ESTRUCTURAS, GENERALIZACIÓN Y SIGNIFICADO DE LETRAS EN UN CONTEXTO FUNCIONAL POR ESTUDIANTES DE 2º PRIMARIA

Structures, generalization and meaning of letters in a functional context for 2nd primary students

Torres, M. D.[a], Cañadas, M. C.[a] y Moreno, A.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del early algebra en España. Nuestro objetivo de investigación es profundizar en el pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de segundo de educación primaria (7-8años). Nos centramos en las estructuras que identifican estos estudiantes, la generalización y el significado que les atribuyen a las letras mediante un problema de generalización contextualizado que involucra la función f(x)=x+3.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, pensamiento funcional, estructura, generalización, significado y uso de letras.*

Abstract

This work is part of a broader research that is developed in the context of early algebra in Spain. Our research objective is to deepen in the functional thinking of a group of second graders (7-8 years old). We focus on the structures that these students identify, the generalization and the meaning that they assign to letters through a contextualized generalization problem that involves the function f(x)=x+3.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, generalization, meaning and use of letters, structure.*

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las investigaciones en el marco de la propuesta *early algebra* ponen de manifiesto que los niños de Educación Primaria tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Martínez, 2012). Existe un interés por el estudio del pensamiento algebraico promoviendo en las aulas el estudio de patrones, relaciones y propiedades matemáticas que permita a los alumnos de edades tempranas explorar, predecir, modelizar, discutir y argumentar (Molina, 2009). En concreto nuestro interés está en el pensamiento funcional, entendido como "un modo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). La identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones entre variables promueve en los estudiantes el pensamiento funcional facilitándoles herramientas para la adquisición de conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010). La generalización es un elemento central en la investigación sobre pensamiento funcional en los primeros cursos. Diferentes autores destacan que los niños tienen una inclinación natural para percibir y discutir sobre regularidades (Schifter, Monk, Russell y Bastable, 2008), lo cual es la clave para la generalización, aun cuando estos no cuenten con todos los recursos necesarios para

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

representar dichas relaciones generales. La manera en la cual se organizan los elementos de una regularidad corresponde a la noción de estructura (Kieran, 1989).

Las funciones son el tópico matemático protagonista en el pensamiento funcional donde el simbolismo algebraico es un sistema de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011). El uso de letras y símbolos convencionales del álgebra conlleva pensamiento funcional, por tanto ya que se conocen que hay dificultades asociadas al uso de letras quizás puedan solventarse si conseguimos explorar cómo entienden los alumnos de primaria estos aspectos para poder actuar en consecuencia. Mulligan, Mitchelmore, and Prescott (2006) comentan que hay pocas investigaciones centradas en la noción de estructura en el contexto algebraico de los estudiantes de Educación Primaria. Igualmente son escasas las investigaciones sobre el uso del significado de las letras en edades tempranas. Con este trabajo destacamos el interés de indagar sobre las estructuras y la generalización así como en el significado y uso que de las letras hacen los estudiantes porque ayuda a conocer los procesos matemáticos y el pensamiento funcional que manifiestan. De esta forma queremos dar continuidad al estudio sobre las nociones implicadas ya que analizar la manera en la cual los estudiantes son capaces de interpretar una regularidad y, potencialmente, generalizar dicha regularidad ayuda a los procesos matemáticos involucrados.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. "Se centra en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (Kaput, 2008, p. 143). El estudio de los patrones y las regularidades son fundamentales ya que relacionan las variables existentes en una situación. El pensamiento funcional incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían; la expresión de estas relaciones utilizando el lenguaje natural, símbolos, tablas o gráficos; y el uso de esas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). En esta línea de investigación, estudios previos (e.g., Mason, Stephens y Watson, 2009) ponen de manifiesto la capacidad de estudiantes de Educación Primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos conjuntos de valores. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la identificación de la regularidad en el comportamiento entre las variables, se puede llegar a la generalización. Hablar de generalización en Educación Primaria supone aceptar que estos estudiantes pueden expresar dichas relaciones no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (e.g., Radford, 2002). Actualmente, las letras, no son consideradas como la única forma de manifestar la generalización en el contexto funcional. Si bien las letras son esenciales, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras: la representación verbal y la pictórica resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (2012) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras, para representar con fluidez variables y cantidades generalizadas.

En el contexto funcional en el que nos situamos, la generalización y la forma de expresarla constituyen elementos centrales (Kaput, 2008). Pinto y Cañadas (2017) concluyen que los alumnos de tercero de primaria emplean 17 estructuras diferentes para un mismo patrón, de las cuales solo 5 son correctas, y que de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario. Pinto y Cañadas (en revisión) se centran en cómo estudiantes de quinto de primaria (10-11 años) perciben la forma inversa de una función fundamentándose en las nociones de estructura y generalización. Analizan las respuestas de un grupo de 24 estudiantes ante un problema que involucra una función lineal y que contiene preguntas para las formas directa e inversa de la función. Concluyen que 10 estudiantes establecen diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizan esta forma de la función. Por otro lado, Ayala-Altamirano (2017) se centra en analizar los significados que estudiantes de tercer curso de primaria (8-9 años) atribuyen a las letras, encontrando que son múltiples los significados que los estudiantes asignan a las letras. Brizuela y Blanton (2014) mostraron que los niños de primero de primaria tienden a asignar un valor fijo a las letras determinado por su posición en el alfabeto o también la aceptación de que podían representar diversos valores, pero de todos modos les asignaban valores numéricos de forma arbitraria para resolver las situaciones. En segundo de primaria (7-8 años) se obtienen resultados similares por Cañadas et al. (2016). En esta ocasión se involucra la relación $y = 2x$ y los estudiantes expresan relaciones funcionales usando letras. De nuevo hay estudiantes que evidencian que el valor de la letra depende de la posición en el alfabeto y reconocen las letras como representaciones de cualquier número. De la revisión de literatura se desprende la necesidad de llevar a cabo más estudios que, por un lado, clarifiquen los descriptores del pensamiento funcional y, por otro, muestren evidencias sobre lo que son capaces de hacer los estudiantes de Educación Primaria en relación con este tipo de pensamiento: identificación de estructuras, generalización y usos de letras. Esto aportaría información de utilidad para la toma de decisiones docentes en las aulas de este nivel educativo, y para la formación de maestros de primaria (Cañadas y Molina, 2016).

Sustentamos el marco conceptual de este estudio en las nociones de generalización y estructura. La generalización se considera clave para la generación de conocimiento (Lakatos, 1978). Como un elemento central del pensamiento algebraico está la generalización, la cual es reconocida como un proceso de pensamiento matemático fundamental, la cual requiere ver detrás de las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión (Driscoll, 1999). Considerar la generalización en el contexto de los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton, Levi Crites y Dougherty, 2011). Las tareas de generalización de relaciones entre variables radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general. Por tanto, requieren de la identificación de una pauta o patrón de comportamiento de los casos particulares. Desde el contexto funcional, la noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre las variables, que puede ser evidenciada a través de diferentes representaciones por los estudiantes, tanto al trabajar con casos particulares como al generalizar la relación (Pinto y Cañadas, en revisión). Algunos investigadores destacan que antes de que los estudiantes lleguen a generalizar, deben “ver” la estructura de una situación matemática (Mason, Stephens y Watson, 2009). De manera general, la noción de estructura corresponde a la forma en la cual se organizan los elementos de una regularidad y la relación que existe entre esos elementos (Kieran, 1989). Pinto y Cañadas (en revisión) la definen como un conjunto de números y variables numéricas (expresadas mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y propiedades entre estas operaciones, las cuales se presentan cuando los estudiantes identifican alguna regularidad. Mason et al (2009) evidencian que los estudiantes que identifican estructuras en tareas matemáticas, después tienen experiencias matemáticas más profundas.

El simbolismo algebraico es fundamental en temas relacionados con las funciones. Sin embargo, los investigadores sobre el pensamiento funcional consideran la representación algebraica pero no de forma exclusiva. Las letras como representación simbólico-algebraica son herramientas lingüísticas para representar las ideas matemáticas de forma concisa (Blanton et al, 2015). En cuanto al uso de las letras, estudios previos evidencian que los estudiantes de tercer curso de primaria las usan con diferentes significados (Ayala-Altamirano, 2017). La autora fundamenta su investigación en el trabajo de Küchemann (1981). Tomamos las categorías sobre el significado de las letras de Ayala (2017) y las recogemos en la Tabla 1.

Tabla 1. Significado de las letras

Categoría	Descripción
Rechazo de la letra	Señala que no se pueden utilizar letras porque no significan nada
Acepta uso letra	Utiliza la letra pero al analizar sus intervenciones el significado asociado no se puede determinar con exactitud
Letra como objeto o como etiqueta	Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí
Letra evaluada	Relaciona la letra con una cantidad, no obstante no es posible identificar los motivos por los cuales asignó ese valor.
Letra evaluada/ valor lógico	El valor de la letra es único y determinado por alguna lógica, por ejemplo el orden en el alfabeto
Letra como variable/ valor aleatorio	Señala que la letra puede tener un valor variable, el cual ejemplifica. Por ejemplo un caso es " La Z puede ser 5 y luego le sumas …"
Letra como variable/ valor indeterminado	Señala que la letra puede tener valores variables y puede analizar la situación sin necesidad de recurrir a un ejemplo numérico concreto. Responde generalizando

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre la capacidad de generalización de estudiantes de segundo de Educación Primaria, describiendo las estructuras matemáticas que identifican y analizando los significados y usos que les dan a las letras un grupo de estos alumnos al abordar una actividad de generalización que parte del trabajo con casos particulares en un contexto funcional.

Los objetivos de investigación de este trabajo son los siguientes:

- Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes.
- Describir las estructuras que generalizan los estudiantes.
- Identificar e interpretar los diferentes significados que les atribuyen los estudiantes a las letras.

MÉTODO

Este trabajo se sitúa dentro de una investigación más amplia sobre el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria en España. Este estudio es de tipo cualitativo con carácter descriptivo.

Estudiantes

Trabajamos con una muestra intencional, según la disponibilidad del centro. Los sujetos fueron 24 alumnos de 2º curso de educación primaria (7-8 años), de un colegio de Granada (España). Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas y sin llevar. Nunca habían trabajado con problemas que involucraran alguna función lineal, la generalización y tampoco habían hecho uso de las letras en matemáticas.

Instrumentos para la recogida de datos

Diseñamos un cuestionario individual escrito y entrevistas semiestructuradas para la recogida de datos. Las preguntas del cuestionario y de las entrevistas surgen de nuestros antecedentes y se basan en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007): parten de casos particulares para llegar a la generalización. El problema planteado introduce un contexto novedoso aunque la relación funcional ha sido empleada en investigaciones previas relativas al pensamiento funcional.

El cuestionario se implementó a los 24 estudiantes. El análisis de las respuestas escritas al cuestionario nos permitió seleccionar a los seis alumnos que entrevistamos.

Cuestionario

El cuestionario incluyó siete preguntas sobre una máquina en la que se metía una cantidad de bolas y salía otra cantidad de bolas bajo la relación funcional $f(x) = x+3$. Cuatro preguntas abordaron casos particulares planteados como aparece en la Figura 1.

1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? ______ bolas.

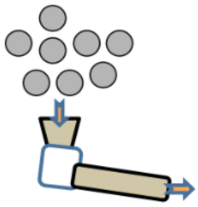

Figura 1. Pregunta sobre casos particulares

Dos preguntas fueron sobre generalización. Un ejemplo lo presentamos en la Figura 2.

6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

Figura 2. Pregunta sobre el caso general

En un último apartado del cuestionario abordamos la veracidad o falsedad de unas afirmaciones en las que se usaban letras. Los estudiantes debían rodear la opción (verdadera o falsa) según considerasen. La aplicación del cuestionario duró una hora. Mostramos algunas de las preguntas en la Figura 3.

(f) Si meto A bolas en la máquina, salen A+1 bolas.
Verdadera Falsa

(g) Si meto A bolas en la máquina, salen A+3 bolas.
Verdadera Falsa

Figura 3. Preguntas basadas en letras

Entrevista

Organizamos y clasificamos a los estudiantes según las respuestas que dieron al cuestionario en tres grupos según su avance: inicial, intermedio y avanzado. El primer grupo estaba formado por ocho estudiantes que no habían identificado el patrón o solo lo habían hecho en alguna ocasión. El segundo grupo estaba compuesto por nueve estudiantes que habían identificado, en varias de las preguntas que les planteábamos, la regularidad existente y el último grupo lo formaban siete alumnos que habían logrado generalizar. De esta clasificación, la maestra del grupo seleccionó a seis estudiantes, dos de cada categoría (inicial: E16, E22; intermedio: E13, E14; avanzado: E03, E08). Nombramos mediante una E y un número aleatorio a los distintos estudiantes para mantener su anonimato. Llevamos a cabo las entrevistas individualmente en un espacio del centro y las videograbamos. Diseñamos un protocolo de entrevista con base en los objetivos de investigación. Presentamos un resumen de este protocolo en la Figura 4.

1º Recordar el problema presentado

- ¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina?

– Si la respuesta era positiva se preguntaba: ¿Me darías dos ejemplos? ¿qué hiciste para obtener esa respuesta?

– Si la respuesta era negativa se procedía a recordar y mostrar los ejemplos y se preguntaba: ¿qué relación existen entre las bolas que entran y salen? Siguiendo por volver a preguntar por ejemplos concretos que habían aparecido.

2º Aplicar regularidad en casos particulares:

- Casos particulares dados
- Casos particulares del estudiante
- Caso particular de un tercero

3º Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso

- Interpretación de lo indeterminado. Se preguntaba: ¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?
- Generalización: ¿cómo puedes saber cómo funciona la máquina?

Uso de letras:

– ¿Para qué crees que se usan las letras? ¿qué puede significar A bolas?

– ¿Si meto A bolas en la máquina salen A?

– ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+1?

– ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+3?

– Si entran α bolas ¿cuántas salen?

Figura 4. Protocolo de entrevista

Análisis de datos

Realizamos el análisis de datos con base en la información que proviene de las entrevistas. Tras transcribir las entrevistas, realizamos un análisis de datos que combina lo cualitativo y lo cuantitativo. Diseñamos las categorías de análisis para estructuras, generalización y significados otorgados a las letras para atender a los objetivos de investigación y con base en el marco conceptual y nuestros antecedentes. Identificamos y describimos estructuras, en respuestas a cuestiones que involucran casos particulares y el caso general. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Identificamos los diferentes significados atribuidos en la última parte del cuestionario donde aparecían letras. En este punto y usando la información de la Tabla 1, modificamos la categoría (acepta uso letra) de Ayala-Altamirano (2017) por “no dice nada sobre la letra, (NL)”, ya que no hemos encontrado evidencias de aceptación en las respuestas de los alumnos con el significado por la categoría del trabajo de la autora.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos resultados sobre estructuras y generalizaciones identificadas. Después nos centramos en los resultados sobre los significados que los estudiantes atribuyen a las letras.

Estructuras y generalización

Distinguimos entre los estudiantes que identifican estructuras en el trabajo con casos particulares y aquellos que lo hacen en la generalización. En general, todos los estudiantes identifican alguna estructura en uno u otro caso. Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 2. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de su trabajo; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 2. Estructuras identificadas

Estudiante	Estructura casos particulares	Estructura caso general
E1	x + x x + 3	y = x + 3
E2	x + 1, x + 2 (1,10) x + 2, x + 3 (10,…)	y = x + 3
E3	x + 3	y = x + 3
E4	x + 3 x + x	y = x + 3
E5	x + 3	y = x + 3
E6	x + x x + 3 x + x	y > x

En la Tabla 2 observamos que un mismo estudiante evidenció entre una y tres estructuras diferentes a lo largo de su entrevista en el trabajo con casos particulares. En total, observamos cuatro tipos diferentes de estructura que se pueden expresar mediante simbolismo algebraico como: *x+x, x+1, x+2 y x+3*. Registramos las estructuras mediante simbolismo algebraico, aunque los estudiantes no emplearan ese sistema de representación. Por ejemplo, en el siguiente fragmento observamos las diferentes estructuras evidenciadas por el estudiante E2.

84. E (Entrevistador): hay un niño de la clase que me dijo que si entraban 25 bolitas debieran salir 27 ¿crees que es verdad?
85. E2: está mal porque digo que se suman 3 a 20, a 1000 y a 100 y a todos los demás. Mira yo al 1, 2, 3, 5, 6,7, 8 y al 9 le sumo como un poquito menos, le sumo 1, le sumo 2, pero a los que son más grandes le sumo o 2 o 3
86. E (Entrevistador): ¿y cuáles serían esos números más grandes? ¿Más grandes que el 10?
87. E2: sí más grandes que 10 y más grandes que el 100

Atendiendo a las estructuras identificadas en el caso general (Tabla 2, última columna) destacamos que los seis estudiantes generalizan la relación funcional de manera verbal. En estas generalizaciones identificamos la estructura $y = x+3$ en cinco casos. Apreciamos diferentes formas de expresar verbalmente la generalización. Por un lado, tres estudiantes generalizan dando ejemplos con casos particulares de bolas y generalizando al añadir que se debe de sumar 3. Por ejemplo, E3 expresa: “1 bola nos salen 3, 2 bolas nos salen 5, 3 bolas salen 6, 4 bolas y salen 7. Siempre hay que sumarle 3, 1 millón te sale 1 millón 3”. O E2: “Ponemos 7, 8 o las que tú quieras, entonces pueden salir más de esas. La máquina coge las bolas y le suma 3. La máquina siempre está sumando 3 pero me gusta sumarle 1 y además que es más interesante”. Otros tres estudiantes coinciden en expresar que “saldrán más bolas que las que han entrado”. De estos tres alumnos, E6 generaliza sin cuantificar: “Sé que la máquina saca las bolas iguales y lo que sé es que por dentro mete muchas más bolas”. Los otros dos especifican además que están pensando en la estructura *x+3.*

Hay cinco estudiantes que identifican la estructura adecuada (x+3) tanto en el caso general como en los casos particulares.

Significado de las letras

Resumimos los significados que los estudiantes atribuyen a las letras en la Tabla 3.

Tabla 3. Significados atribuidos a las letras

Estudiante	RL	NL	LO	LE	LL	LVA	LVI	Total
E6				X			X	2
E5	X		X	X		X	X	5
E4	X				X			2
E3		X						1
E2					X		X	2
E1					X			1
Total	2	1	1	2	3	1	3	

Nota. RL= rechazo de la letra; NL= no dice nada sobre el uso de la letra; LO = letra como etiqueta o como objeto; LE = letra evaluada; LL = letra evaluada/ valor lógico; LVA = letra como variable/valor aleatorio; LVI = letra como variable/ valor indeterminado.

En general, los estudiantes evidencian siete significados de las letras: (a) rechazo, (b) no dice nada sobre el uso de la letra, (c) letra como etiqueta o como objeto, (d) letra evaluada de una forma lógica, (e) letra como variable/valor aleatorio y (f) letra como variable/ valor indeterminado. Cada significado se da entre uno y tres estudiantes. Cada estudiante evidencia entre uno y cinco significados de las letras. Los significados más frecuentes en estos estudiantes fueron el uso de la letra como cantidad evaluada mediante un valor lógico (LL) y el uso de la letra como cantidad indeterminada (LVI), presentes en tres estudiantes. Un caso como ejemplo de categoría (LL) viene dado por E2 "A de como el abecedario, esto te da una pista. Yo creo que la A significa 1 porque va primero, segundo B, el número 3 la C".

Los significados de rechazo de la letra (RL) y letra evaluada (LE) son los siguientes por orden decreciente de aparición. Por ejemplo, E4 rechaza la letra comentando que "Una letra y un número no se pueden sumar". Algunos estudiantes responden mediante una generalización: E5 expresa "si metemos esto, un símbolo, pues te saldría 3 bolas más" y E6: "si hubiera N bolas, saldrían N bolas más". Los significados atribuidos cuando no dicen nada sobre el uso de la letra (NL) y la letra como variable/valor aleatorio (LVA) aparecen con una frecuencia menor al resto de significados. Un ejemplo de la categoría (NL) viene dado por E3 "no tengo nada que decir pero es falsa".

Como se observa en la Tabla 3 hay estudiantes que evidencian varios significados de la letra durante la entrevista. Uno de ellos identifica hasta cinco significados posibles de las letras, E5.

CONCLUSIONES

Con base en los objetivos de investigación y centrándonos en las nociones de estructura y generalización, hemos identificado cómo los estudiantes interpretan la relación entre variables. Destacamos que tenemos la evidencia del uso de cuatro tipos diferentes de estructura en el trabajo con casos particulares. Los estudiantes emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas de las entrevistas, estando presente en todos los casos estudiados la relación funcional $y = x+3$, que es adecuada. Hemos identificado la estructura x+3 en el caso general dada por cinco de los seis estudiantes entrevistados. A diferencia de estudios previos, hemos identificado una forma de generalizar en la que no concretan la relación funcional: expresan que el valor de la variable dependiente es mayor que la independiente pero sin llegar a cuantificar esa diferencia.

En general, evidenciamos así, capacidades en los estudiantes de 2º de Educación Primaria para identificar estructuras en problemas que involucran relaciones funcionales y generalizarlas. Los resultados de este estudio nos llevan a reafirmar los resultados de Pinto y Cañadas (2017): existe una inconsistencia en el uso de las estructuras por parte de los estudiantes al responder a diferentes casos particulares involucrados en el problema. Por otra parte, en nuestro estudio identificamos una mayor consistencia cuando atendemos al empleo de una misma estructura tanto para casos particulares como para el general, en todos los casos analizados. El estudio de las estructuras que identifican los estudiantes nos puede ser de utilidad en un posterior análisis de las estrategias que usan los alumnos de Educación Primaria para establecer una regla general entre variables.

Por otro lado, nuestro trabajo está en consonancia con el estudio de Brizuela y Blanton (2014) y Cañadas et al. (2016) sobre el uso de la letra, dándose casos en los que el valor de la letra depende de su posición en el alfabeto.

Hemos validado las categorías de Ayala-Altamirano (2017) con los datos de este trabajo, salvo la que hace referencia a la aceptación de la letra, que en nuestro caso no encontramos evidencias en las respuestas de los estudiantes, por lo que no consideramos oportuno tenerla en cuenta. En cambio, hallamos respuestas del tipo “no tengo nada que decir”, lo que nos llevó a incluir esta categoría. Además, observamos que la mayor parte de las respuestas aparecen tomando la letra como un valor único y determinado por alguna lógica (LL) y como variable o valor indeterminado (LVI). Presentamos así una adaptación de la categorización de la autora para los significados de las letras en este trabajo.

Como aporte para la docencia, creemos que los diferentes significados de las expresiones algebraicas con letras supone una dificultad para los estudiantes. Los significados asignados a las letras afectarán a la manera en se resuelven los problemas, pudiendo ser resueltos de manera inesperada (Kucheman, 1981). Consideramos importante tener en cuenta los diferentes significados de las letras desde el punto de vista docente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funciónales.* TFM, Universidad de Granada.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). Nueva York, NY: Routledge.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Driscoll, M. J. (1999). Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). Londres, Reino Unido: Murray.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology*. Philosophical Papers. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Traducción al castellano: D. Ribes, 1981, Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.)

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PMA, 3*(3), 135-156.

Mullingan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). Praga, República Checa: PME.

Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 27-42). Cambridge, Reino Unido: Mathematical Association of America.

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalization in fifth graders within a functional approach.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 413-448). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Strother, S. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability* (Tesis doctoral). Louisville, KY: Universidad de Louisville.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.