

CARACTERÍSTICAS DEL “TRUNCAMIENTO” EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EMPÍRICOS EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

“Truncation” characteristics in the empirical problems resolution in a geometrical context

Saorín, A.^a, Quesada, H.^a y Torregrosa, G.^a

^aUniversidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar características del desenlace “truncamiento” del razonamiento configuracional durante la resolución de problemas empíricos geométricos, considerando, además, la forma en que se va construyendo la respuesta escrita que permite comunicar la solución a partir de los modos de expansión del discurso propuestos por Duval (1999). Analizamos las respuestas de 33 alumnos de 1º de bachillerato a dos problemas de tipo empírico en contexto geométrico. Los resultados nos han permitido identificar que: (1) el truncamiento se da cuando los estudiantes establecen las relaciones necesarias, en registro algebraico, que permiten resolver el problema y son conscientes de ello, desarrollando a partir de este momento un razonamiento lógico-deductivo independiente del registro geométrico, y (2) el discurso escrito (respuesta) se inicia desde un modo de acumulación para finalizarlo mediante un modo de sustitución.

Palabras clave: *razonamiento configuracional, problemas empíricos, geometría, registro algebraico, truncamiento.*

Abstract

The aim of this study is to identify some characteristics of the configurational reasoning “truncation” outcome during the geometric empirical problems resolution, considering, in addition, the way how the written answers is being developed which allows to communicate the solution based on the discourse expansion modes proposed by Duval (1999). We have analyzed the answers given by 33 1st Bachillerato students to two empirical problems in a geometrical context. The results have allowed us to identify the following statements: (1) “truncation” occurs when students are able to establish the required relations, in an algebraical register, that allow them to solve the problem as well as they are aware of this, developing from that moment a logical-deductive reasoning completely independent from the geometrical register, and (2) the written discourse (answer) it is originated by an accumulation mode to be finished by the substitution mode.

Keywords: *configurational reasoning, empirical problems, geometry, algebraical register, truncation.*

INTRODUCCIÓN

Durante la resolución de problemas geométricos de probar en los que se solicita demostrar un hecho geométrico (tesis) a partir de la información proporcionada sobre una configuración (hipótesis), los procesos de visualización desempeñan un papel relevante en la búsqueda de la solución. Duval (1998, 2016) los caracteriza mediante tres tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa. La aprehensión perceptiva la define como la identificación simple de una configuración geométrica. La aprehensión discursiva se manifiesta al asociar configuraciones o subconfiguraciones identificadas con afirmaciones/conceptos matemáticos, como teoremas, axiomas o definiciones. La aprehensión operativa se da al modificar, física o mentalmente, una configuración geométrica con el objetivo de identificar subconfiguraciones relevantes en el proceso

Saorín, A., Quesada, H. y Torregrosa, G. (2018). Características del “truncamiento” en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 554-563). Gijón: SEIEM.

de demostración. Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) proponen su modelo de *razonamiento configural* al analizar la coordinación desarrollada entre las aprehensiones operativa y discursiva durante la resolución de problemas geométricos de probar. Diversas investigaciones enmarcadas bajo esta perspectiva (Prior y Torregrosa, 2013; Clemente y Llinares, 2013; Clemente y Llinares, 2014; Llinares y Clemente, 2014; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017a) nos están ayudando a identificar y comprender diferentes factores que permiten, mediante un razonamiento lógico-deductivo, concluir con éxito el proceso de resolución de problemas geométricos de probar. Sin embargo, esta tipología de problemas apenas es utilizada en los libros de texto de educación secundaria y bachillerato, ya que solemos encontrar otro tipo de problemas, que denominaremos empíricos, que presentan características diferentes a las de los problemas geométricos de probar. En el presente trabajo nos serviremos del modelo *razonamiento configural* para analizar las respuestas escritas de estudiantes al resolver problemas empíricos en contexto geométrico, con el objeto de identificar características en los razonamientos desarrollados que permiten concluirlos con éxito.

MARCO TEÓRICO

Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) al centrar su atención en la acción coordinada entre las aprehensiones operativa y discursiva durante la resolución de problemas geométricos de probar, denominaron *razonamiento configural* al razonamiento generado como resultado de dicha coordinación, pudiendo desembocar en tres situaciones o desenlaces: (1) *truncamiento*, cuando la coordinación entre aprehensiones proporciona “la idea” que conduce a solucionar el problema, es decir, permite al resolutor conocer cómo se resuelve el problema de forma deductiva; (2) *conjetura sin demostración*, si el razonamiento genera una solución al problema, pero basada en conjeturas no probadas o demostradas, como pueden ser aquellas establecidas a partir de percepciones (erróneas o no) de la configuración inicial; y (3) *bucle*, cuando se da una situación de bloqueo que impide avanzar hacia el establecimiento de una solución. Este modelo ha sido utilizado para analizar las respuestas a problemas geométricos de probar. Sin embargo, en el presente trabajo, consideraremos problemas geométricos empíricos. En estos problemas se describen hechos o situaciones particulares asociados a la vida real dentro de un contexto geométrico, a los que se asocian medidas, datos y/o variables (longitudes, ángulos, etc.) en lugar de hipótesis iniciales como sucede en los problemas de probar. Por ello, durante la resolución de problemas empíricos es habitual la aparición del registro algebraico, ya que no demandan una demostración formal, sino un resultado concreto obtenido a partir de los datos iniciales. Sin embargo, a pesar de las diferencias entre los problemas de probar y empíricos, para su resolución son necesarios conocimientos y propiedades geométricas similares. Debido a las características propias de los problemas empíricos se hace necesario incluir el registro algebraico en el modelo *razonamiento configural*, por lo que surge la necesidad de su extensión para permitirnos analizar los problemas empíricos en contexto geométrico. Torregrosa (2017) justifica la inclusión del registro algebraico en el modelo *razonamiento configural* a partir de los conceptos de conversión (cambiar una representación de registro sin cambiar el objeto representado) y tratamiento (transformaciones realizadas de una representación dentro de un mismo registro) de la teoría de los registros semióticos de Duval (1999). Este hecho nos permite considerar los datos o condiciones particulares expresadas en registro algebraico y asociadas a la configuración geométrica como afirmaciones matemáticas (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b; Torregrosa, 2017).

Por otro lado, el discurso escrito generado por los estudiantes al resolver problemas geométricos pone de relieve el razonamiento desarrollado que conduce (o no) a la solución. Duval (1999) considera la forma en que se va construyendo la respuesta escrita a un problema mediante la asociación de las afirmaciones que se establecen durante el proceso de resolución a partir de lo que denomina “*modos progresión (expansión) discursiva*”. Si el discurso escrito se construye con afirmaciones que no siguen un orden lógico y no están, necesariamente, conectadas entre sí se da el

modo de *acumulación*. Este modo se observa, por ejemplo, al establecer afirmaciones matemáticas que únicamente reflejan propiedades o teoremas identificados en una configuración geométrica. En cambio, si se genera un discurso progresivo y secuencial de obtención de nueva información en el que cada afirmación matemática es consecuencia lógica de la anterior, tenemos el modo de *sustitución*. Encontramos este modo de construcción del discurso, por ejemplo, al aplicar un criterio de congruencia de triángulos a afirmaciones matemáticas establecidas previamente para obtener nueva información a partir de las mismas.

El objetivo del presente trabajo es identificar, en una primera aproximación, características del *truncamiento* del modelo *razonamiento configural* al resolver problemas empíricos en contexto geométrico, considerando la forma en que los estudiantes construyen el discurso escrito que manifiesta el razonamiento desarrollado conducente al establecimiento de una solución.

MÉTODO

Participantes y Contexto

En el presente trabajo participaron 33 alumnos de 1º de bachillerato, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Dichos alumnos no habían recibido formación relacionada con el proceso de demostración matemática en geometría, aunque sí con el proceso de resolución de problemas de tipo empírico debido a que es la tipología de problemas predominante en esta etapa educativa.

Instrumento

Los estudiantes participantes resolvieron dos problemas empíricos (Figura 1) seleccionados teniendo en cuenta que los estudiantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para resolverlos. En ambos problemas se presentaban unas condiciones iniciales en forma de datos numéricos asociadas a una configuración geométrica. Para su resolución los estudiantes debían poner en juego aprehensiones operativas y discursivas que desencadenasen un razonamiento que les permitiese establecer un discurso escrito conducente a la solución.

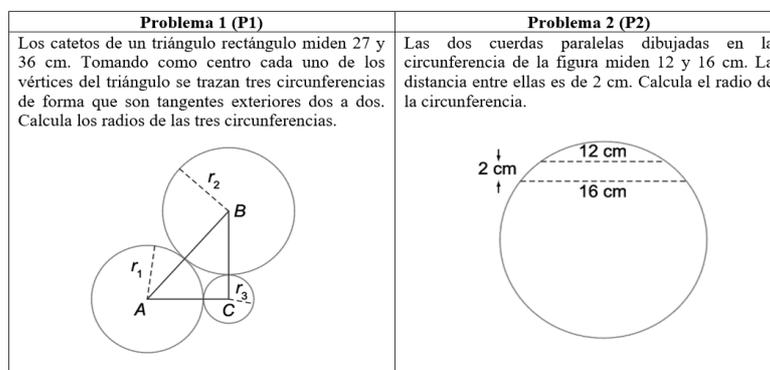


Figura 1. Problemas empíricos utilizados en el estudio

Análisis

Las respuestas escritas (discursos escritos) de los estudiantes al resolver los problemas fueron analizadas en tres fases. En primer lugar, se transcribieron y segmentaron las diferentes partes del discurso escrito en unidades de análisis que permitiesen detectar los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas puestos de manifiesto durante la resolución del problema, para posteriormente durante la segunda fase identificar los desenlaces del *razonamiento configural*. Consideramos unidad de análisis cada parte del discurso escrito en que se manifiesta la identificación o utilización de definiciones, axiomas, propiedades, etc., por parte de los estudiantes. En la tercera fase se procedió a diferenciar los diferentes *modos de expansión* del discurso escrito generado.

RESULTADOS

Los truncamientos del razonamiento configural detectados han supuesto el 22,72% de la totalidad de los problemas analizados. Observamos que se da el truncamiento en la resolución de los problemas analizados una vez cesan los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas que conducen al establecimiento de las relaciones que permiten a los estudiantes resolverlos. Por tanto, es en este punto donde finaliza el razonamiento configural desarrollado para dar paso a un tratamiento de las relaciones establecidas, en registro algebraico, que permite dar una solución a los problemas planteados.

A continuación, mostraremos el resultado del análisis a la respuesta del alumno 26 (en adelante AL26) al problema 1 (en adelante P1) presentada en la Figura 2 cuyo razonamiento configural desemboca en truncamiento y que ilustra lo comentado anteriormente. En la Figura 3 mostramos las unidades de análisis consideradas junto con las subconfiguraciones relevantes identificadas durante la resolución del problema. En la Figura 4 describimos los ciclos de aprehensiones operativas (AO_i) y discursivas (AD_i) del razonamiento configural desarrollados y los procesos de conversión entre registros y tratamientos realizados. En la misma figura las dobles flechas representan coordinaciones entre las diferentes aprehensiones.

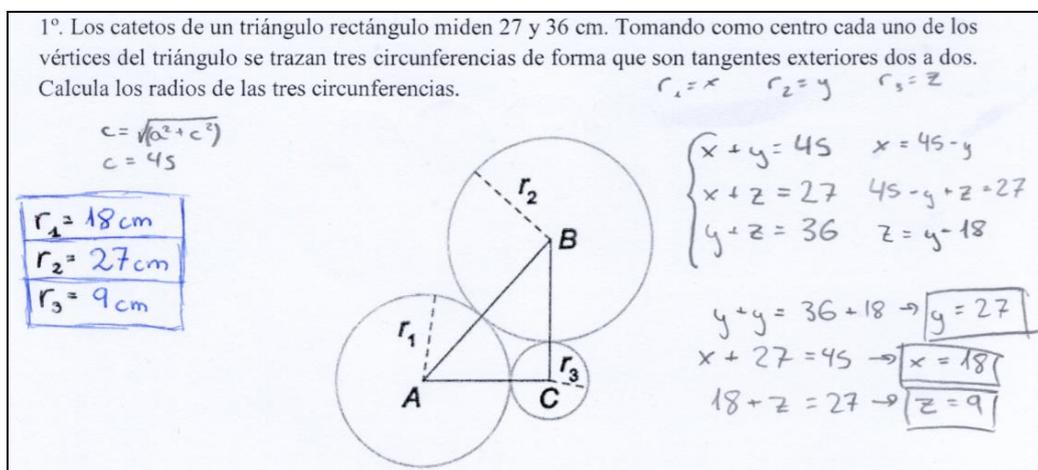


Figura 2. Respuesta de AL26 a P1

El estudiante inicia el razonamiento configural considerando la subconfiguración formada por el ΔABC , subconfiguración (a) mostrada en la Figura 3, realizando una aprehensión operativa (en adelante AO), a la que asocia el teorema de Pitágoras (aprehensión discursiva, en adelante AD) en registro algebraico, como se muestra en (1) (Figura 3). Este hecho le permite relacionar las longitudes de los catetos facilitadas por el enunciado con el lado desconocido (hipotenusa) del triángulo identificado para realizar un tratamiento y obtener el valor de su longitud (45cm) mostrado en (2) (Figura 3). Realizan, por tanto, un primer ciclo coordinado de aprehensión operativa/discursiva mostrado en la Figura 4 (AO₀ ↔ AD₀).

Unidades de análisis	Subconfiguraciones identificadas
(1) $c = \sqrt{a^2 + c^2}$ (2) $c = 45$	(a)
(3) $r_1 = x \quad r_2 = y \quad r_3 = z$	(b)
(4) $x + y = 45$	(c)
(5) $x + z = 27$	(d)
(6) $y + z = 36$	
(7) $x = 45 - y$ (8) $45 - y + z = 27$ (9) $z = y - 18$ (10) $y + y = 36 + 18 \rightarrow y = 27$ (11) $x + 27 = 45 \rightarrow x = 18$ (12) $18 + z = 27 \rightarrow z = 9$	
(2) $r_1 = x \quad r_2 = y \quad r_3 = z$ (13) $r_1 = 18 \text{ cm}$ $r_2 = 27 \text{ cm}$ $r_3 = 9 \text{ cm}$	

Figura 3. Unidades de análisis y subconfiguraciones identificadas

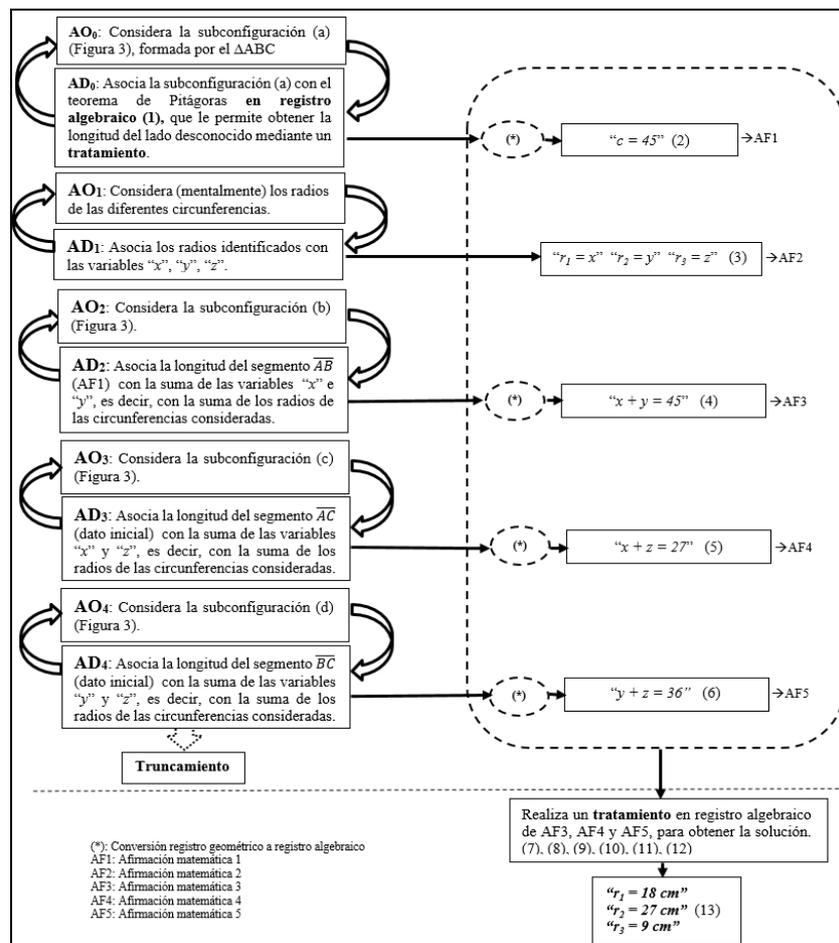


Figura 4. Razonamiento configuracional desarrollado por AL26 al resolver P1

En (3), tras calcular el valor del lado del triángulo desconocido, identifica (mentalmente) los radios de las circunferencias para asignarles las variables “x”, “y” y “z” (AO₁↔AD₁). En (4), considera la subconfiguración (b) formada por las circunferencias con centros en A y B junto con el segmento

\overline{AB} que los une para asociar su longitud (45 cm) con la suma de los radios “ r_1 ” y “ r_2 ” (identificados con las variables “ x ” e “ y ”), realizando una conversión de la subconfiguración descrita (registro geométrico) al registro algebraico, expresando la relación indicada en registro algebraico mediante la afirmación matemática $AF3$ ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$). En (5), considera la subconfiguración (c) formada por las circunferencias con centros en A y C junto con el segmento \overline{AC} que los une para asociar su longitud (27 cm) con la suma de los radios “ r_1 ” y “ r_3 ” (identificados con las variables “ x ” y “ z ”), realizando una conversión del registro geométrico al algebraico de la subconfiguración descrita, que le permite expresar la relación indicada en registro algebraico mediante la afirmación matemática $AF4$ ($AO_3 \leftrightarrow AD_3$). En (6), considera la subconfiguración (d) formada por las circunferencias con centro en B y C junto con el segmento \overline{BC} que los une para asociar su longitud (36 cm) con la suma de los radios “ r_2 ” y “ r_3 ” (identificados con las variables “ y ” y “ z ”), realizando una conversión del registro geométrico al algebraico de dicha situación mediante la afirmación matemática $AF5$ ($AO_4 \leftrightarrow AD_4$).

En (7), (8), (9), (10), (11) y (12) utiliza las afirmaciones expresadas en registro algebraico en (4), (5) y (6) ($AF3$, $AF4$ y $AF5$) para realizar un tratamiento que le permite obtener los valores de las variables “ x ”, “ y ” y “ z ”, para en (13) volver a asociarlas con los radios correspondientes, permitiendo concluir el problema emitiendo una solución.

En esta última fase, encontramos que no se da ningún ciclo coordinado de aprehensiones, sino que únicamente se realiza un tratamiento en registro algebraico de las relaciones establecidas para calcular una solución al problema. Por ello consideramos que el razonamiento configural desemboca en truncamiento debido a que los ciclos coordinados entre aprehensiones han proporcionado al estudiante las relaciones (extraídas de las subconfiguraciones identificadas) que permiten resolver correctamente el problema. El razonamiento configural finaliza una vez el estudiante ha establecido las relaciones (en forma de afirmaciones matemáticas en registro algebraico) necesarias para resolver el problema, es decir, una vez que sabe cómo se resuelve, hecho que caracteriza el desenlace truncamiento del razonamiento configural. Sin embargo, continúa generando discurso escrito (en registro algebraico) que refleja un razonamiento lógico-deductivo conducente a comunicar la solución al problema, aunque se trata de un razonamiento totalmente independiente del registro geométrico.

La Figura 5 se muestra la respuesta del alumno 1 (AL1) al problema 2 (P2).

2°. Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12' y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. ¿Radio?

Figura 5. Respuesta de AL1 a P2

En este caso, el estudiante traza dos radios, uno que une el extremo de la cuerda de 16 cm con el centro de la circunferencia y otro perpendicular a las cuerdas dadas en su punto medio, por lo que ambas quedan divididas en dos partes iguales, tal y como se muestra en (1) (Figura 6). Por tanto, realiza una aprehensión operativa de cambio figural (AO_0) (Figura 7).

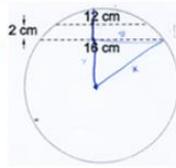
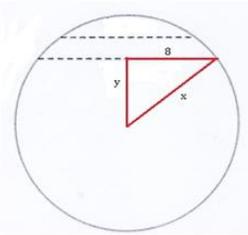
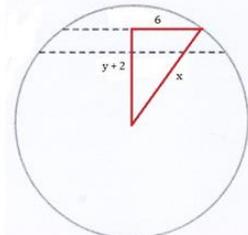
Unidades de análisis	Subconfiguraciones identificadas
<p>(1) </p> <p>(2) radio = x</p> <p>(3) $h^2 = c^2 + c^2$</p> <p>(4) $x^2 = 8^2 + y^2$</p> <p>(5) $x^2 = (y+2)^2 + 6^2$</p> <p>(6) $(y+2)^2 + 36 = 64 + y^2$ $y^2 + 4 + 4y + 36 = 64 + y^2$ $4y = 24$ $y = 6 \rightarrow 6+2 = \text{cateto de la de 12}$</p> <p>(7) $x^2 = (6+2)^2 + 6^2$ $x^2 = 64 + 36$ $x = 10 \text{ cm}$</p> <p>(8) Radio es 10 cm</p>	<p>(a) </p> <p>(b) </p>

Figura 6. Unidades de análisis y subconfiguraciones identificadas

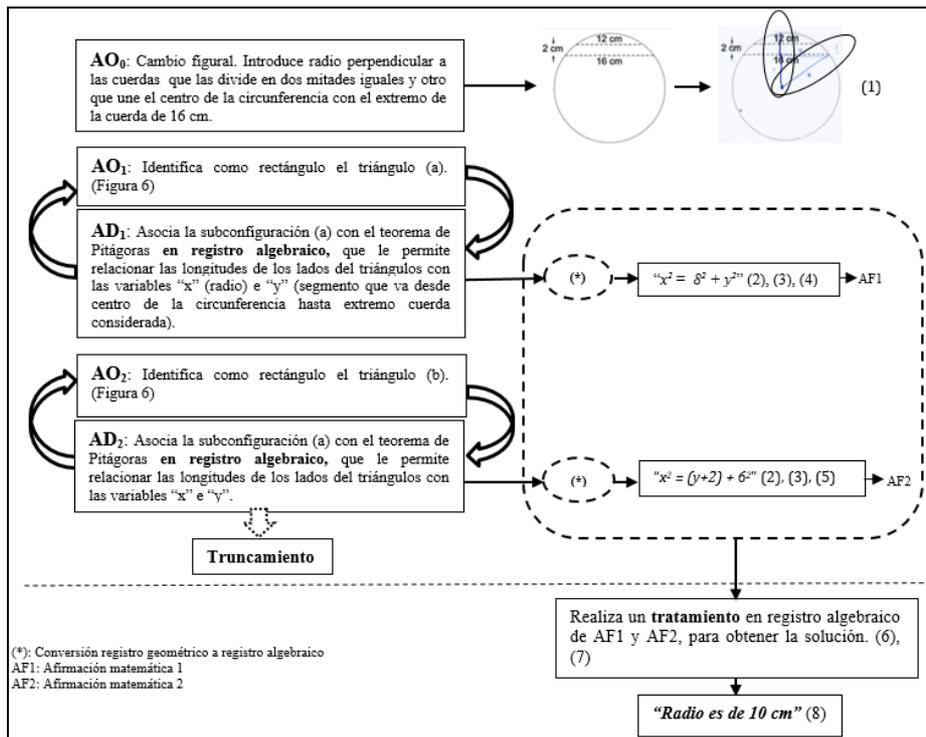


Figura 7. Razonamiento configural desarrollado por AL1 al resolver P2

Tras la modificación de la configuración inicial, considera la subconfiguración (a) (Figura 6) a la que asocia el teorema de Pitágoras en registro algebraico (3) (Figura 6) permitiéndole establecer la relación (4) (Figura 6) en registro algebraico, es decir, la afirmación matemática *AF1*, terminando así el primer ciclo del razonamiento configural ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$) (Figura 7). Análogamente, el hecho de considerar la subconfiguración (b) (Figura 6) le conduce a establecer la afirmación matemática *AF2*, finalizando el segundo ciclo del razonamiento configural ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$) (Figura 7). Tras establecer ambas afirmaciones, realiza un tratamiento en registro algebraico (resolviendo el sistema de ecuaciones planteado en (6) y (7) (Figura 6) y comunica la solución al problema en (8) (Figura

6). De esta forma, el razonamiento configural (ciclos coordinados de aprehensiones), junto con los procesos de conversión entre registros, han permitido al estudiante conocer la forma de resolver el problema (truncamiento) antes de realizar el tratamiento en registro algebraico para concluirlo. Así, el razonamiento configural finaliza una vez se han establecido las relaciones necesarias, en forma de afirmaciones matemáticas (ecuaciones), que permiten resolver de forma deductiva el problema mediante un tratamiento en registro algebraico de las mismas. Del mismo modo que en caso descrito anteriormente para P1, una vez que el estudiante sabe cómo resolver el problema a partir de las relaciones establecidas continúa con su discurso escrito destinado a comunicar la solución final al problema, desarrollando un razonamiento lógico-deductivo sin considerar el registro algebraico, que omite una vez el razonamiento configural finaliza.

Forma en que los estudiantes construyen el discurso escrito (respuesta)

Al analizar la forma en que los estudiantes construyen su discurso escrito (respuesta) considerando los modos de expansión del discurso (Duval, 1999), tenemos que AL26 al resolver P1 comienza extrayendo información de la subconfiguración (a) en forma de afirmación matemática (1) (Figura 3) que representa, en registro algebraico, la forma general del teorema de Pitágoras. Esta afirmación es establecida mediante el modo de acumulación, ya que sólo refleja información inferida de la subconfiguración considerada, como podría ser también, por ejemplo, que la suma de sus ángulos interiores es 180° . A partir del teorema de Pitágoras realiza un tratamiento (considerando los datos iniciales) para obtener que la longitud del segmento \overline{AB} es de 45 cm (2) (Figura 3). Consideramos que este valor es obtenido por sustitución, ya que su cálculo implica una secuencia ordenada y lógica de operaciones, siendo cada una de ellas resultado de la anterior. En (4), tras identificar los radios con las variables x , y , z en (3), escribe en forma de afirmación matemática (en registro algebraico) la relación entre los radios r_1 y r_2 extraída de la subconfiguración (b) (Figura 3). De forma análoga, establece las relaciones existentes entre los radios restantes en (5) y (6) a partir de las subconfiguraciones (c) y (d) (Figura 3). Estas afirmaciones son sólo el “reflejo” de la información inferida de las subconfiguraciones consideradas y expresadas en registro algebraico, no siendo consecuencia lógica una de otra y pudiendo haberse establecido en cualquier orden. Por ello, tenemos que (4), (5) y (6) son afirmaciones construidas por acumulación. Sin embargo, las afirmaciones (7), (8), (9), (10), (11) y (12) (Figura 3) no son establecidas a partir de información extraída de las subconfiguraciones geométricas identificadas, sino que provienen del tratamiento de las afirmaciones (4), (5) y (6), generándose una secuencia ordenada y lógica de afirmaciones matemáticas que permite resolver el problema y dar una solución en (13). Por tanto, consideramos que esta parte final del discurso escrito se construye mediante un modo de sustitución.

Para el caso de AL1 al resolver P2, tenemos que el estudiante empieza recopilando toda la información inferida de la subconfiguración (a) (Figura 6) estableciendo las afirmaciones (2), (3) y (4). En (2) se refleja la relación entre la variable “ x ” y el radio, en (3) indica la forma general del teorema de Pitágoras, para en (4) aplicarlo a los valores del triángulo rectángulo identificado. De igual modo, la información extraída de la subconfiguración (b) (Figura 6), le permite establecer la afirmación (5). Estas afirmaciones resultan de convertir toda la información extraída de las subconfiguraciones (a) y (b) (Figura 6) al registro algebraico y “acumularla” en el discurso escrito, no siendo consecuencia lógica una de la otra, por lo que son establecidas mediante un modo de acumulación. Las afirmaciones (6), (7) y (8) (Figura 6) son construidas a partir de relaciones lógicas establecidas entre la información previa acumulada en registro algebraico. En (6) iguala (4) y (5) y realiza un tratamiento para obtener el valor de la variable “ y ” que le permite en (7) calcular el valor de la variable “ x ” mediante otro tratamiento. En (8) asocia el valor obtenido para la variable “ x ” con la longitud del radio finalizado de esta forma el problema. En parte del discurso escrito se genera un razonamiento lógico-deductivo en el que cada afirmación es consecuencia lógica de la anterior, por lo que se construye por sustitución.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo es identificar características del desenlace *truncamiento* del modelo *razonamiento configural* cuando los estudiantes resuelven problemas empíricos geométricos, considerando la forma en que construyen la respuesta escrita (discurso) que comunica el proceso de resolución.

En los problemas analizados el truncamiento del razonamiento configural se da en el momento en el que los estudiantes han establecido las relaciones en registro algebraico necesarias para resolver el problema mediante un tratamiento de las mismas. En el caso de P1, el estudiante AL26, una vez establece las relaciones (4), (5) y (6) (Figura 3), ya sabe cómo resolverlo a pesar de no haber propuesto ninguna solución. De forma análoga sucede en P2, ya que cuando el estudiante AL1 establece las relaciones (4) y (5) (Figura 6), conoce como se resuelve el problema, a pesar de no haber finalizado el proceso de resolución. Los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas finalizan una vez los estudiantes han conseguido establecer las relaciones que resuelven el problema y son conscientes de ello. Por tanto, cesan las interacciones entre las subconfiguraciones identificadas y las definiciones, propiedades o teoremas que van formando el discurso escrito, hasta que los estudiantes, mediante procesos de conversión entre registros, han expresado las relaciones identificadas en las subconfiguraciones consideradas en registro algebraico. Es decir, han conseguido establecer un modelo en registro algebraico de una situación geométrica. Una vez modelan la situación en registro algebraico, el registro geométrico se hace innecesario para finalizar la resolución, ya que únicamente es necesario un tratamiento para poder obtener la solución al problema. Por tanto, en esta parte final del proceso de resolución los alumnos ponen de manifiesto el desarrollo de un razonamiento deductivo independiente del registro geométrico, y por tanto de cualquier proceso de visualización, en consonancia con los resultados de Duval (2016).

Por otro lado, en los truncamientos analizados, los estudiantes van componiendo el discurso escrito (respuesta) a partir de la acumulación de la información inferida de las subconfiguraciones identificadas, hasta que establecen las relaciones necesarias, en registro algebraico, que permiten resolver el problema, por lo que esta parte del discurso se caracteriza por un predominio del modo de acumulación. Una vez “acumuladas” las relaciones necesarias para resolver el problema, los estudiantes empiezan a desarrollar un razonamiento lógico-deductivo mediante un tratamiento de las mismas, en las que cada afirmación es consecuencia de la anterior, con total independencia del registro geométrico, por lo que predomina el modo de sustitución. Por tanto, encontramos que el discurso se inicia desde un modo de acumulación para finalizar mediante el modo de sustitución. De este modo, el truncamiento podría caracterizarse, además, por un cambio en el modo de expansión del discurso, que podría explicarse por el cambio en el estatus (rol) de las relaciones necesarias para resolver el problema dentro del razonamiento desarrollado (Saorín, Torregosa y Quesada, 2017a).

El análisis bajo la perspectiva del razonamiento configural, considerando los procesos de conversión entre registros y de tratamiento, y los modos de expansión del discurso, nos puede permitir arrojar luz sobre el momento en el que los estudiantes son conscientes de cómo se resuelven los problemas, es decir, sobre cuando se produce el truncamiento al resolver problemas empíricos en contexto geométrico y de qué forma puede manifestarse en el discurso escrito (respuesta).

Referencias

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.

- Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds), *Investigación en Educación Matemáticas XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D’Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-61). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
- Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers’ configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250.
- Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 339-368.
- Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017a). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.
- Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017b). Razonamiento configural extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. II CEMACYC. Cali, Colombia, 2017.
- Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 1-17.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.