EMERGENCIA DE ALGUNOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS DURANTE LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ESPACIAL

Emergency of some geometric knowledge during the solution of a spatial problem

Rojas, C.[a] y Sierra, T.[a]

[a]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este estudio se presentan los primeros resultados de una investigación empírica en la que se ha implementado un dispositivo didáctico, para someter a prueba la hipótesis sobre la emergencia de algunos conocimientos geométricos en la búsqueda de solución de un tipo de problema espacial. El problema espacial abordado ha consistido en el análisis, diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro. El análisis de algunos de los diálogos que se presentaron en la resolución de una de las tareas que formaron parte de dicho problema, ha permitido, además de evidenciar de manera explícita la emergencia de algunos conocimientos geométricos, identificar algunas dificultades en la elaboración de las técnicas que se usaron para llevar a cabo dichas tareas.

Palabras clave: *problemas espaciales, conocimientos geométricos, recorrido de estudio e investigación.*

Abstract

In this study we present the first results of an empirical research in which didactic device has been implemented, in order to test the hypothesis about the emergency of some geometric knowledge in the search of a solution of a spatial problem type. The addressed spatial problem has consisted in the analysis, design and construction of a container with one liter of capacity. The analysis of some of the dialogues that were presented in the resolution of one of the tasks that were part of this problem, has allowed us, in addition to explicitly evidence the emergence of some geometric knowledge, identify some difficulties in the development of techniques that were used to carry out those tasks.

Keywords: *spatial problems, geometric knowledge, study and research course.*

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En estudios previos (Gascón, 2003, 2004), a partir del análisis de las limitaciones que impone la estructura curricular a la acción educativa del profesor, se ha planteado una discusión teórica que establece una relación de causalidad entre las restricciones que impone dicha estructura –determinada a su vez por ciertas esferas de la sociedad– y el encierro temático al que se enfrenta el profesor en su labor. Dicho encierro, hace referencia a la nula injerencia que tiene el profesor sobre la organización del currículo, pues se ha convertido en un *administrador* de los temas que allí se plantean para ser enseñados. Esta situación contribuye a que se produzca una pérdida de la *razón de ser* de algunos de los saberes que se abordan en la escuela, entre ellos, el de algunos de los conocimientos geométricos enseñados la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Recientemente, en una de las investigaciones que se vienen desarrollando en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), también se ha encontrado que en el ámbito de la enseñanza de la geometría en la ESO, no están presentes las cuestiones a las que responde o debería responder

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

dicho saber escolar. La necesidad de atender esta problemática, surgió tras analizar el currículo de matemáticas y algunos de los libros de texto de la ESO (Rojas y Sierra, 2017). En dicho análisis, se encontró –entre otros– que los tipos de tareas propuestos en los libros de texto se justifican con las técnicas diseñadas para tal fin, y viceversa. Esto tiene relación, por una parte, con el carácter justificativo circular que se produce entre el tipo de tareas y la técnica propuesta para resolverlas y, por otra parte, con el aislamiento escolar de las técnicas.

En dicha investigación, se ha encontrado que una vía para recuperar alguna de las razones de ser de la geometría elemental puede surgir de la identificación, planteamiento y resolución de algunos problemas espaciales (Rojas y Sierra, 2018). Problemas para los cuales no se preestablecen técnicas que remitan ni a una única vía de solución, ni a un único conocimiento geométrico. Por tanto, en el proceso de búsqueda de posibles soluciones, pueden emerger diferentes técnicas igualmente útiles, que involucran varios de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO. De ahí que, la presencia de estos saberes pueda aparecer de manera justificada e interconectada, consolidando o generando los conocimientos geométricos.

Con base en lo anteriormente expuesto, hemos decidido hacer frente al problema de investigación que explicitamos así:

Actualmente, en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes, se proponen una serie de saberes geométricos a enseñar, sin que aparezcan las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.

En correspondencia con este problema, hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas (OMD) en torno a la geometría elemental de la ESO pueden plantearse de modo que los alumnos puedan encontrar en ellas una posible razón de ser de dichos conocimientos?

Cuando hacemos alusión a los saberes, nos estamos refiriendo a un tipo de conocimiento que ha sido construido, validado e institucionalizado, en diferentes momentos de la historia humana. Es el tipo de saber al que Chevallard (1997) se refiere como, saber sabio. Varios de estos saberes, llamados *saberes a enseñar*, son los que aparecen propuestos en el currículo escolar. Dichos saberes para llegar a ser enseñados por el profesor y aprendidos por los alumnos deben ser transformados, es decir, deben ser reconstruidos para ser enseñados y aprendidos en la institución escolar. Es justamente en dicha reconstrucción de los saberes, donde aparecen los fenómenos de transposición didáctica. Uno de ellos es el fenómeno de la *pérdida de la razón de ser* de la geometría elemental presente en el currículo de la ESO, que pretendemos estudiar en esta investigación.

La atención a dicho fenómeno nos ha conducido a la necesidad de elaborar e implementar un recorrido de estudio e investigación (REI), que trata sobre el *diseño, análisis, y construcción de un envase*. Es justamente a partir de los resultados de la implementación de este dispositivo didáctico (i.e., el REI) con estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria en Getafe (España) que presentamos y discutimos la emergencia de algunos conocimientos geométricos, así como las limitaciones observadas durante su uso. En este trabajo solo presentaremos el análisis de una de las fases de la construcción de un envase con forma de tetraedro regular y, más concretamente, solo nos centraremos en el análisis de la génesis y desarrollo de las técnicas matemáticas utilizadas para trazar un triángulo equilátero.

Antes de continuar, presentaremos las características generales de varias nociones que intervienen en esta investigación, y que son determinantes para su discusión.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se sustenta en dos grandes fuentes documentales. La primera, ofrecida por la TAD, sobre el modelo de organización matemática a estudiar, y el de organización didáctica para estudiarla. La segunda, sobre los diferentes estudios que han abordado y mostrado la interrelación existente entre problemas espaciales y conocimientos geométricos.

Sobre la teoría antropológica de lo didáctico

Dentro de la TAD, el conocimiento matemático es concebido en estructuras cuya unidad mínima es la organización o praxeología matemática (OM). Estas estructuras se componen de:

> *[...] tipos de tareas*, *T*; *técnicas*, τ; *tecnologías*, θ; y *teorías*, Θ. […] Las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o “saber-hacer” formado por los tipos de tareas y las técnicas [T/τ] y por un bloque teórico o “saber” formado por el discurso tecnológico-teórico [θ/Θ] que describe, explica y justifica la práctica. (Bosch et al., 2004, p. 7)

Esta forma de organización del conocimiento matemático, indica que para realizar un tipo de tareas *T*, es necesario emplear una técnica τ, que permita llevarla a cabo. A su vez, “cada técnica solo permite realizar un pequeño subconjunto de tareas *T* de la cual es relativa y fracasa en la realización de las tareas restantes de ese tipo” (Fonseca, Pereira, y Casas, 2011, p. 101). Por ejemplo, calcular en un triángulo rectángulo ABC la medida de: (a) cualquiera de sus lados, (b) la altura respecto de la hipotenusa, (c) cualquiera de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa, o de (d) cualquiera de sus ángulos agudos, podrían ser consideradas – respectivamente – como tareas t_1, t_2, t_3, y t_4, que forman parte de un tipo de tareas geométricas *T* habitual en la escuela secundaria, consistente en determinar y construir un triángulo rectángulo.

Si revisamos las técnicas, que suelen apoyar la realización de t_1, t_2, t_3, y t_4, veremos como una sola técnica, no es suficiente para resolver todas ellas. De hecho, basándonos en la observación de la manera en que está concebido *T* en la escuela, podríamos decir que existe una única técnica τ_n, para dar respuesta a cada tarea t_n. Así, por ejemplo, las relaciones expresadas mediante: (a) el teorema de Pitágoras, (b) el teorema de la altura, (c) el teorema del cateto, y (d) las razones trigonométricas, aparecen como elementos que permiten elaborar las técnicas τ_1, τ_2, τ_3, y τ_4, preestablecidas para resolver cada tarea. Incluso, en ocasiones es necesario emplear más de una técnica para realizar una tarea.

El problema radica en que, en la escuela secundaria, “el estudio de las organizaciones matemáticas se centra en el bloque práctico-técnico, [por lo que] la incidencia del bloque tecnológico-teórico sobre la actividad matemática que se realiza es muy escasa” (Fonseca et al., 2011, p. 102). Esto significa que no suele presentarse un discurso razonado que describa, explique y justifique la técnica en cada caso.

Sobre los recorridos de estudio e investigación

Dentro de la TAD, la actividad matemática es concebida como una actividad eminentemente de modelización (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011), cuyo propósito es comprender y dar respuesta a cuestiones suficientemente ricas que no pueden responderse de modo inmediato. Por tanto, desde este punto de vista las matemáticas no son concebidas como un fin en sí mismo, sino como una herramienta que permite dar respuesta a cuestiones problemáticas. Así, hacer matemáticas implica modelizar diferentes fenómenos con niveles de complejidad muy variados, para los cuales se ponen en juego un amplio conjunto de conocimientos. Así, “un modelo ideal de proceso de estudio que propone la TAD para el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización es el recorrido de estudio e investigación (REI)” (Rodríquez-Quintana, Hidalgo-Herrero, y Sierra, 2017, p. 422).

Los REI se caracterizan principalmente, porque parten de una *cuestión generatriz* abierta y rica de la que se derivan varias cuestiones, llamadas *cuestiones cruciales* porque ayudan a dar respuesta a la cuestión generatriz del proceso de estudio, donde el conjunto de saberes involucrados en la búsqueda de soluciones no está dado de antemano (*Ibidem*).

La implementación de un REI comporta ciertas restricciones que han sido documentadas previamente (Rodríquez-Quintana, 2005), las cuales tienen que ver con las dinámicas propias de la institución en la que se pretenda implementar, por ejemplo en la escuela secundaria. Restricciones como las que impone la estructura del currículo, que se traducen en: limitados espacios de tiempo para estudiar y profundizar en un problema, la lógica habitual de la enseñanza donde los problemas van acompañados de respuestas preestablecidas, etc. Por tanto, para poder implementar un REI en la escuela, es necesario o hacer un cambio en las dinámicas habituales de enseñanza o buscar espacios extracurriculares.

Sobre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos

En los estudios que parten de la tesis de René Berthelot y Marie-Hélène Salin (Berthelot y Salin, 1992, 2000, Bloch y Salin, 2004, 2005), y otros en donde previamente se ha preguntado por la enseñanza de la geometría (Brousseau, 2000; Gálvez, 1985), ha quedado establecido que existe una importante interrelación entre problemas espaciales y conocimientos geométricos. Este hecho, pone de manifiesto que la manera en que se aborde un problema espacial, puede conducir a que sea necesario acudir a ciertos conocimientos geométricos durante el proceso de búsqueda de su solución.

Hemos acogido en nuestra investigación la definición de problema espacial presentada por Salin (2004), debido al amplio espectro de situaciones que abarca, y por tanto, a la potencial riqueza de conocimientos que podrían incluir estas situaciones durante su abordaje. Según esta autora, los problemas espaciales se caracterizan a nivel general porque "su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones […] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido" (p. 39).

Marie-Hélène Salin advierte sobre la problemática presente en la enseñanza de la geometría, que apunta hacia el hecho de que los problemas geométricos se encuentran "alejados del espacio físico y sus objetos, […] [enfocándose en] un espacio conceptualizado, el de las «figuras-dibujos» trazadas por este individuo [el estudiante], que no hace más que representarlo" (*Ibidem*, p. 40). Esta situación, implica que en la solución de los problemas espaciales primen las soluciones prácticas e inmediatas, alejadas de la conceptualización geométrica; y que, para los problemas geométricos, primen las que refieren a objetos geométricos, más alejados de aplicaciones prácticas que trasciendan la geometría escolar.

La propuesta para superar la brecha entre la geometría y sus aplicaciones prácticas, consiste en abordar los problemas espaciales de manera que se busque superar las soluciones inmediatas poco eficaces, construyendo un modelo que responda al cuestionamiento central que subyace a dicha problemática. Para la elaboración de ese modelo han de surgir los conocimientos geométricos que nos permitirán dar una solución más eficaz a dichos problemas espaciales. Esto es lo que varios autores han denominado *modelización espacio-geométrica* (Berthelot y Salin, 2000; Bloch y Salin, 2004; Salin, 2004, 2005).

En coherencia con la problemática expuesta y el marco teórico en el que nos basamos, hemos elaborado las hipótesis siguientes que queremos someter a prueba:

1. *Los problemas espaciales en Secundaria pueden constituirse como una posible razón de ser de la geometría elemental, es decir, entendiéndola como una actividad de modelización espacio-geométrica.*
2. *En la resolución de problemas espaciales en Secundaria los conocimientos que aparecen están más ligados a una problemática práctica, y habitualmente está ausente la consideración de una problemática de modelización que debería ser la que permite resolver dichos problemas de un modo más adecuado.*
3. *En la resolución de problemas espaciales los estudiantes de Secundaria tienden a emplear técnicas ya enseñadas anteriormente y renuncian a modificarlas, a articularlas y, en definitiva, a construir técnicas nuevas.*

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta el problema al que decidimos atender en esta investigación, las restricciones que impone el currículo escolar al momento de implementar un REI, y la coyuntura que supone la transición del cuarto al quinto año en la Educación Secundaria en España; decidimos hacer una convocatoria abierta a estudiantes de 4º de la ESO y de 1º de bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de Getafe, para formar un grupo de estudio al que llamamos *semillero matemático*, que funcionaría una vez a la semana durante 90 minutos, en horario extraescolar. Catorce estudiantes acudieron tras la convocatoria, 10 de 4º de ESO y 4 de 1º de bachillerato.

Para someter a prueba la hipótesis, diseñamos un REI en torno al análisis, diseño y construcción de un envase. En dicho REI se han planteado cuestiones en torno a tres tipos de tareas para que sean abordadas en grupos de entre 3 y 4 estudiantes. En el primer tipo, se instó a los estudiantes a realizar un primer análisis de la forma, dimensiones y capacidad, de algunos de los recipientes que actualmente se usan comercialmente para envasar leche, zumo, vino y caldo de pollo. En el segundo, se les solicita que diseñen y construyan un envase en cartulina con capacidad de un litro. Y en el tercero, se les invita a que determinen de manera argumentada, cuál debería ser la forma y las dimensiones del mejor envase, de modo que este tenga una capacidad deseada. Por ahora se han llevado a cabo las dos primeras tareas del REI.

La estructura de trabajo que se sigue en el semillero comporta regularmente tres fases: presentación de la tarea por parte del profesor, trabajo grupal, y puesta en común. Las dos últimas fases están a cargo de los estudiantes y el profesor coordina para que ambas fases se lleven a cabo adecuadamente. El profesor, que a la vez es el investigador, pasa por cada grupo preguntando por las ideas, decisiones, procedimientos, etc., que han emergido durante el abordaje de la tarea. Al final, en el momento de la puesta en común, el profesor interviene planteando preguntas con el objetivo de intentar desvelar la mayor cantidad de elementos que pudieron aparecer durante la búsqueda de respuestas. Dado que los alumnos necesitaron más de una sesión para encontrar respuestas a cada tarea, al inicio de la siguiente se ha hecho un recuerdo del trabajo realizado.

Los datos que se han tomado en la investigación, durante el desarrollo del semillero, provienen de la información registrada: (a) de manera audiovisual, (b) en el diario de campo del investigador, y (c) en el cuaderno de los estudiantes donde describen los procedimientos llevados a cabo.

ALGUNOS RESULTADOS PARCIALES

Ahora analizaremos el desarrollo de las técnicas empleadas para trazar un triángulo equilátero, obteniendo algunos resultados que confirman parcialmente alguna de las hipótesis planteadas.

Durante el desarrollo del REI, cuando los alumnos intentaron dar una respuesta a la cuestión que hace referencia al segundo tipo de tareas, se presentó un momento del estudio que puso de relieve, además de la emergencia de algunos de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo de la ESO, la relación entre la limitación de las técnicas empleadas y la manera en que estas suelen presentarse en los manuales de enseñanza de la geometría. Para ilustrar esta situación, presentamos la trascripción de parte del diálogo que tuvo lugar entre tres estudiantes y el profesor.

Descripción de la situación

En la tercera sesión del semillero se propuso a los estudiantes la cuestión relativa al segundo tipo de tareas, que enunciamos así:

Q_2: ¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro?

Durante el estudio de Q_2, los tres integrantes del Grupo 2 optaron por diseñar un recipiente de forma tetraédrica. Por tanto, convinieron en que, para trazar el desarrollo de dicho tetraedro sobre la cartulina, necesitarían primero trazar un triángulo equilátero. En el siguiente diálogo designamos por Ei al estudiante i y por P al profesor.

E1: ¡Profe! Tenemos un pequeño problema.

P: ¿Sí?

E1: El compás solo se alarga veinte centímetros [haciendo referencia a la distancia de punta a punta], y nos faltan cuatro [sonriendo]

E2: nos falta cuatro, cero con cuatro.

P: […] ¿Por qué necesitan el compás?

E1: para hacer un triángulo […]

E2: para trazar el punto donde se van a unir ambos lados que salen […] de la base del triángulo.

Para la realización del tipo de tareas T_2: “Diseñar un recipiente con forma de tetraedro”, emergió un subtipo de tareas T_{21}, que consistía en trazar un triángulo equilátero sabiendo la cantidad de longitud de uno de sus lados. Ahora bien, para llevar a cabo la tarea concreta del tipo T_{21}, los estudiantes pretendían aplicar la técnica τ_{211}, consistente en, una vez trazado uno de los lados con una regla, trazar dos arcos que se interceptasen, para así ubicar el tercer vértice del triángulo en el punto de corte de ambos arcos. Dichos arcos se deben trazar conservando la misma amplitud del compás mientras se hace centro en cada uno de los extremos del lado del triángulo que tenemos.

Ante la dificultad presentada, los estudiantes pensaron en utilizar el cable de los auriculares de un teléfono móvil. Pero todos estuvieron de acuerdo en que el trazado de los arcos con el cable de los auriculares podría conducir a imprecisiones, y entonces el profesor preguntó si había otra manera de trazar el triángulo.

P: Si conociéramos este ángulo, y conociéramos este ángulo [señalando los ángulos contiguos al lado trazado del triángulo equilátero], podríamos conocer este ángulo [señalando el tercer ángulo]

E2: Mediante una razón trigonométrica…

E1: ¡No!, […] No se puede [enfatizando con el movimiento de la cabeza]. Las razones trigonométricas son para tangente, seno, coseno […]

P: Sí […], pero… ¿Para qué sirven?

E1: Cuando tienes […] la arista, pero tienes que tener un ángulo de noventa grados… y eso, ¡no! [Indicando que, en esta configuración, no era así]

E2: Claro.

Como E1 propuso que para el uso de las razones trigonométricas era necesario tener un ángulo de noventa grados, entonces, el profesor sugirió a los estudiantes que consideraran la altura del triángulo equilátero con respecto al lado que tenían trazado.

E1: […] La altura sería de veinte coma cuatro, y la arista debe ser más [refiriéndose a uno de los lados del triángulo equilátero, que ahora funge como hipotenusa]

P: ¿[…] Veinte coma cuatro?

E1: Sí. Y pues, podrías hallar la arista, y así hallar el ángulo.

E2: ¿En un ángulo… en un triángulo equilátero también…? [Haciendo referencia al uso de las razones trigonométricas]

P: ¿De dónde obtuviste ese veinte coma cuatro? [El estudiante estaba asumiendo que la medida de la altura del triángulo equilátero era igual a la del lado]

E2: Creo… no sé.

E1: Porque… como… ¡ah, no!

E2: ¡No, no, no! Ese no tiene nada que ver.

E2: ¡Pero lo podemos averiguar!

P: Pero, ¿qué ángulo debería ser este […]? [Señalando uno de los ángulos determinados por la altura del triángulo equilátero, sobre el lado trazado]

E1: Rec… noventa.

De este modo, emergió la técnica τ_{212}, que podríamos llamar trigonométrica, que relaciona los lados del triángulo rectángulo con sus ángulos internos. Esto, porque la altura del triángulo equilátero determina dos triángulos rectángulos, posibilitando así el empleo de las razones trigonométricas. Cabe anotar que los estudiantes asumieron que dicha altura del triángulo equilátero bisecaba el lado sobre el que incidía. Sin embargo, cuando el profesor centró su atención en uno de los triángulos rectángulos determinados por la altura del triángulo equilátero, emergió una nueva técnica.

P: […] Si conocemos esta altura de este triángulo [refiriéndose al triángulo equilátero] o este cateto [refiriéndose a la misma altura, pero vista como el cateto del triángulo rectángulo], conoceríamos seguramente este punto [refiriéndose al tercer vértice del triángulo equilátero]

E2: Claro…

P: Y, ¿Cómo calculamos esto [altura o cateto]?

E2: Yo creo que Pitágoras.

La respuesta de E2 presentó una nueva técnica τ_{213}, basada en el teorema de Pitágoras, aun cuando la intención del profesor al preguntar por la altura del triángulo equilátero, que es a la vez cateto del triángulo rectángulo, era que los estudiantes pusieran en juego la técnica trigonométrica que habían mencionado hacía unos instantes. Sin embargo, como uno de los principios de trabajo en el semillero es instar a los estudiantes a que exploren y validen diferentes estrategias de solución, entonces el profesor animó a los estudiantes para que implementasen la técnica que involucraba el uso del teorema de Pitágoras. Luego, se dirigió al Grupo 1, porque le llamaron para formularle algunas preguntas.

Cuando el profesor regresó al Grupo 2, vio que los estudiantes estaban intentando trazar los arcos que inicialmente pretendieron (τ_{211}), empleando para ello un cordel que habían tomado de uno de los zapatos. Entonces, les preguntó si habían empleado el teorema de Pitágoras, como lo habían planteado minutos antes, para calcular la medida del cateto del triángulo rectángulo.

E1: Hemos hecho el teorema de Pitágoras y nos da diecisiete coma sesenta y seis, seis, seis…

P: Entonces […] ¿Por qué no trazaron esta perpendicular [señalando la recta que contiene al cateto mayor del triángulo rectángulo, que a su vez es la atura del triángulo equilátero] con esa longitud? […]

E2: Pues porque como no tenemos, […] no tenemos forma […] lo podemos hacer así o así… [Haciendo un gesto con sus manos mientras sujetaba la escuadra, para indicar que la recta podría no ser perpendicular] Y… como lo hagamos un poco más…

P: Ya comprendo […] el problema es trazar la perpendicular.

E2: Exacto.

P: ¿Qué herramientas de las que tenemos aquí sobre la mesa nos permitirían…?

E2: La escuadra […]

Finalmente, en la puesta en común durante la cuarta sesión del semillero, se pudo constatar que los estudiantes optaron por la aplicación del teorema de Pitágoras (τ_{213}) para localizar el tercer vértice, que les permitió trazar el triángulo equilátero (T_{21}), y así poder dar cuenta del diseño y construcción de un envase en cartulina, con capacidad para un litro (T_2), con forma de tetraedro.

Consideramos importante mencionar que, en el desarrollo de T_2, los estudiantes emplearon una guía que usan habitualmente en las clases regladas de geometría, que presenta un esquema con diferentes sólidos junto a las fórmulas que sirven para calcular su volumen y su área. Así, en el caso del tetraedro, el volumen y el área vienen expresados en función de su arista, del siguiente modo: $V = [(l^3\sqrt{2})/12]$ y $A = [l^2\sqrt{3}]$). Por tanto, cuando el profesor preguntó a los estudiantes por la manera en que habían calculado la medida del lado del triángulo equilátero, de modo que la capacidad del tetraedro fuese de un litro, la respuesta fue:

E1: […] primero probamos con diez, con veinte […] y después pusimos veinte coma cinco y se pasó. Daba cien coma… o sea, […] mil cuatro coma... Y dijimos, pues vamos haciendo veinte coma uno, veinte coma dos, veinte coma tres, veinte coma cuatro… [risas]

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Como hemos visto, durante el desarrollo de T_2, apareció la necesidad de realizar una tarea del tipo (T_{21}) y surgieron tres técnicas (τ_{211}, τ_{212}, τ_{213}), que podríamos asociar con algunos de los saberes que actualmente se proponen en el currículo de la ESO (MECD, 2014). Tales saberes aparecen como un listado de temas segregados. De este modo; τ_{211}, se correspondería con el apartado de *construcciones geométricas sencillas*, propuesto para 1º y 2º de ESO; τ_{212}, con el de *razones trigonométricas*, propuesto para 4º en la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas; y τ_{213}, con el de los *teoremas de Tales y de Pitágoras*, propuesto para 4º en la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Adicionalmente, podríamos mencionar una segunda tarea del tipo T_{22}, a la que se enfrentaron los estudiantes tras definir la forma que iba a tener su envase, esta es, calcular la medida del lado del triángulo equilátero o arista del tetraedro. Para llevar a cabo dicha tarea, los estudiantes emplearon la técnica τ_{221}, consistente en probar una serie de valores de manera que el volumen se aproximara lo más posible a 1000 cm^3.

Aunque la alusión a algunos de los saberes propuestos en el currículo de la ESO, se hizo presente durante el abordaje de T_2, ello no implica que dichos saberes hayan pasado a formar parte funcional de los conocimientos de los estudiantes. De una parte, porque tales conocimientos no aparecieron de manera interrelacionada; y de otra, porque no fueron del todo eficaces para llevar a cabo esta tarea. Sin embargo, la situación que condujo a los estudiantes a construir diferentes técnicas en cuya aplicación encontraban cada vez nuevas limitaciones – debido a no poder usar el compás –, constituye un fenómeno rico que podría permitirles darse cuenta que en la solución de un problema intervienen diversos conocimientos y técnicas que se interrelacionan.

Ahora bien, la falta de interrelación entre las diferentes técnicas que emergieron durante el abordaje de T_2, pone de manifiesto el impacto que tiene la estructura del currículo en el aprendizaje de las matemáticas, en términos de que ha habituado a los estudiantes a abordar problemas para los cuales existen ya previamente conocimientos y técnicas preestablecidos. Un ejemplo de ello lo encontramos cuando ante la emergencia de la técnica τ_{212}, E2 preguntó si también era posible el uso de las razones trigonométricas en un triángulo equilátero. Esto ratifica el hecho de que en la escuela secundaria:

> No se cuestiona hasta qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan dichas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada (Fonseca et al., 2011, p. 102).

Ello advierte sobre la imperiosa necesidad de reorganizar el currículo, ya que tal como se presentan los saberes en los textos escolares no aparece el carácter funcional que tienen o deberían tener.

Además, hemos observado que estudiantes motivados por resolver un determinado tipo de tareas, ante la necesidad de tener que construir una técnica nueva que les permita resolver una tarea, fracasan o desconfían de que dicha técnica elaborada pueda ser válida. Creemos que este hecho es debido a que en los textos escolares utilizados por nuestros alumnos siempre que se propone un tipo de tareas a resolver, previamente se ha explicado la técnica que tienen que utilizar para resolver esas tareas. Así, en el proceso de estudio implementado, los alumnos han insistido mucho en utilizar la técnica τ_{211}, porque era la técnica explicada en sus clases regladas para la construcción de un triángulo equilátero. Sin embargo, en el momento que dicha técnica no se ha podido poner en práctica, los alumnos se han visto en la necesidad de tener que elaborar una técnica nueva. De hecho, han intentado construir dos técnicas nuevas (i.e., τ_{212} y τ_{213}), pero siempre han mostrado reticencias a usarlas porque pensaban que no podían funcionar bien.

El carácter justificativo circular que hemos mencionado entre tareas y técnicas, implica a su vez, en términos de la TAD, que apenas existe un discurso tecnológico razonado que describa, justifique y explique las técnicas usadas y que las interrelacione. Indicios fuertes de ello, es que la conexión clara entre las diferentes técnicas emergidas durante la realización de tareas del tipo T_2, no emergió en ningún momento. Así las tareas propuestas en los textos escolares siempre pueden resolverse mediante las técnicas explicadas previamente. Este hecho induce a pensar a los alumnos que las técnicas enseñadas nunca fracasan. En nuestro caso, los alumnos se han visto sorprendidos porque la técnica enseñada en clase no funcionaba y se han visto obligados a tener que elaborar una técnica nueva, actividad para la que la enseñanza recibida no les ha preparado.

CONCLUSIONES

A la luz de los primeros resultados obtenidos durante la implementación del REI, y de la discusión sobre los mismos, concluimos que:

- En la resolución de un problema espacial, efectivamente emergen varios de los conocimientos geométricos que aparecen en el currículo escolar; no obstante, las limitaciones que impone la forma en que este mismo currículo estructura los conocimientos, generan una visión segregada de sus aplicaciones.
- Se deben proponer procesos de estudio donde prime la necesidad de que los alumnos tengan que elaborar las técnicas que permitan resolver las tareas propuestas.
- Consideramos importante que en dichos procesos de estudio los alumnos necesiten describir, explicar y justificar las técnicas empleadas para solucionar los problemas propuestos. Además, dichos problemas deben permitir encontrar la conexión entre las distintas técnicas.
- Es necesario impulsar, en la actividad matemática realizada, el hecho de que las técnicas utilizadas siempre tienen un dominio de validez. Para ello, se deben plantear tareas donde dichas técnicas fracasen y los alumnos sientan la necesidad de construir técnicas nuevas que permitan su resolución.
- Las dinámicas de estudio que se crean durante la implementación de un REI, generan condiciones propicias para que todos los estudiantes se impliquen en la búsqueda de respuestas a las cuestiones planteadas, responsabilizándose de construir las técnicas necesarias para resolver las tareas que han surgido de dichas cuestiones. Así, podemos afirmar que dicho dispositivo didáctico favorece un *aprendizaje funcional*, donde los conocimientos matemáticos surgen siempre como respuesta a cuestiones que deben estudiar los alumnos. De modo que algunas de dichas cuestiones se van a convertir en algunas de las razones de ser de dichos conocimientos matemáticos.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral. Université de Bordeaux I. Bordeaux. Francia.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, *56*, 5-34.

Bloch, I. y Salin, M. H. (2004). Espace et géométrie: géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. En *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2000* (pp. 293-306).

Bloch, I. y Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. En M. H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *Vol. 24*/2.3, 205-250).

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. En *Actes du 2e seminaire de didactique des mathématiques* (pp. 67-83). Université de Crète, Département des Sciences de l'Education, Rethymon.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. (Traducción de Claudia Gilman). Buenos Aires: Editorial Aique. (Edición original en francés: 1985)

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis doctoral). Centro de Investigaciones del IPN.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, *45*, 41-52.

MECD. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. España: Boletín Oficial de Estado.

Rodríquez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidaad Complutense. Madrid.

Rodríquez-Quintana, E., Hidalgo-Herrero, M. y Sierra, T. Á. (2017). La modelización a través de los recorridos de investigación: el caso de la comparación de tarifas de telefonía móvil. En G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J. P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage y T. Sierra (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 421-452). Recuperado de https://citad4.sciencesconf.org

Rojas, C. y Sierra, T. (2017). *Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria*. Comunicación presentada al XXI Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática. Zaragoza, España.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. En *VI congrès international de la TAD*. Autrans, Francia.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.