EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN ACTIVIDADES DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

The probabilistic reasoning of high school students in binomial distribution activities

Sánchez, E.[a] y Carrasco, G.[b]

[a]Cinvestav, [b]Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

El presente trabajo se enfoca en el razonamiento probabilístico que estudiantes de bachillerato exhiben al responder un cuestionario/actividad que los conduce a la construcción de distribuciones binomiales simples. Se describe el desempeño general que muestran en las preguntas del cuestionario y se resaltan algunos patrones de razonamiento sobre la manera de construir árboles combinatorios y manejar la noción de variable aleatoria. Además, se da cuenta de las respuestas a las preguntas que se les formularon durante actividades de simulación. El objetivo es resaltar los principales patrones de razonamiento que se presentan en la construcción de la binomial así como la aplicación de esta para responder el problema y resolver una tarea de predicción. El estudio se llevó a cabo con 34 estudiantes de bachillerato quienes respondieron un pretest y un postest entre los cuales realizaron actividades de simulación física y de simulación con ayuda de software.

Palabras clave: *razonamiento probabilístico, distribución binomial, árbol combinatorio, variable aleatoria.*

Abstract

The present work focuses on the probabilistic reasoning that high school students exhibit when answering a questionnaire / activity that leads them to the construction of simple binomial distributions. The general performance shown in the questions of the questionnaire is described and some reasoning patterns are highlighted on how to construct combinatorial trees and to manage the notion of random variable. In addition, the responses to the questions that were asked during simulation activities are reported. The objective is to highlight the main reasoning patterns that are presented in the construction of the binomial as well as the application of this to answer the problem and solve a prediction task. The study was carried out with 34 baccalaureate students who answered a pre- and post-test between which they carried out physical simulation activities and simulations with the help of software.

Keywords: *probabilistic reasoning, binomial distributions, combinatorics tree, random variable.*

INTRODUCTION

En el concierto de la educación matemática, es bien conocido que la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad resultan ser termas problemáticas. Se ha sugerido (Shaughnessy, 1992, Jones, Langrall y Mooney, 2007) que una de las causas del fracaso en la enseñanza de estos temas se debe a la prevalencia de un enfoque centrado en la reproducción de procedimientos de cálculo en detrimento del desarrollo de la comprensión y el razonamiento. Cabe mencionar que el razonamiento en situaciones de incertidumbre tiene particularidades que lo hacen diferente al razonamiento matemático, ya de por sí arduo de llevar a cabo. En este estudio nos ha interesado poner énfasis en el razonamiento probabilístico de los estudiantes en un tema emblemático de la probabilidad, a saber, la distribución binomial.

Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 535-543). Gijón: SEIEM.

Nos preguntamos cómo razonan los estudiantes en tareas relacionadas con la construcción de distribuciones binomiales. Para avanzar en la respuesta diseñamos un cuestionario en el que conforme se van respondiendo preguntas relacionadas con dos problemas se construyen las distribuciones binomiales b(x, 3, ½) y b(x, 3, ⅓). Este cuestionario se aplica antes y después de actividades de simulación. En todo este proceso nos interesa destacar el razonamiento alrededor de las ideas de combinatoria, variable aleatoria, distribución y variabilidad que ponen en juego los estudiantes durante la realización de la tarea.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una de las nociones más importantes de la probabilidad es la distribución binomial, entre otros motivos, por la variedad de sus aplicaciones y por su relación con la distribución normal. Aunque hay una gran variedad de propuestas didácticas de situaciones y recursos para introducir esta distribución en la enseñanza media y superior, son escasos los estudios didácticos que nos informan sobre la manera en que los estudiantes construyen su conocimiento acerca de esta distribución y aprenden a razonar con ella. Una de las dificultades para llevar a cabo investigaciones sobre este tema es la complejidad que presenta, pues su construcción conceptual se basa en muchos otros conceptos de probabilidad que a su vez también son difíciles. En particular, para la comprensión de la distribución binomial son necesarios conceptos de combinatoria y de álgebra, así como la noción de probabilidad, tanto en su enfoque clásico como frecuencial, y la independencia estocástica. En este estudio, hemos llevado a cabo una investigación de diseño, pues se proponen unas actividades dirigidas a que los estudiantes construyan dos distribuciones simples y en el transcurso de su realización tomamos datos para informar sobre los razonamientos que despliegan en el proceso. Así, nos preguntamos ¿Qué patrones de razonamiento ponen en juego los estudiantes en la construcción y uso de la distribución binomial?

ANTECEDENTES

Landín (2013) sostiene que la investigación sobre distribución binomial es escasa y dispersa, pues la literatura que se refiere explícitamente al tema es poca y aborda distintos niveles escolares, además de pertenecer a diferencias marcos teóricos y metodologías. Por esta razón no se ha consolidado un núcleo de resultados sobre la binomial para el nivel bachillerato, como sucede con otros temas del contenido curricular de probabilidad (Batanero y Sánchez, 2005). Landín (2013) divide su revisión sobre distribución binomial en 3 tipos de estudios: a) propuestas de enseñanza, b) investigaciones didácticas y c) estudios sobre creencias, falsas concepciones y dificultades. Aquí mencionamos 3 trabajos del tipo del inciso b, que ilustran el comentario de Landín. Alvarado y Batanero (2007) analizan la comprensión teórica y práctica de la aproximación normal a la distribución binomial alcanzada por un grupo de estudiantes de ingeniería después de un experimento de enseñanza apoyado en tres tipos de configuraciones: manipulativa, computacional y algebraica. Observaron que los estudiantes fueron capaces de comprender la variable aleatoria binomial como la suma de variables de Bernoulli pero aún cayeron en sesgos debidos a la heurística de representatividad, aun cuando realizaron simulaciones computacionales. Abrahamson (2009) realiza un estudio de caso con tres estudiantes graduados, explorando su razonamiento frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). Desde un enfoque semiótico muestra la relación entre el uso de tres tipos de instrumentos mediadores y los razonamientos de los estudiantes en la construcción de la distribución. Bill, Watson y Gayton (2009) realizaron un estudio con 19 estudiantes de grado 10 (13-14 años) donde se examina un problema binomial con base en tres enfoques: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque con simulación utilizando el software Fathom. Los datos fueron colectados a través del pretest y postest aplicados bajo condiciones de examen tradicional; los ítems comunes al pretest y al postest permitieron una evaluación (con base en la taxonomía SOLO) del desarrollo de la comprensión de los conceptos alcanzados debido a las actividades con Fathom.

MÉTODO

En esta investigación participaron treinta y cuatro estudiantes del tercer grado de educación media superior (de 17 a 18 años de edad) inscritos en una modalidad de bachillerato de la Universidad Nacional (UNAM). Su antecedente de estudio en el área fue un curso semestral en el que abordaron dos grandes temas: estadística descriptiva y probabilidad. Los subtemas de probabilidad fueron espacio muestral y eventos, definiciones de probabilidad y probabilidad condicional e independencia. En el periodo en el que se realizó la investigación estaban en el segundo curso semestral de estadística y probabilidad, y habían estudiado los subtemas de variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad. De manera que, los jóvenes estaban preparados para la actividad propuesta en esta investigación.

El estudio consistió en 4 etapas. 1) Aplicación de un cuestionario/actividad (que sirvió como pretest y postest). 2) Actividades de simulación física acompañadas de preguntas para responder en hojas de trabajo. 3) Actividades de simulación en computadora usando el software Fathom, también acompañadas de preguntas. En el cuestionario/actividad (ver Appendice) se formularon dos situaciones ("Experimento aletorio 1" y "Experimento aleatorio 2") que se pueden modelar usando distribuciones binomiales b(x, 3, ½) y b(x, 3, ⅓) respectivamente. Se plantearon varias preguntas a los estudiantes que los conducían a construir la distribución binomial correspondiente para cada situación. Además, se les formuló una pregunta para ver cómo utilizaban la distribución para hacer una predicción de las frecuencias de cada valor de la variable en 1000 repeticiones del los experimentos.

En las actividades de simulación física se les pidió repetir 48 veces experimentos físicos equivalentes a las situaciones de "respuestas a un examen" planteadas en el cuestionario/actividad inicial. Tras una discusión grupal sobre posibles métodos para realizar las simulciones, se usaron monedas en la situación con p = ½ y, para la otra situación, botellas opacas (pintadas de negro) con el cuello transparente y con tres canicas en su interior (botella de Brousseau) de manera que la probabilidad de éxito fuera p = 1/3. Se formularon preguntas a los estudiantes, previas a la realización de las simulaciones, con el propósito de que identificaran similitudes entre el experimento modelado y el original ("respuestas a un examen") y de que previeran la cantidad de veces que ocurriría cada valor de la variable aleatoria en las distintas simulaciones. Después de realizarlas, se hicieron preguntas sobre los valores más frecuentes y menos frecuentes para ver si identificaban la forma de la distribución, y se les pidió recuperar la distribución de probabilidad teórica para compararla con la distribución de frecuencias relativas.

En la tercera etapa, los estudiantes fueron instruidos para llevar a cabo simulaciones con apoyo del software Fathom utilizando una aplicación elaborada por los investigadores. Por cada experimento aleatorio se realizaron dos simulaciones una de 50 repeticiones y otra de 1000; además se construyeron y analizaron gráficas de barras con los resultados obtenidos. Después de una pregunta para fijar la atención de los estudiantes en las similitudes de las dos formas de simulación (física y en computadora), en las hojas de trabajo se les pidió que registraran el número de veces que se obtuvo cada uno de los valores de la variable aleatoria tanto en la simulación de 50 repeticiones como en la 1000 y que vieran en cuál de las dos simulaciones se observaba mayor variación al aplicar la instrucción "randomize", que genera nuevas muestras aleatorias del tamaño inidicado. Finalmente, se pidió que en parejas escribieran sus observaciones.

RESULTADOS

Dividimos la exposición de los resultados en dos partes; la primera consiste en la descripción general de las respuestas a 4 preguntas de los cuestionarios (experiencia 1 y experiencia 2) correspondientes tanto a la aplicación inicial (pretest) como a su aplicación después de las actividades de las actividades de simulación (postest). La otra parte consiste en la descripción a las respuestas de los estudiantes a las preguntas formuladas durante el desarrollo de las actividades de simulación y a la pregunta 8 del cuestionario (pre- y postest).

En la Tabla 1, se resumen y organizan las frecuencias de respuestas correctas a las cuatro preguntas del cuestionario (Pre- y Postest) que se han elegido para el presente informe. Las respuestas a las preguntas 1, 3, 6 se excluyeron por diferentes razones. La pregunta 1 fue interpretada por la mayoría de estudiantes de manera diferente a la esperada por los investigadores, ellos la entendieron como "la probabilidad de responder una pregunta correcta de todo el examen" en lugar de interpretarla simplemente como la probabilidad de responder correctamente una pregunta aislada. Las respuestas a las preguntas 3 y 6 no aportan información adicional a la información dada en las preguntas 2 y 5 respectivamente. Así, la elección obedeció al hecho de que fueron las preguntas que tuvieron mayor validez en el sentido de que constatamos que los estudiantes las entendieron de la manera en que los investigadores deseaban que las entendieran y que dieran información relevante.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas correctas a 4 preguntas de los cuestionarios (ver Apéndice)

	Pregunta 2: Construyen el árbol		Pregunta 4: Describen los valores de la variable		Pregunta 5: Obtienen la distribución de probabilidades		Pregunta 7: Calculan la probabilidad de acreditar el examen	
	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓
Pretest	14	6	21	16	15	2	6	2
Postest	18	8	26	16	14	4	8	2
Total de estudiantes que respondieron a las preguntas = 34								

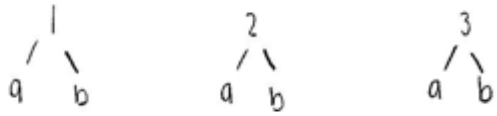
Tomando como un indicador central del desempeño de los estudiantes a la pregunta 5 (tercera columna de la Tabla 1), se nota que 44% de ellos en el pretest (15 de 34) y 41% en el postest (14 de 34), construyeron adecuadamente la distribución binomial b(x, 3, ½); mientras que para el caso de b(x, 3, ⅓) hubo una dramática caída, reduciéndose a 6% y 12% de respuestas correctas en el pretest y postest respectivamente. No todos los que llegan a construir la distribución correcta logran resolver completamente el problema del examen, pues en el experimento 1, 18% en el pretest y 23% en postest responden correctamente la pregunta 7 y en el experimento 2, sólo 6% responde correctamente tanto en el pre- como en el postest.

Conviene observar que los cambios en las frecuencias de respuestas del pretest al postest son muy leves en el experimento 1 y prácticamente nulas en el experimento 2. A partir de esto, se puede concluir que las actividades de simulación no aportan nuevos recursos al estudiante para mejorar su desempeño en la construcción del árbol o en la asignación de probabilidades teóricas, con la excepción de algunos casos aislados que mejoraron la construcción del árbol o identificaron mejor los valores de la variable, gracias a que en el postest se reflejó que se apoyaron en el uso de la notación que vieron en el proceso de simulación.

En el análisis de las respuestas nos preguntamos: ¿En qué aspectos puntuales fallaron los estudiantes que no lograron tener éxito en la construcción de la distribución? Encontramos que los fallos se distribuyeron sobre todo en dificultades relacionadas con dos ideas fundamentales: *combinatoria* y *variable aleatoria*.

El manejo de combinatoria que se requiere para resolver las tareas aquí examinadas, consiste simplemente en la construcción de un árbol combinatorio para cada distribución como apoyo para describir el espacio muestral de cada experiencia aleatoria. En el caso b(x, 3, ½) el diagrama de árbol consta de tres etapas con dos opciones cada una, y el caso b(x, 3, ⅓) está formado por tres etapas con tres opciones cada una, dos de ellas indistinguibles. En la pregunta 2 se les pidió explícitamente la elaboración de estos diagramas. En la Tabla 1 se puede notar que la construcción del árbol con dos opciones (p = ½) y tres opciones (p = ⅓) fue sólo levemente mejor en el postest que en el pretest. Sin duda, el desempeño en esta pregunta influye directamente en el desempeño de la pregunta 5 pero de ello no se concluye que quien construye correctamente el árbol proporciona automáticamente la distribución correcta. En otro sentido, saber elaborar el árbol con dos opciones no garantiza poder construir el de tres opciones, con dos de ellas indistinguibles. Es claro de la Tabla 1, que este último resulta considerablemente más difícil que el primero ya que hubo un descenso de 14 a 6 respuestas correctas en el pre- y de 18 a 8 en el postest. Atribuimos esta diferencia al aumento de la magnitud de las secuencias implicadas (8 y 27 respectivamente) y a la dificultad de manejar los casos indistinguibles. En otros trabajos se han reportado las principales dificultades de los estudiantes con la combinatoria, entre ellas algunas similares a las aquí mencionadas, por ejemplo: Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996).

Conviene destacar un patrón presente en varias de las respuestas incorrectas que dan cuenta de la ausencia de un razonamiento combinatorio. Dicho patrón consiste en organizar las dos características de la situación, a saber, el número de preguntas y la cantidad de opciones por pregunta, en un diagrama estático (con rasgos de árbol) sin secuenciar las etapas. Este esquema no les ayuda a representar un posible resultado en forma de una terna. En efecto, 11 estudiantes en la primera situación y 17 en la segunda del pretest representan la situación en un esquema como el siguiente:



En estos diagramas, los números 1, 2 y 3 representan las preguntas y las letras a y b las opciones de respuesta por pregunta. Los estudiantes que se basan en este tipo de esquemas, concluyen erróneamente que el espacio muestral tiene 6 ($= 3 \times 2$) elementos. Estos resultados vuelven a presentarse en el postest con muy leves diferencias.

El razonamiento con y acerca de la distribución binomial implica un cierto manejo del concepto de variable aleatoria. En los problemas que se propusieron se habla simplemente de la variable el “número de respuestas correctas” en un examen de opciones respondido al azar, sin introducir técnicamente el concepto de variable aleatoria. En la pregunta 4 se les pedía que describieran los valores que puede tomar la variable aleatoria. Para la experiencia 1 (p = ½) 62% en el pretest y 76% en postest respondieron correctamente, mientras que para le experiencia 2 (p= ⅓), el 47% respondió correctamente tanto en el pre- como en el postest. Esto significa que el desempeño en esta pregunta es relativamente alto comparado con el desempeño en las otras preguntas. Hubo una leve mejoría en el nivel de respuestas en la experiencia 1, del pretest al postest, mientras que no hubo ningún cambio en el caso p = ⅓. No obstante, no todos los que reconocieron los valores de la variable fueron capaces de calcular sus probabilidades aun cuando seis de ellos en el postest del experimento 1 (p = ½) construyeron bien el árbol. A varios estudiantes que describen correctamente los valores de la variable les faltó entender que cada valor de una variable aleatoria corresponde a un evento, es decir, a un subconjunto del espacio muestral, de manera que la probabilidad de un valor de la variable es la probabilidad del evento correspondiente. En términos técnicos, estos estudiantes no construyen la distribución de la variable aleatoria determinando la probabilidad de la imagen inversa de cada uno de sus valores. Varios de ellos proponen distribuciones de manera que las probabilidades dependan visiblemente de la variable, como: $\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$ en lugar de las probabilidades binomiales: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Un caso que tiene en cuenta la propiedad de que la suma de las probabilidades de todos los valores de la variable debe ser 1, propuso la distribución: $\frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$. Estos estudiantes al no asociar los valores de la variable aleatoria con los eventos correspondientes, no encuentran la forma de calcular la probabilidad de los valores de la variable sino mediante razonamiento o modelos espurios, como los indicados.

Ahora nos centraremos en las actividades de simulación, en particular, las realizadas con el software Fathom pero sin olvidar que previas a ellas se hicieron simulaciones físicas. Las actividades giraron alrededor de las mismas 2 situaciones que en el cuestionario, a saber, una correspondiente al experimento 1, modelado por la distribución b(x, 3, ½) y otra al experimento 2, modelado por la distribución b(x, 3, ⅓). En cada una de ellas se pedía a los estudiantes que realizaran acciones con el software usando un programa que simulaba resultados de ambas distribuciones y, paralelamente, respondieran 5 preguntas, a saber:

1. Equivalencia de experimentos aleatorios: ¿Consideras que este proceso (simulación con Fathom) corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?
2. Distribución empírica (N = 50): Después de simular 50 veces el experimento, ¿cuántos alumnos contestaron correctamente k preguntas? Con k = 0, 1, 2, 3.
3. Distribución empírica (N = 50 y N = 1000): a) Después de simular 50 veces el experimento, ¿cuál es la frecuencia relativa de cada valor de la variable? b) Después de simular 1000 veces el experimento, ¿cuál es la frecuencia relativa de cada valor de la variable?
4. Percepción de variabilidad (N = 50, N = 1000): Observa las gráficas de las distribuciones de frecuencia cuando los experimentos se repiten muchas veces y responde ¿dónde observas mayor variabilidad [cuando el número de repeticiones es N = 50 o cuando es N = 1000]?
5. ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

La pregunta 1 se formuló con la intención de tener indicios acerca de si los estudiantes son conscientes de la equivalencia de las experiencias aleatorias física y computacional. Fueron 26 estudiantes que en el experimento 1 respondieron que las experiencias sí eran equivalentes, con argumentos diversos: azar, aleatoriedad, variación, precisión, registro y representación, pero ninguno señala las tres características que definen las experiencias equivalentes: 1) El mismo número de elementos en ambos espacios muestrales, 2) Una correspondencia entre dichos espacios y 3) igualdad de probabilidades de los elementos correspondientes. Los argumentos más comunes fueron “porque son al azar” o “porque tienen las mismas probabilidades” sin ser más precisos. En el experimento 2, los resultados no fueron muy diferentes por lo que no nos extenderemos en ello.

Con relación a las preguntas 2 y 3 casi la totalidad de los estudiantes realizó bien la tarea en ambos experimentos toda vez que el software les proporcionaba los datos y ellos se limitaban a identificar las frecuencias de los valores y a calcular las frecuencias relativas o porcentajes correspondientes. En la pregunta 4, se pedía que dijeran en qué simulación veían más variabilidad al estar viendo la representación gráfica de los resultados de simulaciones de 50 repeticiones comparados con 1000 repeticiones. Los resultados son que 23 estudiantes en el experimento 1 y 22 en el experimento 2, vieron más variabilidad en las gráficas de 50 repeticiones, mientras que 3 estudiantes en el experimento 1 y 4 en experimento 2, señalaron que vieron más variabilidad en 1000 repeticiones.

Finalmente, la pregunta 5 es muy abierta dando lugar a respuestas muy variadas. Su intención era identificar si los estudiantes observaban la aproximación de las distribuciones empíricas generadas mediante las simulaciones con la distribución teórica correspondiente; fue muy optimista pensar que los estudiantes centrarían su atención en dicho aspecto, ya que en ningún caso se mencionó la distribución teórica y sus observaciones se centraron en las respuestas a la pregunta precedente sobre variabilidad.

La pregunta 8 del cuestionario tenía por objetivo detectar si los estudiantes incorporaban a sus predicciones algún rasgo que indicara que fueron sensibles a la variabilidad que experimentaron en la simulación; esta idea ya ha sido estudiada para el caso más simple b(x, 2, ½) en Sánchez, Mercado y García (2016). Se pensaba que en el pretest las respuestas serían las frecuencias esperadas: 125, 250, 250, 125 en el primer experimento, y 297, 444, 222 y 37 en el segundo, pero que en el postest los estudiantes incorporarían algún rasgo que diera cuenta de un sentido de la variabilidad como consecuencia de las actividades de simulación; esto puede observarse en el uso de expresiones del tipo "alrededor de…", "aproximadamente", "cercano a …" o escribiendo cuartetas que varían algo respecto a las frecuencias esperadas. Esto no ocurrió en general; una estudiante mostró ser consciente de la variabilidad tanto en el pretest como en el postest y otro respondió en el pretest con las frecuencias esperadas pero en el postest indicó que las frecuencias de los eventos en una experiencia real deben estar alrededor de las frecuencias esperadas.

Como resultado de estas observaciones se puede decir que en el contexto de las actividades que se realizaron, los estudiantes no establecen conexiones entre las distribuciones empíricas que resultan de la simulación y las distribuciones teóricas que encontraron en su trabajo previo. De este modo la percepción y estimación de la variabilidad en situaciones de predicción, en el sentido que aquí fue considerada, parece necesitar más trabajo del que en la presente investigación se le dedicó, en particular, un diseño más promisorio.

CONCLUSION

El éxito en la construcción de las distribuciones binomiales básicas (teóricas) siguiendo el proceso guiado por las preguntas del cuestionario depende, en gran parte, de la construcción correcta del árbol y de la interpretación de la variable aleatoria como una función, es decir, una interpretación que tenga en cuenta que cada valor de la variable está asociado a un evento del espacio muestral y que la probabilidad de que la variable tome ese valor es la probabilidad del evento asociado. Por otro lado, la construcción de la distribución no asegura su aplicación correcta para responder la pregunta, pues los estudiantes tuvieron dificultades con la expresión se "acredita el examen cuando [se] responden al menos dos preguntas correctamente", calculando sólo la probabilidad de responder 2 preguntas e ignorando la probabilidad de responder las 3 preguntas correctamente. Esto coincide con los resultados obtenidos por Bill et al. (2009) y muestra la inhabilidad para entender expresiones como "al menos" e, incluso, para aplicar la regla de la suma de probabilidades con base en el conocimiento de la distribución. En el estudio de Bill et al. (2009), sólo un estudiante de entre 19 (5%) calculó correctamente la probabilidad de pasar un examen de 5 preguntas con 2 opciones cada una, sabiendo que el examen se responde al azar y se acredita cuando se aciertan 4 o más preguntas. En nuestro estudio, los estudiantes se desempeñaron un poco mejor; esto es explicable debido a que son de mayor edad y porque la pregunta es más simple (3 preguntas en nuestro estudio contra 5 preguntas de Bill et al.). Además, las respuestas a la pregunta del experimento 2 en nuestro estudio, muestra que la situación b(x, 3, ⅓) es de una dificultad mayor.

Un primer aspecto en la comprensión de las distribuciones básicas de probabilidad como las que aquí se mencionan consiste en su construcción y uso para responder preguntas sobre la probabilidad de los eventos como los siguientes: "que la variable tome un valor x", "que la variable tome al menos el valor x" y "que la variable tome a lo más el valor x", para toda x entre 0 y n. Un segundo aspecto es su uso en situaciones de predicción teniendo en cuenta la variabilidad, es decir, predicciones como la expresada en la pregunta 8: *Si 1000 estudiantes respondieran al azar el examen, ¿cuántos acertarían x preguntas?,* con $0 \leq x \leq 3$. Nuestros resultados muestran que un dominio de ambos aspectos sólo ocurrió en dos casos y uno de ellos no puede explicarse por efecto de las actividades, pues mostró desde un comienzo su sentido de la variabilidad. Por lo tanto, aunque la simulación ofrece posibilidades para que se logre la integración de estos dos aspectos, la manera de hacerlo exige un diseño instruccional más elaborado del que hemos implementado en esta investigación. No obstante, los resultados que aquí presentamos en relación con las maneras de razonar de los estudiantes puede ser un insumo útil para lograr con éxito dicho diseño.

Referencias

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit cultural quantitative reasoning - The case of anticipating experimental outcomes of a quasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction 27*(3), 175-224.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 67*.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos* XXXIV, 2, 7-28.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer International Publishing.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Bill, A., Watson, J. y Gayton, P. (2009). *Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem three different ways. Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1,* 57-64.

Jones, G. A., Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2007). Research in Probability. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: NCTM y Information Age Publishing.

Landín Vargas, P. R. (2013). *Razonamiento de estudiantes de bachillerato al resolver problemas de probabilidad binomial* (Tesis doctoral no publicada). Ciudad de México: Departamento de Matemática Educativa.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39

Sánchez, E., Mercado, M. y García, J. (2016). La variabilidad en el razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 479-661). Málaga, España: SEIEM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Apendice. Cuestionario (Pretest y Postest)

Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta.

2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol).
3. ¿Cuántos diferentes resultados tiene el Espacio Muestral del experimento?
4. Considera la variable X = "El número de respuestas correctas". Describe todos los valores que puede tomar esta variable.
5. Haz lo que se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3

6. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla [Discutir qué tabla es más apropiada]:

Valores de X					Suma
Probabilidad					

7. Si el estudiante acredita el examen cuando responde al menos dos preguntas correctamente ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen?
8. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar:

a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta.

____

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta.

____

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta.

____

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta.

____

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

Valores de x	Frecuencias
Suma	

Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Responde las siguientes preguntas: [Mismas preguntas que el Experimento Aleatorio 1].