

# UN ACERCAMIENTO A LA METODOLOGÍA LESSON STUDY PARA LA ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

## An approach to Lesson Study methodology for the teaching of the Normal distribution

Salinas Herrera J.<sup>a</sup>, Valdez Monroy J. C.<sup>a</sup> y Salinas-Hernández U.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad Nacional Autónoma de México

### Resumen

*En el presente trabajo se investiga el efecto del uso de la metodología Lesson Study (LS) en profesores de matemáticas del nivel medio superior. En esta experiencia participaron seis profesores y dos grupos distintos de alumnos que cursaban la asignatura de probabilidad y estadística. Se diseñó y aplicó, en dos ciclos, una lección sobre la Distribución Normal y, posteriormente, fueron discutidos los resultados de cada ciclo. El análisis de datos se centró en el uso de los recursos. Para ello, se articula dicha metodología con la teoría de la Aproximación documental de lo didáctico (ADD), cuya perspectiva es estudiar los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente. Entre los resultados, se muestra que el aspecto colaborativo de esta metodología permitió a los profesores reflexionar y tomar conciencia sobre la manera en que suelen usar los recursos en su práctica regular, y de esta manera contribuir en la mejora de su actividad docente.*

**Palabras clave:** estudio de clase, recursos, distribución normal.

### Abstract

*In this paper, we investigate the effect of the use of the Lesson Study methodology in high school teachers of mathematics. Six teachers and two groups of students taking the course of probability and statistics participated in this study. A lesson on Normal Distribution was designed and applied, in two cycles, and subsequently, the results of each cycles were discussed. The data analysis focused on the use of resources. For this, LS methodology is articulated with the Documentational Approach of Didactics, whose perspective is to study the resources used by the teacher in his teaching practice. Our results show that the collaborative aspect of this methodology allowed teachers to reflect and become aware of the usual way they use resources in their regular practice, as well as to improve their teaching activity.*

**Keywords:** lesson study, resources, normal distribution.

### INTRODUCCIÓN

*Lesson study (LS) es una metodología de trabajo colaborativo para el desarrollo profesional del docente. Se originó en Japón y desde la década de los 90 se ha adoptado en todo el mundo (Hart et al., 2011). Una característica central de esta metodología es relacionar la investigación y la docencia para apoyar el desarrollo profesional de los profesores, mediante la atención de la mejoría de los aprendizajes de los estudiantes (Murata 2011). Consiste en realizar un ciclo de cuatro etapas: *Organización*, en la que se establecen metas de aprendizaje de acuerdo con las necesidades de los estudiantes y con base en el currículum; *Planeación*, donde se elabora una lección dirigida al logro de tales metas; *Implementación*, cuando un miembro del equipo pone en práctica la lección en presencia de los demás participantes, quienes observan el desarrollo de la lección y toman notas; y *Revisión*, que consiste en comentar y discutir las observaciones hechas durante la implementación.*

Salinas Herrera, J., Valdez Monroy, J. C. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 525-534). Gijón: SEIEM.

Finalmente, si es necesario, el proceso se repite, pero teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo (Murata, 2011).

No obstante que, LS ha dado resultados positivos en distintos escenarios (Cheung y Wong, 2014), en otros contextos sigue siendo una metodología relativamente nueva. Por ello, el presente trabajo busca contribuir con información sobre cómo la participación de profesores en un estudio de esta naturaleza refleja su visión sobre la práctica docente. Específicamente, se explora la manera en que profesores de matemáticas desarrollan lecciones que promueven la comprensión de los estudiantes a través del enfoque de LS. Este estudio se centra en la discusión y reflexión de un grupo de profesores de matemáticas de bachillerato durante su participación en un estudio diseñado para la enseñanza de la Distribución Normal, poniendo especial énfasis en el uso de los recursos y en el efecto que –a través de su apropiación y transformación– tienen en la práctica de dos de ellos (Gueudet y Trouche, 2009).

## **ANTECEDENTES**

Hasta el momento, no se han ubicado trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal con estudiantes de nivel medio superior. Los pocos trabajos encontrados se ubican en el nivel universitario, y en cursos introductorios de estadística (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004). Similarmente, la investigación sobre formación de profesores para enseñar probabilidad es muy escasa (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016).

En el tema de las distribuciones de probabilidad confluyen tanto conceptos de estadística como de probabilidad y son un puente hacia la inferencia estadística, en la cual la distribución normal tiene un papel central. Sin embargo, este tema conlleva una gran complejidad matemática y su comprensión necesita de conocimientos previos profundos tanto de análisis matemático como de probabilidad (Carpio, Gaita, Wilhelmi y Sáenz de Cabezón, 2009). Todo ello, genera un reto importante para su enseñanza. Además, su abordaje en el bachillerato supone conocimientos previos de probabilidad, como la comprensión de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, poder diferenciar las características de estas aproximaciones y tener la capacidad de relacionarlas (Batanero, 2005), proceso en el cual, a su vez, subyacen los conceptos de variabilidad, aleatoriedad e independencia (Sánchez y Valdez, 2017).

Las distribuciones de probabilidad muestran importantes conexiones entre la probabilidad y la estadística a través de la noción de frecuencias relativas. Por ello, el enfoque frecuencial en la enseñanza es muy útil (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Asimismo, esta aproximación tiene la ventaja de que la tecnología permite aplicar de manera muy sencilla este enfoque. Usando la simulación se puede repetir un experimento un número grande de veces y se observa la convergencia. “Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma” (Gea, Parraguez y Batanero, 2017, p. 268).

De esta breve revisión de la literatura, se puede observar que la principal dificultad de los sujetos analizados es sobre el conocimiento del contenido. No obstante, los resultados de estos trabajos prefiguran las posibles dificultades que exhiban los estudiantes de nivel bachillerato, las cuales pueden ser consideradas, o no, en la etapa de planeación de LS.

## **La metodología LS**

A partir de su puesta en escena, a finales de los noventa (Stigler y Hiebert, 1999), en diferentes trabajos se ha estudiado el potencial de LS para el desarrollo profesional de los profesores, principalmente en los niveles básicos del área de matemáticas. Al respecto, se ha observado que participar en un estudio de este tipo propicia el desarrollo de distintas capacidades de los profesores: el conocimiento del contenido disciplinar y la didáctica asociada, la formación de comunidades de aprendizaje y el diseño de recursos para la enseñanza (Lewis, 2009). Asimismo, su aplicación genera tres visiones importantes en los profesores para el buen desarrollo de su práctica: la *visión*

*del investigador*, a través de plantear hipótesis relevantes sobre el aprendizaje de los estudiantes y generar los instrumentos adecuados para comprobarlas; la *visión del diseñador de currículum*, ya que se requiere de un conocimiento profundo de los temas y cómo se relacionan con los conocimientos previos y futuros; y la *visión del estudiante*, pues es necesario anticipar las posibles fortalezas y deficiencias de los estudiantes, y prever cómo pueden ser utilizadas para el logro de los aprendizajes (Fernandez, Cannon y Chokshi, 2003).

El ciclo de LS se desarrolla de la siguiente manera:

1. Considerar las metas para el aprendizaje y desarrollo de los estudiantes.
2. Planear una lección de investigación con base en estas metas.
3. Observar la lección de investigación y recolectar datos sobre el aprendizaje de los estudiantes y su desarrollo.
4. Utilizar estos datos para reflexionar sobre la lección y sobre la instrucción más ampliamente.
5. Si se cree conveniente, revisar y volver a enseñar la lección de investigación a un nuevo grupo de estudiantes (Murata, 2011, p. 2).

## MARCO TEÓRICO

Para contribuir al desarrollo de la práctica docente y tener un mayor entendimiento de la complejidad de la práctica del profesor de matemáticas decidimos articular la metodología de LS con la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Gueudet y Trouche, 2009, 2010). Aproximación cuya perspectiva es estudiar los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente. Esto se lleva a cabo enfocándose en el uso de los recursos y el efecto que – a través de su apropiación y transformación (trabajo documental) – tienen en la reflexión de los profesores acerca de su actividad docente. A continuación, se presentan algunos elementos de la ADD de acuerdo con los objetivos de la presente investigación.

En esta teoría se utiliza el término recurso para, por un lado, dar énfasis a la variedad de artefactos y en donde, a su vez, un artefacto (físico o psicológico) es un medio cultural y social provisto por la actividad humana (e. g. computadoras y lenguaje); producidos con propósitos específicos (e. g. resolver problemas, Gueudet y Trouche, 2009). Y, por otro lado, para ampliar la serie de elementos disponibles para el trabajo de los profesores e incluir en particular, las interacciones entre maestros –e. g., para el diseño de lecciones- y entre maestro y alumno (Gueudet, Pepin y Trouche, 2012).

De esta manera, los recursos se conciben no solamente provenientes de objetos materiales, sino de todos aquellos que intervienen en la comprensión y resolución de problemas. La interacción que lleva a cabo el profesor con los recursos materiales y no materiales, en su práctica docente, es el motor de la génesis –surgimiento o transformación de éstos en otros; llamados “documentos”-, pues permite al profesor transformar esos recursos. El trabajo documental, que lleva a cabo el profesor con los recursos, propicia el “surgimiento o transformación” de éstos en “documentos”; este proceso dialéctico y dinámico es conocido como “génesis documental” (Gueudet y Trouche, 2010).

En la génesis documental, los documentos son creados a partir de un proceso en el cual los profesores construyen esquemas de utilización de los recursos para situaciones dentro de una variedad de contextos, proceso que se ejemplifica por la ecuación: “documento = recursos + esquemas de utilización” (Gueudet y Trouche, 2009, p. 205). Los esquemas comprenden reglas particulares de acción y se estructuran a través de los *usos* y los *invariantes operatorios*, en el transcurso de la actividad. Los *usos* corresponden a la parte observable del *esquema*, que ocurre durante la acción del profesor. Mientras que los *invariantes operatorios* corresponden a la estructura cognitiva que guía la acción del profesor. Los *invariantes operatorios* son los elementos cognitivos que determinan la activación de los esquemas (Jaime y Escudero, 2011). Así, los

esquemas sólo son observables a través de las acciones que lleva a cabo el sujeto al trabajar con los recursos (Gueudet y Trouche, 2009).

## MÉTODO

En el estudio participaron seis profesores de matemáticas de bachillerato, quienes tienen una formación de investigación en educación matemática; dos doctores, dos doctorandos y dos con grado de maestría. Sobre su experiencia docente, dos son titulares en la institución con una antigüedad de 41 y 42 años, respectivamente; mientras que los otros cuatro son profesores de asignatura con una antigüedad que oscila entre 1.5 y 7 años. Además, cuatro participantes impartían el curso de Estadística y Probabilidad II al momento del estudio, por lo que se consensó trabajar en esta área. Se eligió enfocar el estudio en la distribución normal debido a la importancia de este modelo para describir diversos fenómenos físicos y sociales, además de que dentro de la misma materia es clave para la transición del análisis de datos a la inferencia estadística (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004).

En el primer ciclo el grupo de alumnos participantes estuvo integrado por 20 estudiantes de bachillerato (11 mujeres y nueve hombres de entre 17 y 19 años) del sexto semestre, quienes se encontraban tomando el curso de Estadística y Probabilidad II. De esta manera, los alumnos contaban con conocimientos sobre la materia que adquirieron en un curso anterior. Alrededor de la mitad del grupo adeudaba alguna materia de matemáticas, lo que se reflejaba en dificultades tanto operativas como conceptuales. Asimismo, la mayoría reconoció haber elegido la materia de estadística y probabilidad debido a que la consideran menos complicada de aprobar que cálculo. Por lo tanto, se trata de un grupo poco participativo debido a la apatía que sentían por la materia y/o la inseguridad que tenían sobre el conocimiento con el que contaban.

En el segundo ciclo, el grupo estuvo integrado por 33 estudiantes de bachillerato (25 mujeres y ocho hombres de entre 17 y 19 años) del sexto semestre, quienes se encontraban tomando el curso de Estadística y Probabilidad II. De esta manera, contaban con conocimientos previos sobre el tema que adquirieron en un curso anterior. Sin embargo, debido a que el profesor que impartió dicho curso no era el que actualmente se encontraba a cargo, no fue posible tener una descripción más precisa sobre el conocimiento con el que contaban los estudiantes al momento de llevar a cabo el estudio. Asimismo, el grupo inició el semestre aproximadamente un mes después de la fecha estipulada en el calendario académico, debido a una situación ajena a ellos.

La recolección de datos consistió en involucrar a los profesores participantes en cada una de las etapas que conforman la metodología del EC, las cuales fueron videograbadas. Como parte del primer ciclo, se diseñó, implementó y revisó una lección cuyo principal recurso fue la simulación con el *software Fathom*. Durante el segundo ciclo, hubo un rediseño de la lección teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo, así como las características del nuevo profesor que la implementaría y del nuevo grupo de alumnos a quienes estaría dirigida. El primer ciclo duró cuatro sesiones; el segundo cinco. Todas las sesiones fueron de dos horas.

## ANÁLISIS DE DATOS

Previo a la primera reunión, se contactó a cada uno de los participantes para explicarles cuál era el propósito del estudio y pedirles que diseñaran una lección para la enseñanza de la distribución normal. Una vez reunidos, se discutieron tres propuestas: una cuyos principales recursos fueron el *software Fathom* (interpretación frecuencial) y una actividad sobre la aproximación normal de la binomial; otra apoyada en el *software Geogebra*, enfocada en la interpretación clásica; y una en la que se mencionó de forma general los pasos a seguir para la enseñanza del tema. Finalmente, se consensó implementar la primera propuesta, ya que estaba mejor delineada y hacía más énfasis en el aspecto conceptual, pero manteniendo siempre el vínculo con los datos.

## Primer ciclo

A continuación, se describe el conjunto de recursos utilizados por el profesor en el transcurso de la lección, las regularidades que fueron observadas en sus acciones durante la etapa de implementación, y los invariantes operativos que se infieren de dichas acciones.

**Recursos.** El inicio de la lección se apoyó en la aproximación normal de la binomial. Se planteó por escrito la siguiente situación:

*Actividad I.* María ha acudido a presentar un examen de ingreso a la Universidad. El examen es de opción múltiple y consta de 200 preguntas. Cada pregunta cuenta con tres opciones de respuesta, de las cuales sólo una es correcta. El mínimo de preguntas correctas para aprobar el examen, e ingresar a la Universidad, es 120. María contesta correctamente 75 preguntas y las restantes al azar debido a que no sabe la respuesta. ¿Qué probabilidad tiene María de ingresar a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Para diseñar esta tarea, el profesor consideró una experiencia previa con un estudiante expuesto a una situación similar. Una vez exploradas las posibles respuestas de los estudiantes se buscó que resolvieran la tarea mediante la simulación computacional con el *software Fathom*, el cual ya conocían. A partir de este recurso se buscó poner en juego los conceptos de curva de densidad y curva normal, se mostraron las características y las propiedades de la distribución normal (entre ellas la regla empírica), y se ilustró el proceso de estandarización. Otros recursos utilizados fueron; hojas de trabajo con problemas sobre la regla empírica y la distribución normal estándar, una presentación para mostrar aspectos relevantes de la lección, y archivos con las simulaciones que se fueron construyendo. Finalmente, se aplicó el siguiente cuestionario para evaluar si se alcanzó la meta de aprendizaje sobre la distribución normal estándar:

1. El valor estandarizado para  $x = 67$ , cuando  $\mu = 63$  y  $\sigma = 1.5$ , de una población que tiene un comportamiento aproximadamente normal, es:
2. Se sabe que una persona elegida al azar requiere de 555 horas para completar un trabajo; si se conoce que estos tiempos se distribuyen normalmente con media de 500 horas y con desviación estándar de 100 horas, ¿cuál es el valor estandarizado que corresponde a este tiempo?
3. Si una variable aleatoria se distribuye normalmente con  $\mu = 5.4$  y  $\sigma = 1.6$ , la probabilidad de que su valor se encuentre entre 3.8 y 7 es:
4. Si una variable aleatoria se distribuye normalmente con media de 16 y desviación estándar de 2, entonces la probabilidad  $P(14 < x < 18)$  es aproximadamente:
5. El porcentaje de grasa de un tipo de queso es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 4.30% y desviación estándar 0.52%. Para una porción de este queso, elegida al azar, la probabilidad de que su contenido de grasa sea menor que 4.82% es:
6. La estatura de los estudiantes de una escuela se distribuye aproximadamente de manera normal con media de 1.64 m y una desviación estándar de 11 cm. Si se selecciona aleatoriamente a uno de estos estudiantes ¿cuál es la probabilidad de que su estatura sea al menos de 1.70 m?
7. Si los contenidos de grasa de las piezas de carne de una bodega siguen una distribución aproximadamente normal con media de 100 gramos y desviación estándar de 15 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza de carne elegida aleatoriamente tenga un contenido de grasa entre 70 y 112 gramos?

**Usos.** Durante la primera sesión, correspondiente a la implementación, se planteó por escrito la Actividad I. El objetivo fue ‘generar la necesidad en los estudiantes de un recurso distinto de la distribución binomial para resolver la tarea’. Algunos estudiantes intentaron aplicar esta

distribución, pero se dieron cuenta de lo poco factible que era debido al número de cálculos que involucraba. También, debido a la experiencia que tenían con el software, hubo quienes antes de considerar la distribución binomial propusieron simular la situación, ya que era lo que se solía hacer cuando en la clase se utilizaba el software.

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes, se simuló la experiencia para ‘dar una respuesta aproximada’ y ‘hacer la experiencia más vivencial’. A pesar de la familiaridad de los alumnos con el software, la mayoría aún necesitaba la guía del profesor para llevar a cabo la simulación, pero una vez hecha casi todos eran capaces de interpretarla. Posteriormente, se les propuso imaginar un escenario en el que no contaran con el software (con la finalidad de ‘mantener la necesidad de otro recurso distinto de la distribución binomial’), aunque este se siguió utilizando como un recurso para el desarrollo conceptual’ (Maxara y Biehler, 2006). Así, en la primera sesión se desarrollaron los conceptos de curva de densidad y curva normal. Durante la segunda se abordó el concepto de distribución normal; se utilizó el software para mostrar sus características y propiedades, poniendo especial énfasis en la regla empírica. Finalmente, en la tercera sesión se hizo explícito el proceso de estandarización para destacar el carácter conceptual sobre el procedimental de la distribución normal estándar. Después de cada una de las dos últimas sesiones las hojas de trabajo se emplearon para ‘fortalecer el aspecto operativo y de resolución de problemas’. Cabe señalar que hubo algunas dificultades con el manejo del software que no tuvieron consecuencias importantes en el desarrollo de la lección.

**Invariantes operatorios.** De las acciones del profesor que fueron observadas durante la implementación, se pueden destacar los siguientes invariantes operatorios:

- ‘Los estudiantes se involucran mejor con una situación que les es familiar, tanto vivencial como conceptualmente’;
- ‘Entienden y recuerdan mejor un concepto cuando surge como una necesidad’; ‘La simulación (el aspecto visual y dinámico del *software*) facilita la comprensión de las ideas estadísticas’;
- ‘Los ejercicios fortalecen la comprensión alcanzada mediante la simulación’.

## **Segundo ciclo**

Al finalizar el primer ciclo, se llevó a cabo una reunión para discutir de forma general lo acontecido; se destacaron los aspectos positivos de la lección, como la forma en que se utilizó el *software*, y aquellos elementos que no fueron suficientemente consolidados, como el trabajo con lápiz y papel. A partir de los resultados, se comenzó a bosquejar una nueva lección que sería implementada por una profesora en un grupo distinto de alumnos. Sobre el uso del *software Fathom*, la profesora no lo utilizó tanto como en el ciclo anterior, debido a la poca experiencia de sus alumnos en su manejo. Además, este grupo tenía deficiencias en el tema de probabilidad. Estas consideraciones se revelan en el conjunto de recursos que la profesora usa durante la lección, la forma en cómo los utiliza y la idea que tiene acerca de la enseñanza de la distribución normal. A continuación, se describen cada uno de estos elementos.

**Recursos.** La lección inició con una actividad extra clase que consistió en que los alumnos analizaran el video ‘Redes 125: Descifrar las probabilidades en la vida – Matemáticas’, y respondieran algunas preguntas. Una vez compartidas las respuestas durante la primera sesión, se planteó una actividad en la que, en equipos, analizaron un documento histórico sobre Galileo Galilei, en el que hace alusión a la distribución normal en el tratamiento de los errores al medir la distancia de la tierra a las estrellas; se mencionan varias características de la distribución y los alumnos tenían que elegir cuál histograma, de ocho que se proporcionaban, se ajustaba mejor con dichas características. Durante esta misma sesión, se propuso la situación del examen que fue

utilizada en el primer ciclo, con la diferencia de que se agregaron las siguientes preguntas auxiliares que destacaban información importante para su solución:

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una respuesta buena?
2. ¿Cómo definirías a la variable aleatoria?
3. ¿Cuántas preguntas le faltan por contestar?
4. ¿Qué valores toma la variable aleatoria que acabas de definir?
5. ¿Cuántas respuestas, aparte de las que ya contestó, necesita contestar María para aprobar el examen?
6. ¿Crees que María ingrese a la Universidad?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que María ingrese a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Después, dicha situación fue simulada con *Fathom*, siguiendo un procedimiento distinto al llevado a cabo en el primer ciclo. Debido a la poca experiencia de los alumnos con el software, este sólo se utilizó una vez más durante la segunda sesión para corroborar las características y propiedades de la distribución normal, y para trabajar la regla empírica. En adelante, la profesora se apoyó en actividades con lápiz y papel, y en el trabajo en equipo, valiéndose de material histórico, para introducir la noción de curva normal, y de la analogía, para hablar de la estandarización. Otros recursos utilizados fueron; hojas de trabajo con problemas sobre la regla empírica y la distribución normal estándar, y una presentación como apoyo para el desarrollo de la lección. Finalmente, se aplicó el mismo instrumento de evaluación que en el primer ciclo.

**Usos.** En la primera sesión se discutieron las respuestas que los alumnos dieron a las preguntas sobre el video y se propuso la actividad sobre el tratamiento que hizo Galileo de los errores en las mediciones. Con estos recursos, la intención fue ‘motivar a los estudiantes sobre la importancia de la probabilidad en la vida cotidiana’ y ‘motivarlos a través de la historia sobre la distribución normal’, respectivamente. Enseguida, se planteó por escrito la situación del examen. Al igual que en el primer ciclo, el objetivo fue ‘generar la necesidad en los estudiantes de un recurso distinto de la distribución binomial para resolver la tarea’. Después se llevó a cabo la simulación de la experiencia, pero en esta ocasión la finalidad fue ‘hacer palpable la importancia de la distribución normal’, a través de observar su presencia en un contexto distinto al de la medición de errores.

Durante la segunda sesión, se propuso a los alumnos imaginar un escenario en el que no contaran con el software, con la intención de ‘mantener la necesidad de otro recurso distinto de la distribución binomial’. Después se presentaron dos hechos históricos sobre la curva normal y, enseguida, se propuso una actividad escrita en la que aparecía esta curva. El objetivo de ambas actividades fue ‘motivar la noción de curva normal e identificar sus características y propiedades’. Posteriormente, se utilizó el software para ‘corroborar las propiedades identificadas’ y como un ‘referente para el desarrollo conceptual’, pues se buscó que los alumnos dedujeran la regla empírica mediante esta herramienta. Sin embargo, debido a su poco conocimiento del funcionamiento y de la interpretación frecuencial de probabilidad, aunado a la poca experiencia de la profesora con la utilización del *software* como un recurso didáctico, este ya no fue considerado en sesiones posteriores.

Debido al resultado poco favorable del software, en la tercera sesión se utilizó un problema escrito para ‘promover la comprensión de los alumnos sobre la regla empírica’. Enseguida se retomó la situación del examen con el propósito de ‘generar la necesidad de una herramienta más adecuada que esta regla para resolver la tarea’, y como una forma de ‘introducir la estandarización’. El uso de una analogía y una actividad escrita sobre la comparación de las estaturas de dos poblaciones tuvo como finalidad ‘desarrollar de manera informal el concepto de distribución normal estándar’.

Después de una semana de suspensión de labores, durante la cuarta sesión, en un contexto más tradicional de enseñanza, la profesora explicó cómo calcular probabilidades mediante la distribución normal estándar con la finalidad de ‘formalizar este concepto’, y se propusieron problemas, en ésta y en la quinta sesión, para ‘fortalecer la comprensión alcanzada’.

**Invariantes operatorios.** De las acciones de la profesora que fueron observadas durante la implementación, se pueden inferir los siguientes invariantes operatorios:

- ‘Los recursos de divulgación (videos y lecturas históricas) generan el interés de los estudiantes’; ‘El trabajo en equipo promueve su inclusión y participación’;
- ‘Los estudiantes comprenden mejor los conceptos que ellos construyen’; ‘El uso de un software puede limitar en lugar de favorecer la comprensión de los estudiantes, si no tienen experiencia en su manejo’;
- ‘Trabajar con casos particulares (sin el *software*) también promueve la comprensión de los estudiantes’;
- ‘Los ejercicios fortalecen la comprensión alcanzada’.

### Reflexiones de los profesores

Después de cada una de las sesiones de implementación, se llevó a cabo una reunión entre los profesores para reflexionar sobre lo acontecido. Fueron varias las discusiones que se entablaron en torno al uso de los recursos. Durante el primer ciclo, previo a la implementación, había quienes parecían escépticos sobre utilizar el *software* como el principal recurso de la lección:

- P1: Me parece que ahí puede ser una situación que reduce la aplicabilidad de la estrategia, porque presupone [...] un profesor que va a usar el *software*, pero en general no se usa. Entonces siento que ese enfoque podría limitarnos en algún sentido.

Por otro lado, había quienes consideraban adecuado el uso de este recurso:

- P2: Esta parte [*una de las simulaciones que se propone para la lección*] es muy ilustrativa e interesante porque la distribución no estandarizada la modificas como quieres, y se ve que la estandarizada se mantiene igual.

Posterior a la implementación, tal parece que la mayoría de los profesores vieron bien la posibilidad de utilizar el *software* como principal recurso de la lección. Aunque había quienes mantenían su reserva, como la profesora encargada de llevar a cabo el segundo ciclo, debido a las características de sus estudiantes y a lo observado en la implementación:

- P3: Tal vez no utilice tanto [*el software*] como lo hizo [*el profesor encargado del primer ciclo*]. [*Los alumnos*] no saben tanto *Fathom*, y son muchos [...], si van llegando tarde, o cualquier [*problema técnico*], se pierden.

De esta manera, durante el segundo ciclo se disminuyó la utilización del *software*, el cual efectivamente resultó ser una limitante para el buen desarrollo de la lección, debido a la poca experiencia de los alumnos en su uso y a su desconocimiento de la interpretación frecuencial de probabilidad, aunado a la poca experiencia de la profesora utilizándolo como un recurso para la enseñanza. No obstante, otros recursos empleados, como el material de divulgación (videos y lecturas históricas), analogías y ejemplos específicos, y la forma en cómo los utilizó la profesora, fueron bastante ilustrativos sobre cómo se puede trabajar la lección sin el *software*.

En particular, para el profesor encargado del primer ciclo, quien durante la exposición de su propuesta señaló:

- P4: No puedo imaginar cómo enseñar esto [*la distribución normal*] sin el *software*.

Posteriormente, a partir de lo observado en el segundo ciclo menciona:



- P4: Me agradó mucho esa actividad [*analogía seguida de la comparación de dos poblaciones*], porque siento [...] que es muy accesible [...] para que [*los alumnos*] entiendan qué es estandarizar [...] Creo que, si se inicia así, y después se tiene en cuenta el *software* [...] eso reforzaría lo que les acabas de decir.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este primer acercamiento a la metodología de LS, observar y comentar sobre la práctica que desarrollaron los profesores, desde el diseño de una lección hasta su puesta en marcha, generó un espacio propicio para aprender sobre la enseñanza y cómo puede ser mejorada. Como menciona Lewis (2009), participar en un estudio de esta naturaleza mejora el conocimiento del contenido para la enseñanza, los recursos que se generan, así como el trabajo colaborativo con otros profesores. De manera particular, en esta investigación se infiere el conocimiento de los profesores (*invariantes operatorios*) a partir de la parte observable de los esquemas (usos), dependiendo del tipo de recurso.

El conocimiento pedagógico fue el que más se hizo presente, pues fueron dos posturas de enseñanza las que se pusieron en juego: una en la que se abordó el tema de forma general, teniendo como principal recurso el *software*; y otra en la que se trató de manera particular, a partir del trabajo con lápiz y papel. En ambos escenarios, fueron diversas las reflexiones tanto favorables como desfavorables en torno a estos recursos y a la forma en cómo fueron utilizados, pero siempre dirigidas a la mejora de la lección. Las diferencias de los grupos del primero y segundo ciclo tuvieron impacto en los esquemas de enseñanza y, por consiguiente, incidieron en el trabajo documental.

En síntesis, de acuerdo con el marco teórico, los profesores se basaron en un conjunto de *recursos* para su trabajo documental, en el cual ocurrió un proceso de génesis que dio origen a un *documento* (en nuestro caso, la lección a investigar). En este proceso el profesor construyó *esquemas de utilización* a partir del conjunto de recursos del que dispuso. Dichos esquemas estuvieron constituidos por una parte observable (*usos*) y otra invisible (*invariantes operatorios*), siendo ésta última la más importante, ya que refleja las ideas que los profesores tienen sobre cómo debe ser la enseñanza.

Asimismo, experimentar ambas formas de enseñanza amplió el horizonte de los profesores, particularmente en el uso del *software*, ya que para algunos era la primera vez que presenciaban una lección con este elemento como principal recurso.

Por otro lado, es pertinente decir que hay una relación dialéctica entre los recursos y el documento que se genera, ya que este último puede jugar el papel de recurso para la generación de un nuevo documento.

Es necesario mencionar que al ser este un primer acercamiento a la metodología, hay algunos aspectos que se deben mejorar y otros que se deben evitar. Por ejemplo, generar un guion formal en el que se indique que aspectos se deben observar para saber si los objetivos de la lección son alcanzados, y tratar de no ser un distractor en el desarrollo de ésta. Si se mejoran estos, y otros, aspectos, LS se muestra claramente como una alternativa prometedora para la mejora de la actividad docente en el bachillerato.

## Referencias

- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the Normal distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 257-276). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.

- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. New York: Springer.
- Carpio, M., Gaita, C., Wilhelmi, M. y Sáenz, A. (2009). Significados de la distribución normal en la universidad. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.
- Cai, J. y Wang, T. (2010). Conception of effective mathematic teaching with a cultural context: perspectives of teachers from China and the United States. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 265-287.
- Cheung, W. y Wong, W. (2014). Does Lesson Study work? A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 3(2), 137-149.
- Fernandez, C., Cannon, J. y Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education*, 19, 171-185.
- Gea, M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.
- Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71, 199-218.
- Gueudet, G. y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documens, travail du professeur et genèses documentaires. Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathématiques, Gueudet, G., y Trouche, L. (Editores), 3, 57-74.
- Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (Eds.). (2012). *From text to «lived» resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. Dordrecht : New York: Springer.
- Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: learning together*. New York: Springer.
- Jaime, E. y Escudero, C. (2011). El trabajo experimental como posible generador de conocimiento en enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 371-380.
- Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in Lesson Study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110.
- Maxara, C. y Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7*. Salvador de Bahía, Brasil. Recuperado de [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7C1\\_MAXA.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7C1_MAXA.pdf).
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of Lesson Study. En L. C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer.
- Sánchez, E. y Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 127-143.
- Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Nueva York: The Free Press.