SABER MÁS NO IMPLICA RESOLVER MEJOR

Knowing more does not imply resolving better

Sua, C.[a]

[a]Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Los problemas de demostración, vistos como un ejemplo de la resolución de problemas, demandan poner en juego distintos conocimientos y habilidades en el uso de la geometría dinámica cuando se cuenta con el apoyo de esta. Apoyados en dos grupos de estudiantes para profesor de matemáticas con un nivel de formación matemática distinta, mostramos que el proceso de resolución de un problema deja ver estrategias de solución distintas, sin embargo, algo llamativo de los resultados obtenidos, es que los estudiantes con formación matemática inferior muestran mejores resultados. El objetivo de este documento es mostrar que los conocimientos con los que un individuo cuenta y su conocimiento del software no son los únicos aspectos relevantes en el proceso de resolución.

Palabras clave: *resolución problemas, GeoGebra, episodios, problemas de demostración.*

Abstract

Proof problems, seen as an example of problem solving, demand to use different knowledge and skills about dynamic geometry when they can use it. Supported in two groups of pre-service mathematics teachers with a different level of mathematical training, we show that problem solving reveals different solution strategies, however, what is striking about the results obtained, is that the students who have a lower mathematical background show better results. The objective of this document is show that someone's knowledge and their knowledge about the software aren't the unique relevant aspects in the problem solving.

Keywords: *problem solving, GeoGebra, episodes, proof problems.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las herramientas tecnológicas ha permitido su incorporación en propuestas de formación. El potencial de estos recursos radica en la posibilidad de alejarse de representaciones estáticas, donde los objetos involucrados se dotan de propiedades no necesariamente ciertas y predomina la mecanización de procedimientos, favoreciendo ahora el uso de representaciones manipulables, que por su naturaleza, promueven procesos matemáticos como: visualizar, conjeturar, argumentar y conceptualizar (Valencia, Sanabria, y Ibáñez, 2012). En el caso de la geometría se ha privilegiado el uso de programas de geometría dinámica [PGD/GD], donde los objetos geométricos se dotan de movimiento gracias a la función de arrastre. Dada la conservación de las propiedades de estos objetos al manipularlos, en este recurso se vislumbra una herramienta para promover el descubrimiento de relaciones de dependencia difícilmente observables en configuraciones estáticas. Esto ha despertado nuevos intereses en la enseñanza de la geometría entre los que se encuentra la demostración (Hanna, 2001, p. 12). La investigación reconoce un tránsito, desde enfoques donde se pretendía promover habilidades para la demostración en los estudiantes, hacia enfoques donde se estudia la evolución de la comprensión de los estudiantes al respecto y formas para apoyarla (Marrades y Gutiérrez, 2001, p. 88). Entre las bondades reconocidas de la GD se encuentra la posibilidad favorecer dicha comprensión (Hanna, 2001, p. 13; Marrades y Gutiérrez, 2001).

Algunas investigaciones reconocen la dificultad de los estudiantes al afrontar la demostración (Koichu y Leron, 2015) y por ello han involucrado constructos teóricos para comprender esta

Sua, C. (2018). Saber más no implica resolver mejor. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 564-573). Gijón: SEIEM.

dificultad. Fruto de este ejercicio, se han establecido nexos entre la demostración y la resolución de problemas, donde la primera es instancia de la segunda (Mamona-Downs y Downs, 2005; citado en Koichu y Leron, 2015). Las investigaciones realizadas al respecto han analizado las actuaciones de los estudiantes al afrontar demostraciones a la luz de teorías construidas sobre la resolución de problemas (Furinghetti y Morselli, 2009). Lo anterior muestra ya esfuerzos investigativos, sin embargo, poco se ha reportado sobre de la naturaleza del proceso de resolución de problemas de demostración en geometría con ayuda de la GD y la forma en que el conocimiento matemático incide en este. Esto sitúa un asunto que merece la pena ser estudiado, a saber, la esencia del proceso de resolución de problemas de demostración en geometría cuando esta es asistida por la GD. En esta vía, estudiamos el proceso de resolución de problemas de demostración en geometría llevado a cabo por dos grupos con formación matemática distinta, enfocándonos en los episodios que tienen presencia allí, con el fin de identificar y comparar la naturaleza de este proceso y determinar la forma en que sus conocimientos inciden en el mismo. Para ello presentamos en este documento los referentes conceptuales adoptados, la estrategia metodológica involucrada y el análisis del proceso de resolución de un problema a la luz los referentes teóricos. En un momento final se presentan las conclusiones derivadas del análisis presentado en función de los objetivos declarados líneas atrás.

MARCO TEÓRICO

Problemas de demostración

Un problema es una situación que no se relaciona inmediatamente con un conocimiento matemático que juegue un rol en la solución (Nunokawa, 2010). La situación problema no puede ser resuelta inmediatamente por el que la afronta, quien tampoco conoce algún mecanismo conducente a su resolución. Esto lleva a analizar la situación abordada y usar heurísticas que permitan trazar una ruta de solución (Nunokawa, 2010), que pueden ser específicas o generales a un dominio de conocimiento y pueden promover una estrategia general de resolución o apenas un pequeño avance. Establecer una demostración puede verse como un problema, pues se reconocen condiciones iniciales y un resultado a obtener con base en estas, avanzando desde el estado inicial del problema hasta un estado final del mismo, transitando por estados intermedios gracias al uso de elementos de un sistema teórico de referencia a través de un razonamiento deductivo (Perry, Samper, Camargo, y Molina, 2013). Denominaremos a estas situaciones *problemas de demostración*, conservando así la idea propuesta por Polya al referirse a estos como una clase de problemas en que los estudiantes proveen una justificación a alguna aserción, explícita en el enunciado del problema o descubierta y formulada como parte de la tarea (Marrades y Gutiérrez, 2001).

Episodios de la resolución de problemas

Adoptamos el modelo de Kuzle (2015), elección que atiende a la caracterización del proceso de resolución de problemas cuando media la GD, pues para esta autora los recursos tecnológicos (incluida la GD) tienen implicaciones favorables en la resolución de problemas. Esto da pertinencia y relevancia a este modelo por la presencia de la GD en el estudio presentado acá. Este modelo involucra siete episodios (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), los cuales son presentados por Schoenfeld originalmente, e interpretados y complementados por Kuzle (2015) como fundamento teórico de su investigación. Aun cuando el modelo sugiere una trayectoria lineal entre los episodios, el recorrido por estos puede darse de forma cíclica, repetitiva o incluso omitiendo algunos episodios. Una descripción de estos se presenta a continuación.

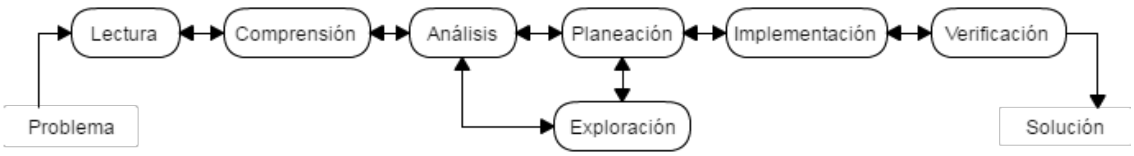


Figura 1. Episodios de la resolución de problemas (Fuente: Kuzle, 2015)

Tabla 1. Descripción episodios de resolución

Episodio	Descripción
Lectura (L)	Tiene lugar cuando un sujeto inicia a leer el enunciado del problema en voz alta. Esto incluye el reconocimiento de las condiciones del problema, la verbalización de las partes del enunciado y momentos de silencio que podrían llevar a una lectura mental, que indicaría contemplación del enunciado del problema, o pensamientos en blanco.
Compr. (C)	Engloba los intentos de un sujeto por clarificar el significado del problema, sus partes y la relación entre estas. Se identifican objetivos del problema, este se representa y se evalúa el conocimiento personal respecto al demandado.
Análisis (A)	Cuando no hay una forma aparente de proceder después de haber leído el problema, tiene presencia un ejercicio de análisis. Aquí el estudiante descompone el problema en otros, examina las relaciones entre los datos, las condiciones y el objetivo del problema, seleccionando posibles rutas de solución. Esto lleva a reformular o simplificar el problema.
Explo.(E)	Se realiza un recorrido por el espacio del problema, descubriendo información relevante que pueda ser incorporada en episodios de análisis, planeación o implementación. Aquí tienen presencia distintas heurísticas, la examinación de problemas relacionados, el uso de analogías, etc. La distinción entre la exploración y el análisis puede darse en su estructura. Mientras el análisis se caracteriza por ser bien estructurado, ciñéndose a las condiciones o logros del problema, la exploración es menos estructurada, desligada del problema original.
Planea.(P)	Se da un cuestionamiento del sujeto sobre cómo proceder para resolver el problema. Algunas rutas tentativas pueden ser trazadas y consideraciones o anticipaciones sobre estas rutas se pueden vislumbrar, lo que puede llevar o no a su implementación.
Imple.(I)	Se ejecutan acciones para operar con la información de la que se dispone. Estas acciones pueden apoyarse en planes considerados. Sin embargo, es posible que se implemente alguna estrategia sin que esta se planificara (actuar de forma automática a un estímulo sin reflexionar sobre este). Es posible que aun cuando se haya planificado una ruta de trabajo para resolver un problema, esta no se ejecute porque al considerar su efectividad no se vea mayor avance, o porque factores externos al sujeto impidan su ejecución.
Verifi.(V)	Se llevan a cabo acciones de revisión sobre los resultados obtenidos y su correspondencia con lo solicitado en el enunciado del problema. Este episodio no es punto final del proceso de resolución, dado que puede desencadenar que el sujeto se sitúe en el punto de partida nuevamente si el resultado obtenido no es adecuado o consecuente con lo solicitado.
Transi.(T)	Entre los episodios mencionados tiene lugar una transición, vista como una coyuntura en la que se evalúa un estado del problema, su avance o resultados y se toman decisiones que llevan a seleccionar nuevas direcciones, esto es, un nuevo episodio.

METODOLOGÍA

En este documento analizamos el trabajo de dos parejas de estudiantes al resolver cuatro problemas de demostración con ayuda de GD. Exploramos y comprendemos las dinámicas que tienen presencia en esta configuración dentro de un contexto particular, como lo es la resolución de problemas. Por ello, consideramos que el estudio hace parte de un estudio de caso cuya unidad de análisis es el proceso de resolución de los problemas (Baxter y Jack, 2008).

Contexto del estudio

Dos estudiantes para profesor de primer semestre (Ana y Juan) y dos de cuarto semestre (Caro y Paul), de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) fueron involucrados. La elección de trayectorias académicas distintas atendía al deseo de comparar el proceso de resolución exhibido en cada grupo y estudiar la relación entre la profundidad en la formación matemática y el proceso de resolución manifestado. Ana y Juan apenas habían tomado un curso en que se realizan aproximaciones a definiciones y propiedades de objetos geométricos (rectas, circunferencias, cuadriláteros y triángulos), se promueven procesos de argumentación y se usa de manera inicial la GD, mientras que Caro y Paul habían tomado cuatro cursos de geometría, estudiando formalmente objetos y relaciones en el plano, el espacio y la geometría analítica.

Para ambos grupos era común la metodología de los cursos. Esta es la propuesta metodológica formulada por el grupo de investigación AEG (Perry et al., 2013), a través de la cual los elementos teóricos estudiados en clase surgen como resultado de un trabajo grupal en el que los estudiantes se involucran en la resolución de problemas y la GD es protagonista, al permitir que procesos de conjetura y justificación tengan lugar. Las producciones de los estudiantes se someten a la evaluación de sus compañeros, quienes las apoyan o refutan. Los elementos aceptados conforman un sistema teórico (definiciones, teoremas y postulados) en el marco de la geometría euclidiana.

Diseño de la secuencia

Se contemplaron problemas que involucraran asuntos del primer curso de geometría que pudieran ser vistos como problemas de demostración. Frente al recurso tecnológico, los problemas situaban a los estudiantes en un escenario en el que era indispensable apoyarse en las bondades de la GD para operar con los datos dados. Así pues, se realizó una revisión en la literatura para identificar problemas bajo estas consideraciones, seleccionando así cuatro problemas. Estos problemas se diferenciaban por los objetos geométricos que involucraban, las relaciones geométricas estudiadas y el uso dado a la GD en cada uno (función de arrastre, traza, construcciones blandas y robustas). Por motivos de extensión, presentamos el trabajo realizado por Caro y Paul alrededor de uno de estos problemas, el cual se presenta a continuación. Esta elección atiende a la naturaleza inductiva de la estrategia de solución y la forma rígida en que la GD se involucra.

Construya un cuadrilátero que cumpla la siguiente propiedad: Las bisectrices de dos ángulos adyacentes del cuadrilátero determinan un ángulo recto. Formule conjeturas y justifíquelas.

Acopio de datos y análisis retrospectivo

Se conformaron parejas de estudiantes del mismo semestre. En el transcurso de una semana, durante ocho sesiones fuera del espacio de clases, se reunió el investigador, autor del documento, con cada pareja para resolver cada problema. Cada pareja contó con un computador con GeoGebra y un archivo con los enunciados de los problemas. La elección de este PGD atendió a la familiaridad de los estudiantes con el mismo en el desarrollo de sus cursos de geometría. El investigador, acompañó los grupos sin tomar parte en la discusión que entre sus miembros se generó. Él solicitaba a los estudiantes verbalizar sus pensamientos cuando se presentaban pausas o silencios prolongados con el fin de registrarlos. Se utilizó *Camtasia* para registrar la interacción llevada a cabo en la pantalla del computador, las conversaciones sostenidas entre los estudiantes y una captura, con ayuda de la cámara frontal del computador, de sus manifestaciones corporales; las producciones escritas de los estudiantes al abordar cada problema también se acopiaron. Al finalizar el trabajo con cada grupo el investigador realizaba algunas preguntas a los grupos con el fin de obtener información sobre episodios que requirieran una explicación adicional o fueran llamativos.

Los audios de las grabaciones realizadas fueron transcritos. Las transcripciones fueron fragmentadas teniendo en cuenta los objetivos de los sujetos durante el proceso de resolución. Esto permitió convertir cada transcripción en una secuencia de bloques. Los registros generados por cada grupo fueron analizados de manera independiente para reconocer episodios de resolución y su duración. Posteriormente, se realizó un cuadro comparativo entre el trabajo realizado por los grupos al afrontar los problemas, analizando el proceso de resolución y la forma en que la GD se involucró.

Un episodio emergente

Al involucrar el modelo de Kuzle en el análisis se pudo observar que no todas las acciones de los estudiantes podían ser "codificadas" a la luz de este. Se reconocieron momentos del proceso de resolución en los que los estudiantes establecían resultados parciales y recogían los resultados del trabajo realizado. Esto llevó a considerar un nuevo episodio que se describe a continuación.

Tabla 2. El episodio de síntesis

Síntesis (S)	Se retoman resultados que se han obtenido al realizar distintos esfuerzos al resolver el problema. Estos resultados, que pueden ser parciales, provienen de la exploración realizada en una situación particular, el análisis de esta o las creencias de quien afronta el problema.

UN EJEMPLO DE LO OCURRIDO

Presentamos el proceso de resolución de uno de los problemas propuestos. Para ello haremos un recuento del proceso, identificando la emergencia de episodios de resolución, los cuales se presentan utilizando su letra inicial.

Las bisectrices del cuadrilátero

Caro inicia realizando una lectura del enunciado sin hacer énfasis o repetir alguna parte de este [L]. Una vez termina, Paul sugiere involucrar GeoGebra y construir un cuadrilátero [P], preguntando a Caro sobre la pertinencia de esta idea, a lo que Caro manifiesta aceptación. Paul representa gráficamente el cuadrilátero [I] y Caro le pide que construya las bisectrices de los ángulos involucrados. Al final retoman las condiciones del problema para que la cantidad de bisectrices construidas corresponda a las solicitadas. Caro determina las medidas de los ángulos a los que se les construyó su bisectriz y considera que se manipule [P] el cuadrilátero con el fin de identificar las propiedades de este, en función de sus ángulos, que hacen que la perpendicularidad de las bisectrices se satisfaga. Para Paul no es claro qué ángulos deben ser rectos, por lo que Caro le comenta que es el ángulo determinado por las bisectrices el que debe medir 90 [C]. Caro determina las medidas de los otros ángulos del cuadrilátero y la del ángulo determinado por las bisectrices (ángulo E) [I] a la vez que hace explícito que, con base en estos, determinarán el tipo de cuadrilátero para el cual las bisectrices son perpendiculares (Figura 2).

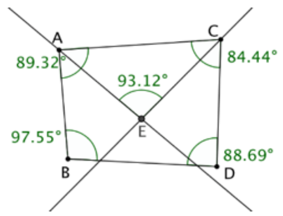


Figura 2. Construcción de Caro y Paul

Paul pide a Caro que arrastre los puntos y al hacer esto [E] establecen un primer resultado apoyados en lo que la pantalla de GeoGebra les muestra: no cualquier cuadrilátero satisface esta condición. El resultado observado hace que Paul considere que una propiedad del cuadrilátero que hace que la perpendicularidad de las bisectrices se cumpla es que un par de ángulos opuestos del cuadrilátero sean congruentes. Apoyados en las medidas de los ángulos, arrastran los puntos B y C hasta que sus medidas son aproximadamente iguales, pero la representación gráfica expuesta en pantalla muestra que el ángulo E no es recto, lo que lleva a Paul a descartar esta posibilidad. Al final, Paul propone [P] que se realice una exploración en cuadriláteros conocidos por ellos.

Caro no considera la propuesta de Paul y, apoyada en la representación gráfica en pantalla, inicia un análisis de esta [A] que la lleva a involucrar algunos elementos teóricos con el fin de justificar que los ángulos A y C deben ser rectos. Esta propuesta no es compartida por Paul, ante lo cual Caro propone [P] que se evalúe esta posibilidad modificando el cuadrilátero de tal forma que su sospecha se cumpla. Paul arrastra el punto B [I] pero las medidas de los ángulos mostrados en pantalla no dan exactamente 90. Aun así, la aproximación de las medidas permite ver que el ángulo E, determinado por las bisectrices, tiene una medida cercana a 90. Este trabajo lleva a Paul a anticipar que en el rectángulo las bisectrices de los ángulos adyacentes deben ser perpendiculares.

La sospecha de Paul lleva a que el grupo analice lo que ocurre en cuadriláteros particulares [P]. De acuerdo con Caro, se transformará el cuadrilátero en pantalla con el fin de que este sea un rectángulo. Al arrastrar los vértices del cuadrilátero [I] para lograr esto las aproximaciones de los ángulos les permiten observar que el ángulo E es recto, aun cuando el valor no es exactamente 90. Paul sugiere realizar una construcción robusta del cuadrilátero para verificar este resultado [V], pero Caro interrumpe su idea y asegura, basada en la evidencia empírica suministrada en pantalla, a modo de conclusión, que contar con que las medidas de los ángulos A y C sea igual a 90, conlleva a que el ángulo determinado por sus bisectrices sea también de 90. Al final ambos estudiantes, apoyados en este resultado, mencionan [S] que la propiedad solicitada en el problema se cumple cuando el cuadrilátero es cuadrado o rectángulo, explicando que el cumplimiento de la propiedad en el cuadrado se da en cuanto este es rectángulo también.

Paul sugiere ahora considerar un paralelogramo [P], para lo cual realiza una construcción de este, apoyado en rectas paralelas [I], así como las bisectrices de dos ángulos adyacentes de este cuadrilátero. Paul anticipa que la propiedad parece cumplirse y al determinar la medida del ángulo determinado por las bisectrices, esta da exactamente 90, resultado que lo lleva a señalar que en cualquier paralelogramo [S] esta propiedad es verdadera. Apoyándose en este resultado, Caro señala que es por ello que el rectángulo y cuadrado cumplen esta propiedad, pues ambos cuadriláteros son paralelogramos. Paul arrastra uno de los vértices del paralelogramo en la pantalla [V], con lo que observan que bajo arrastre esta propiedad se conserva.

Paul propone [P] construir un trapecio. Caro no sabe si construir un trapecio ordinario o uno isósceles, a lo que Paul responde que será un trapecio ordinario. Caro construye dos rectas paralelas [I] y dos segmentos de forma tal que en pantalla se puede observar un trapecio. Después de ello, Paul construye las bisectrices de los ángulos que comparten uno de los lados paralelos y al determinar la medida del ángulo determinado por estos rayos, observan que esta no da 90, resultado que los lleva establecer que el trapecio ordinario no cumple la propiedad y a determinar qué ocurre en el trapecio isósceles [P], para lo cual arrastran los extremos de los segmentos de los lados no paralelos [I], de tal forma que sus longitudes coincidan. El resultado en pantalla les muestra que una vez los lados no paralelos son congruentes, el ángulo determinado por las bisectrices construidas no es recto. Con base en esto, Paul y Caro descartan este cuadrilátero como solución [S].

Paul sugiere ahora ensayar con una cometa [P]. Al inicio dudan sobre las condiciones de este cuadrilátero, pero logran recordar que en esta se debe cumplir la congruencia de los lados consecutivos. Antes de representar gráficamente este cuadrilátero, Paul propone construir primero un rombo y evaluar el cumplimiento de la propiedad allí, idea rechazada por Caro en cuanto este cuadrilátero es un paralelogramo. Retomando la construcción de la cometa [I], ambos estudiantes tienen problemas para representar este cuadrilátero al no tener claridad sobre cómo involucrar las herramientas de GeoGebra para tal fin. Su estado de incertidumbre las lleva a construir un cuadrilátero en el que apenas dos lados adyacentes son congruentes y los otros no lo son con certeza (sus longitudes son apenas cercanas). Construyen las bisectrices y sin determinar la medida del ángulo determinado por estos dos rayos, anticipan el no cumplimiento de la propiedad, pues una observación de este ángulo en pantalla lleva a concluir que las bisectrices no son perpendiculares. Caro propone determinar la medida del ángulo, arrastrar uno de los vértices de tal forma que los lados no congruentes lo sean y corroborar si su apreciación es acertada. Cuando Paul hace esto, el resultado en pantalla no permite asegurar que el ángulo determinado por las bisectrices sea recto, lo que los lleva a concluir que en este cuadrilátero no se cumple la propiedad estudiada y que esta solo tiene presencia en los paralelogramos [S]. En este punto ellos retoman las experiencias del trabajo con los otros cuadriláteros, aquellas afortunadas y otras donde no se cumplió la propiedad. Paul le pregunta a Caro si algún cuadrilátero falta por ser evaluado [V], a lo que ella responde que ya se han evaluado los cuadriláteros conocidos y que el problema ha sido resuelto.

La persona que acompañaba a los estudiantes les indica que revisen el enunciado del problema con el objetivo de que no dejen de lado algún requerimiento puesto que ellos consideraban que no había algo más por hacer. Los estudiantes realizan esto [L], identificando que en este se solicita formular conjeturas y justificarlas. Luego de esto retoman la construcción del paralelogramo en GeoGebra e inician a mencionar algunos hechos geométricos que en este tipo de cuadrilátero se satisfacen [A] como lo son la congruencia de los lados y los ángulos opuestos y que las medidas de los ángulos adyacentes suman 180. En este punto no logran reconocer una forma de justificar su conjetura.

83. Paul: ¡Ay! ¡Ya sé cómo sale! Mira. Como estos (Figura 3), como el ángulo GFJ y el ángulo FJI suman 180 y como las, eh, bisectrices pues es la mitad del ángulo, entonces si los dos suman 180, pues la mitad de ellos van a sumar 90, entonces como ya aquí se forma un triángulo [FJK], pues ya se cumple. Como estos son de 90 [ángulos determinados por las bisectrices], pues tiene que cumplirse que este es de 90, y ya.

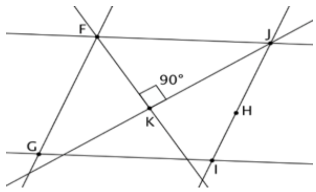


Figura 3. Construcción de Caro y Paul

La intervención de Paul es repentina y finaliza el estado de indagación en el que ellos se encontraban inmersos. Paul parte de que la suma de las medidas de los ángulos GFJ y FJI es 180. Luego involucra las bisectrices de estos ángulos para asegurar que la suma de las medidas de los ángulos KFJ y KJF tiene que dar 90. Haciendo uso del triángulo FJK, que en pantalla se ha determinado, junto a lo que se acaba de establecer y un hecho geométrico que señala que en el triángulo la suma de las medidas de sus ángulos da 180, Paul asegura el ángulo FKJ debe ser recto. Posterior a ello, pareciera que Caro no tiene claridad sobre esta justificación, sin embargo, retoma las ideas de Paul y repite los pasos claves de la justificación propuesta por él [V]. Paul regresa al enunciado del problema y lo observa, mencionando que la conjetura del trabajo realizado [S] es que en los paralelogramos la propiedad involucrada se cumple. Con esto finaliza el trabajo realizado.

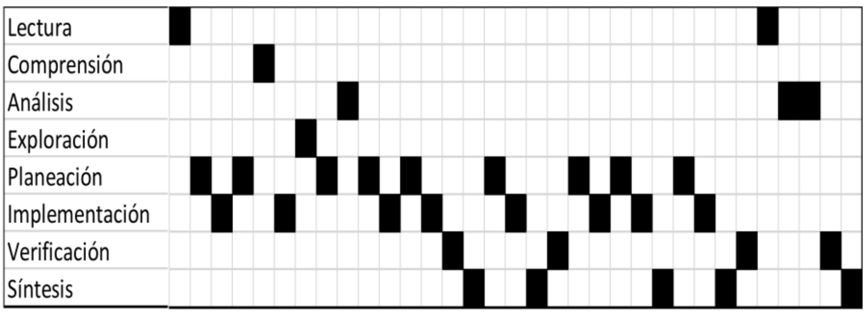
ANÁLISIS DE CARO Y PAUL

Descripción del proceso de resolución

Paul y Caro se comprometieron principalmente con acciones de planeación e implementación, dada la frecuencia de estos episodios (Tabla 3a), mientras que acciones de comprensión y exploración fueron casi nulas, lo cual no es bueno o malo en una primera lectura, habría que analizar en estos episodios lo acontecido para determinar su incidencia en el proceso de resolución. Un poco más del 40% del tiempo empleado en el proceso de resolución se destinó a acciones de implementación, mientras que acciones dirigidas a la comprensión del problema emplearon un tiempo reducido.

Tabla 3. Caracterización de los episodios

	Frec	Tiempo (s)	%
L	2	33	2,6
C	1	8	0,6
A	2	229	17,9
E	1	154	12,0
P	9	152	11,9
I	8	541	42,3
V	4	78	6,1
S	5	84	6,6



El proceso de resolución (Tabla 3b) permite reconocer un momento inicial de lectura, seguido por uno de planeación e implementación, en el que intervinieron acciones dirigidas a la comprensión, lo que llevó a proponer un plan alterno al considerado inicialmente. Posteriormente el trabajo realizado se tornó cíclico pues se analizó lo que ocurría en cuadriláteros conocidos. Esto involucró planear e implementar la construcción del cuadrilátero y así descartar o validar hipótesis. Al finalizar esto se reconoció una propiedad, revisaron el enunciado y procedieron a justificar dicha propiedad. Este ejercicio de justificación no requirió mucho tiempo, lo que permite asegurar que para ellos la dificultad del problema se concentró principalmente en el proceso de conjetura. Esto se puede apreciar al establecer una justificación rápidamente. Al final, Caro y Paul verificaron la justificación realizada y formularon la conjetura fruto de su trabajo. Sin embargo, esta conjetura reportó apenas el cumplimiento de la propiedad en un cuadrilátero particular (paralelogramo) y dejó de lado la posibilidad de reconocer una propiedad general que involucraba otros cuadriláteros.

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE GRUPOS

Naturaleza del proceso de resolución

Sobre la frecuencia de los episodios se puede señalar una alta presencia de acciones encaminadas a planear e implementar estrategias de solución (Figura 4 y 5). Los episodios de implementación son menores en cantidad respecto a los de planeación, aspecto dado por la diversidad de acciones que pueden darse al planear alguna acción. Por otro lado, se reconoce una baja presencia de episodios de síntesis. Este episodio tuvo lugar cuando se daba fin al trabajo enfocado a la exploración o descubrimiento de propiedades, formulando conjeturas que posteriormente se justificaban.

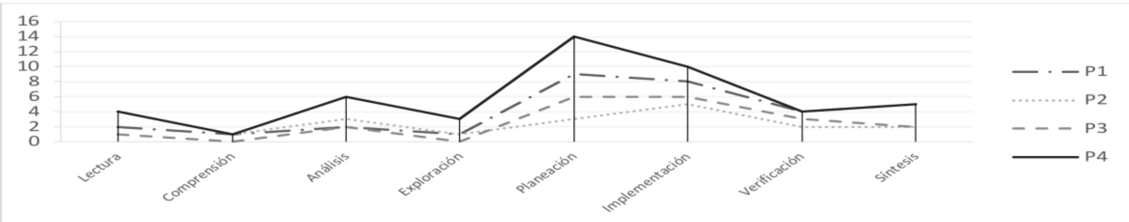


Figura 4. Frecuencia de episodios en Caro y Paul. P1, P2, P3 y P4 son los problemas propuestos

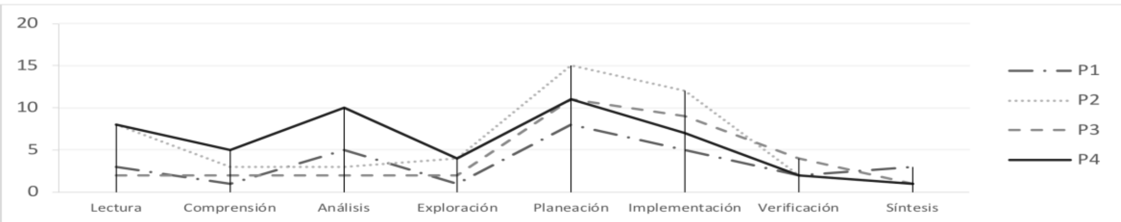


Figura 5. Frecuencia de episodios en Ana y Juan. P1, P2, P3 y P4 son los problemas propuestos

La presencia del episodio de verificación tampoco es alta. En ambos grupos se observó que este episodio apareció cuando se ponía a prueba alguna hipótesis. Sin embargo, por la naturaleza de la GD, las acciones de verificación estuvieron encaminadas a realizar construcciones robustas de los objetos y relaciones geométricas que se descubrían para tener certeza de que estas realmente se satisfacían. Las Figuras 4 y 5 dejan ver un comportamiento similar en ambos grupos en términos de las frecuencias de cada episodio a lo largo de los cuatro problemas. Sin embargo, algunos aspectos fueron distintos en el trabajo realizado por ellos, principalmente en los cuatro primeros episodios presentados en estos diagramas. Respecto a los episodios de lectura y comprensión debe mencionarse que mientras Caro y Paul se limitaron a una lectura inicial del problema y una poca comprensión de este, Ana y Juan manifestaron una mayor cantidad de estos episodios.

En el episodio de análisis, Ana y Juan exhibieron mayor cantidad de episodios de esta naturaleza. Esto puede observarse en el tipo de trabajo realizado al abordar cada problema. Mientras Caro y

Paul se enfocaban en trabajar en casos particulares para verificar en cada uno el cumplimiento de propiedades, lo que parecía una reacción inmediata, Juan y Ana se enfocaron en descubrir características suficientes y necesarias de objetos geométricos en los que estas propiedades se satisficieran. Esto tuvo una implicación en las conjeturas elaboradas por cada grupo, las conjeturas de Caro y Paul no gozaron de generalidad en su contenido, mientras que Juan y Ana sí lo lograron.

Las Figuras 6 y 7 muestran los minutos empleados en la resolución de cada problema y el porcentaje de tiempo destinado a cada episodio. Al mirar estos valores se ve que Paul y Caro se dedicaron principalmente a realizar acciones de implementación, seguido de acciones propias de análisis (Figura 6). Algo distinto aconteció con Juan y Ana, quienes dedicaron en algunos problemas una cantidad de tiempo mayor para el análisis del problema y una menor cantidad de tiempo en la implementación de acciones (Figura 7) Este comportamiento ya se ha reportado en la literatura, autores como Cai (1994) han mencionado que cuando los estudiantes dedican una mayor cantidad de tiempo en la planeación y análisis del problema abordado, con respecto a la ejecución de acciones, obtienen mejores resultados que aquellos estudiantes que dedican una gran cantidad de tiempo realizando acciones sobre las cuales no hay un proceso de reflexión, análisis o planeación.

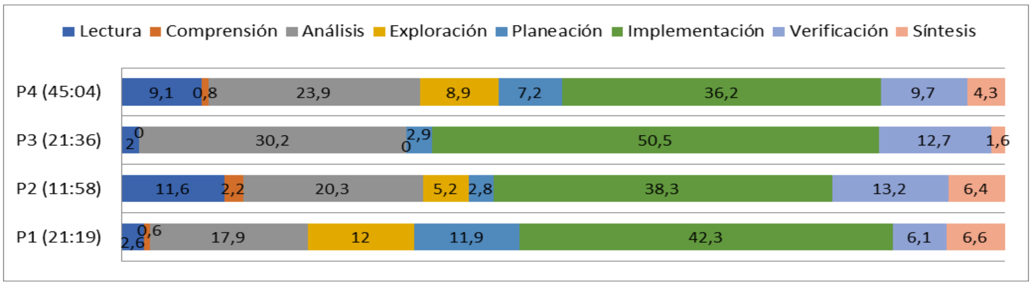


Figura 6. Porcentaje de duración episodios Grupo Caro y Paul

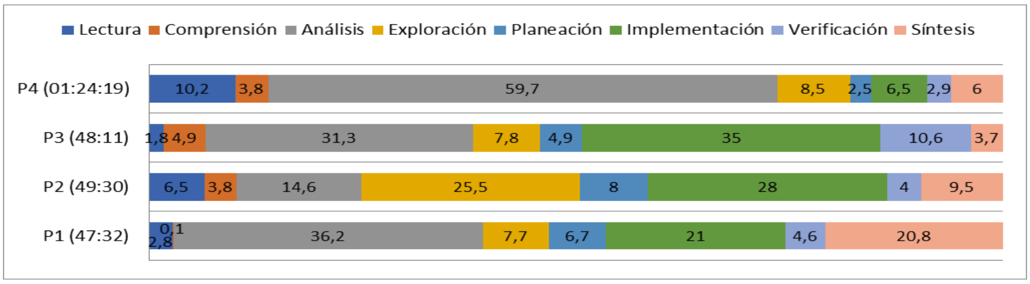


Figura 7. Porcentaje de duración episodios Grupo Ana y Juan

Aunque se observan diferencias entre ambos grupos, estas no son abismales, de hecho se observa una distribución semejante entre ellos. Parte de los motivos que llevaron a que el trabajo de Juan y Ana fuera mucho más productivo, en términos de las conjeturas formuladas, que el presentado por Paul y Caro, obedeció a la estrategia de trabajo adoptada, aquella que en el caso de Caro y Paul consistió en trabajar en casos particulares y que en el trabajo de sus compañeros se caracterizó como una búsqueda de condiciones suficientes y necesarias que permitieran satisfacer lo solicitado.

CONCLUSIONES (DECIR ALGO SOBRE UBICACIÓN DEL EPISODIO DE SINTESIS)

A través del estudio se quería identificar la naturaleza del proceso de resolución de problemas de demostración, en los que tenía presencia la GD, por parte de futuros profesores de matemáticas. Lo presentado acá es apenas el estudio de un contexto particular, que si bien aporta elementos al campo investigativo, no permite generalizar los resultados. Se requieren estudios adicionales en otros contextos, que permitan avanzar en la formulación de generalidades. Consideramos que la GD tiene un papel relevante en la resolución de problemas. Su naturaleza provocó que los estudiantes reconocieran en este recurso una herramienta de validación y soporte de resultados obtenidos. El software permite verificar resultados, permitiendo establecer resultados cuyo soporte puede ser empírico o teórico. Lo anterior muestra que los recursos a los que acceden los estudiantes realimentan sus acciones, esto modifica sus concepciones y amplía su campo de visión y comprensión. En consecuencia, la GD aporta elementos al trabajo colaborativo.

Se observa que los grupos al afrontar cada problema muestran una tendencia en la presencia de cada episodio de resolución. En el trabajo de los estudiantes se reconoce una gran presencia de episodios de implementación y planeación. Sin embargo, otros episodios como la verificación, la comprensión y la exploración muestran una tendencia baja. Se concluye que no todos los episodios aparecen de la misma forma, algunos tienen mayor protagonismo y no se manifiestan en orden lineal. Esto último guarda relación con lo señalado por Kuzle (2015). La presencia de grupos con formación académica distinta fue otra variable considerada. Se concluye que el grupo de estudiantes de cuarto semestre no reportó mejores resultados que el grupo de primer semestre. Este resultado brinda evidencia a lo reportado por la literatura y lleva a considerar la posibilidad de que, a lo largo del proceso formativo, a través del cual se amplían los conocimientos teóricos de la geometría, el trabajo con GD, en particular la implementación de estrategias no lineales, se vean perjudicados.

Finalmente, vale la pena señalar que la inclusión de un nuevo episodio de resolución (síntesis) permitió reconocer momentos particulares del proceso analizado que a la luz del modelo original no podrían ser caracterizados. La inclusión de este episodio permitió reconocer los momentos en que los estudiantes retomaban los asuntos que consideraban relevantes en el camino recorrido hacia la obtención de una respuesta. Esto permite asegurar que la actividad realizada por los estudiantes está permeada por acciones que pretenden consolidar una respuesta a medida que se avanza en la resolución del problema y que esta se ve favorecida por la presencia de la GD. Ejemplo de ello es el trabajo de Caro y Paul, quienes se apoyaban en la exploración sobre cuadriláteros conocidos para ir puliendo la respuesta del problema afrontado.

Referencias

Baxter, P. y Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, *13*(4), 544-599. doi: citeulike-article-id:6670384

Cai, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *6*(2), 166-183. doi: 10.1007/BF03217270

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 71-90.

Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Koichu, B. y Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 233-244. doi: 10.1016/j.jmathb.2015.10.005

Kuzle, A. (2015). Nature of metacognition in a dynamic geometry enviroment. *LUMAT*, *3*(5), 627-646.

Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 87-125. doi: 10.1023/A:1012785106627

Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 223–236). Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0576-5_15

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Valencia, N., Sanabria, L. y Ibáñez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, Episteme Y Didaxis*, *31*(1), 45-65.