplona, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press.

Stephens, A., Blanton, M. L., Knuth, E., Isler, I. y Murphy-Gardiner, A. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA: NCTM.

Strachota, S. (2015). Conceptualizing generalization. *IMVI Open Mathematical Education Notes*, 6, 41-55.