

NIVELES DE COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA MEDIANTE VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA EN GEOGEBRA

LEVELS OF UNDERSTANDING OF THE TRIGONOMETRIC IDENTITY CONCEPT THROUGH MATHEMATICAL VISUALIZATION IN GEOGEBRA

Alejandra Adame Esparza, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Fernando Hitt Espinosa

Universidad Autónoma de Aguascalientes. Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
Université du Québec à Montréal Canadá).

alex280_80@yahoo.com.mx, mtorres@matematicas.reduaz.mx,

borjonrojo@hotmail.com, hitt.fernando@uqam.ca

Resumen

El presente trabajo presenta los resultados de una investigación donde se concibió e implementó una secuencia didáctica que contribuyera a la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en estudiantes de segundo semestre del nivel Medio Superior. Tomando como principal herramienta la visualización matemática, basada en la creación de redes de representación, se induce al estudiante en tratamiento, tránsito y conversión entre diversas representaciones del concepto. En esta labor el software GeoGebra es de gran ayuda ya que brinda las herramientas necesarias para el logro de nuestros objetivos. Con base en los resultados obtenidos, se realiza un análisis que permite identificar los niveles de comprensión del concepto en cada estudiante; dicho logro está determinado por el número y la fuerza de las conexiones que se presentan entre las distintas representaciones.

Palabras clave: visualización matemática, niveles de comprensión, representaciones

Abstract

This work presents the results of a research where a didactic sequence, which contributes to the construction and understanding of the concept of Trigonometric Identity in High school second-grade students, was conceived and implemented. Taking mathematical visualization as the main tool, based on the creation of representation networks, the student is induced to work in this environment, about transit and conversion between different representations of the concept. In this work GeoGebra software is of great help as it provides the necessary tools to get our objectives. Based on the results obtained, an analysis is carried out to identify the levels of understanding of the concept in each student; this achievement is determined by the number and the strength of the connections that appear between the different representations.

Key words: Mathematical visualization, levels of understanding, representations

■ Introducción

Una de las problemáticas que actualmente vive la Trigonometría es la preponderancia de fórmulas y la ausencia de sentido geométrico, que, al no mostrar relación alguna, resulta ser un factor que imposibilita al estudiante la construcción y por ende comprensión de algunos conceptos de la matemática. En particular, la falta de articulación entre diferentes registros de representación del concepto de Identidad Trigonométrica dificulta la comprensión del mismo más allá de su manejo algebraico.

La labor docente fue la que hizo que nos interesáramos por este concepto ya que de manera empírica se ha observado que en el Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes existe una tendencia hacia la reprobación de la unidad de aprendizaje que comprende este tópico matemático. El reto fue crear nuevos materiales que permitieran enseñar este tema de una manera diferente, donde se buscara una verdadera comprensión por parte de los estudiantes.

■ Marco teórico

Históricamente, la visualización ha jugado un papel muy importante en la comprensión de las matemáticas, por ejemplo, en 1945, Jacques Hadamard realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual (Torres, 2004, p. 20).

Así, en los inicios de la matemática, específicamente en la época de los pitagóricos, la visualización era sumamente importante, el descubrimiento estaba ligado a los procesos de visualización. Es con Euclides en donde se transforma la matemática visual a una matemática lógico-deductiva, la figura deja de ser un elemento central y empieza a jugar un papel secundario. La necesidad de una matemática lógico-deductiva era imperativa para librar a la matemática de contradicciones.

Es así como se consideró que un acercamiento didáctico en el aula, debería tomar en cuenta tanto el razonamiento lógico-deductivo (formal) como un acercamiento visual; ya que como menciona Hitt (32003) “la visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema” (Hitt, 2003, p. 3).

En este sentido, Duval establece que, “dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (Hitt, 2003, p.214). La comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. En otras palabras, la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos.

Por su parte Hitt (1998) reafirma esta idea al mencionar que comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto en cuestión.

Para poder contar con un instrumento de medición en el quehacer de la visualización, se toma como base a Hiebert y Carpenter (1992, citado en Hitt, 2003), quienes indican que comprender se definirá en términos de cómo se representa y se estructura la información. Una idea matemática, un procedimiento o un hecho se comprenderán

perfectamente si está vinculado a redes de representaciones existentes con conexiones más fuertes y numerosas. En este sentido, el propio Hitt (1998) describe 5 niveles que tienen que ver con la comprensión de los conceptos y que están basados en el tipo de representaciones que los estudiantes dominan y emplean, así como en la interacción entre las mismas:

Nivel 1: Reconocimiento de los elementos de un sistema semiótico.

Nivel 2: Transformaciones internas a un sistema semiótico.

Nivel 3: Conversiones de una representación de un sistema semiótico a otro.

Nivel 4: Coordinación de representaciones entre diferentes sistemas.

Nivel 5: Producción de representaciones semióticas en la resolución de un problema.

Con todos estos argumentos, nos propusimos el objetivo analizar el nivel de comprensión del concepto de identidad trigonométrica en los estudiantes del nivel medio superior; mediante una serie de actividades que involucraran la manipulación de las identidades trigonométricas en sus diferentes representaciones, que permitan al estudiante crear conexiones entre dichas representaciones.

■ Metodología

La metodología que se utilizó en la presente investigación fue la Ingeniería Didáctica la cual se caracteriza "por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p.36). Estructurada en cuatro fases: un análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de la secuencia didáctica, la experimentación y el análisis a posteriori y validación.

Para llevar a cabo el análisis preliminar, se consideraron tres dimensiones, en las cuales se buscaba conocer la consolidación del concepto de identidad trigonométrica a través de la historia (epistemológica); los errores mostrados por los estudiantes en el estudio de este concepto (cognitiva); la propuesta de trabajo expuesta en libros de texto y programas de estudio (didáctica).

Tomando como referencia los resultados del análisis preliminar, se diseñó, probó y concibió, con ayuda del software GeoGebra, una secuencia de seis actividades que consideraran diversas representaciones del concepto de identidad trigonométrica (Adame, 2017), con la finalidad de propiciar el tratamiento, tránsito y conversión entre ellas y así lograr la construcción y comprensión de este tópico. A continuación, se describen los objetivos principales de las actividades.

Actividad 1: El objetivo fue que los estudiantes dedujeran de manera intuitiva las identidades trigonométricas básicas, así como que comprendieran el hecho de que dos expresiones trigonométricas que producen el mismo gráfico (ver figura 1), son equivalentes.

En esta sección el estudiante identifica y manipula dos tipos de representaciones: la algebraica y la gráfica; propiciando con ello el tránsito entre dichas representaciones.



Figura 1. Entorno en Geogebra de la actividad 1

Actividad 2: El objetivo fue que, mediante la manipulación del círculo trigonométrico y la representación tabular, los estudiantes dedujeran la equivalencia entre expresiones trigonométricas encontrando valores numéricos para distintos ángulos sugeridos.

Actividad 3: En esta actividad los estudiantes deducen la Identidad Trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$ y comprenden su significado mediante la manipulación de la representación figura y la tabular (ver figura 2).

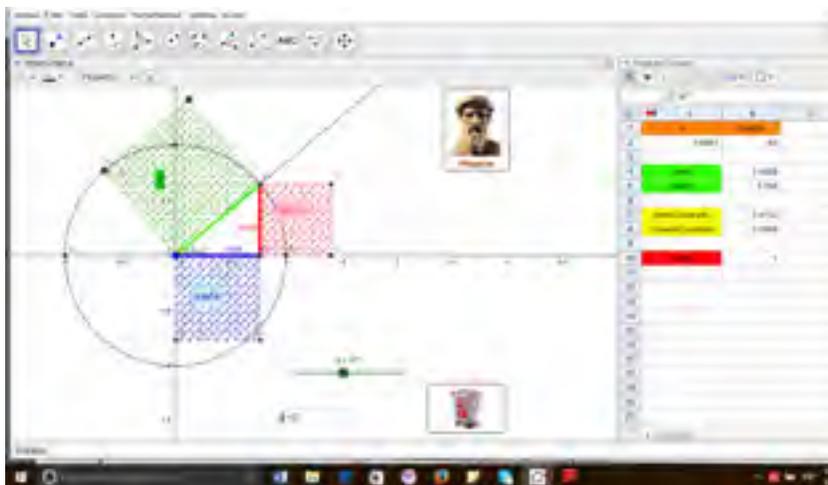


Figura 2. Entorno en Geogebra de la actividad 3

Actividad 4: El objetivo fue mostrar al estudiante que existen expresiones trigonométricas en apariencia similares, pero que no son identidades trigonométricas; se les mostró una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas y se le cuestionó de qué manera se podría saber si la expresión era verdadera. En esta actividad se indujo a que el estudiante transitara entre la representación gráfica y la tabular y expresara el concepto de identidad con sus propias deducciones.

Actividad 5: El objetivo fue mostrar al estudiante que, valores de cualquier ángulo en expresiones trigonométricas equivalentes, hacen verdadera la identidad (ver figura 3). Se mostró una equivalencia entre expresiones trigonométricas y mediante el trazo de gráficas y evaluaciones en diversos ángulos en una representación tabular, fueron descubriendo que realmente se trataba de una identidad.

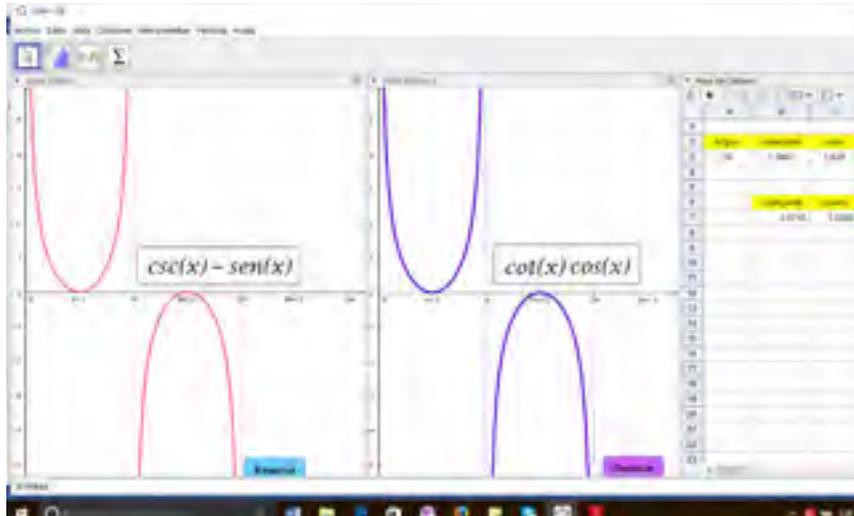


Figura 3. Entorno en Geogebra de la actividad 5

Actividad 6. En esta actividad se buscó introducir un método para comprobar una equivalencia de manera algorítmico-formal, sin necesidad de obtener valores para casos particulares. Se mostraron los gráficos de ambos lados de la equivalencia y el estudiante iba realizando modificaciones en las expresiones, encontrando que existen cambios que perjudican las gráficas iniciales y otros cambios que mantienen las gráficas intactas.

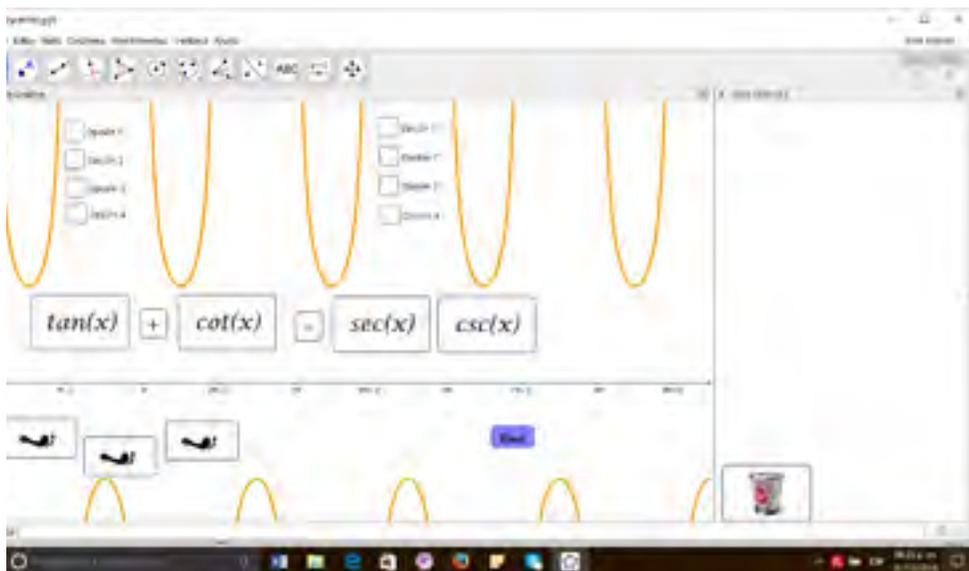


Figura 4. Entorno en Geogebra de la actividad 6

Posterior al diseño y elaboración de las actividades, estas fueron piloteadas, logrando con ello cronometrar tiempos de aplicación y verificar la comprensión de las instrucciones; obteniendo con ello un análisis a priori con las respuestas esperadas para la puesta en marcha.

■ Experimentación

Una vez realizadas las modificaciones pertinentes, la aplicación se llevó a cabo en el Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes con un grupo mixto de 51 estudiantes de segundo semestre, 33 mujeres y 18 hombres, cuyas edades oscilaban entre los 15 y 16 años (ver figura 5), al cual se le dio seguimiento durante todo el semestre.



Figura 5. Grupo de estudiantes con el que se realizó el estudio

La aplicación se llevó a cabo en el aula habitual de clases; los estudiantes formaron equipos de entre cuatro y cinco personas. Contaban con una computadora portátil por equipo la cual ya contaban con los respectivos programas instalados, además cada estudiante contaba con las actividades impresas en papel.

En todo momento se contó con la guía de la profesora del curso (investigadora), quien coordinó los tiempos previstos y dio retroalimentaciones pertinentes y oportunas. La propuesta se manejó como actividades guiadas en las que los estudiantes interactuaban con los programas, dando un espacio para la reflexión y otro más para la retroalimentación. En total se aplicaron seis actividades en un lapso de 7 días, en sesiones de aproximadamente 50 minutos.

■ Análisis de resultados

Esta etapa se realizó dentro de una estancia de investigación a la Universidad de Quebec, Canadá, donde, se analizaron los niveles de comprensión propuestos por Hitt (1998) para hacer una clasificación de los estudiantes con base a las conexiones que presentaron. Para los objetivos de esta investigación, consideramos solamente 4 de esos niveles ya que el quinto nivel referente del uso de los diversos registros para la solución de problemas no fue contemplado en las actividades:

Así, nuestra clasificación se estructuró de la siguiente manera:

- Nivel 1: En este nivel clasificamos a los estudiantes que tienen ideas imprecisas acerca de un concepto. Presentan una mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto.
- Nivel 2: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizan tratamientos (transformaciones) dentro de un mismo registro de representación.
- Nivel 3: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizaron de manera satisfactoria tareas de tránsito (conversión) de un registro de representación a otro.
- Nivel 4: En este nivel clasificamos a los estudiantes que articularon diferentes registros de representación, es decir, los estudiantes que manipulen el tránsito entre registros de ida y vuelta.

Para lograr esta clasificación, se formaron redes de representaciones cuyo número y fuerza nos determinaron el grado de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en cada uno de los estudiantes. Para ello, se procedió a hacer una revisión de las respuestas de los estudiantes, implementando una codificación acorde a las acciones (tratamientos, tránsitos, conversiones y articulaciones) desarrolladas por los estudiantes, como se presenta en la siguiente figura:

E_1	0	1	0
E_2	1	1	0
E_3	0	1	0
E_4	0	1	1
E_5	0	0	0
E_6	1	1	0
E_7	1	1	1
E_8	0	1	1
E_9	0	1	1
E_10	1	1	0

Distinguimos las acciones de los estudiantes utilizando la siguiente notación para la constitución de los niveles de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica:

- Reconocimiento de los elementos de un registro de representación: se manejó el registro verbal (R_V), el registro algebraico (R_A), el registro gráfico (R_G), el registro tabular (R_T), y el registro figural (R_F).
- Tratamiento interno dentro de un mismo registro: $T_{V\uparrow}$, $T_{A\uparrow}$, $T_{G\uparrow}$, $T_{T\uparrow}$, $T_{F\uparrow}$
- Tránsito de un registro de representación a otro: $C_{V\rightarrow A}$, $C_{A\rightarrow G}$ etc.
- Coordinación entre registros, cuando existe tránsito de ida y regreso: $C_{V\leftrightarrow A}$, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{V\leftrightarrow G}$

Según la concepción de la actividad, la figura 7 muestra cómo sería la red de un estudiante que haya realizado todos los tratamientos, tránsitos, conversiones y articulaciones esperadas en la realización de la actividad, es decir, un visualizador nivel 4.

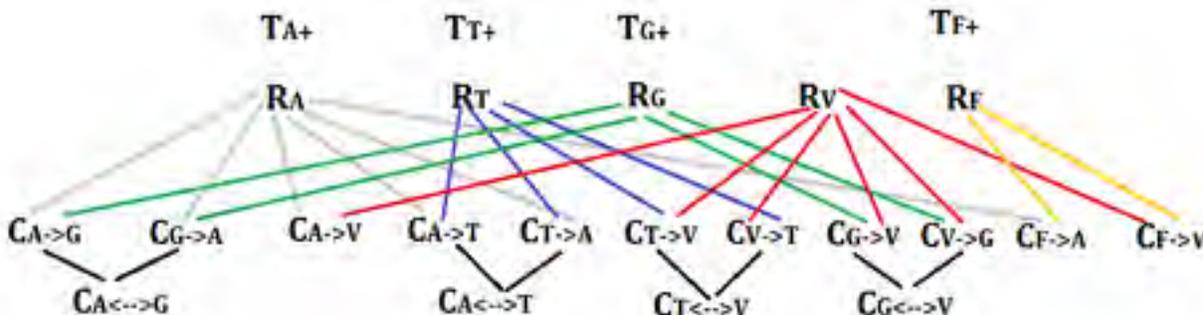


Figura 7. Red de representaciones completa o esperada de las actividades.

En contraste, a continuación, se muestra la red de representaciones de uno de los estudiantes que se clasificó en el nivel 4.

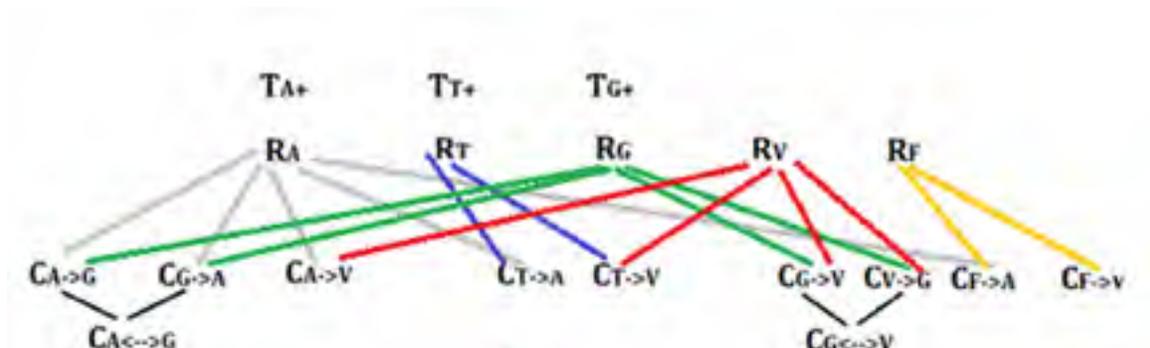


Figura 8. Red de representación del estudiante 34.

Se puede apreciar que, aunque el estudiante recae en el nivel 4, su red de representación ya carece de ciertos elementos en comparación con la red esperada.

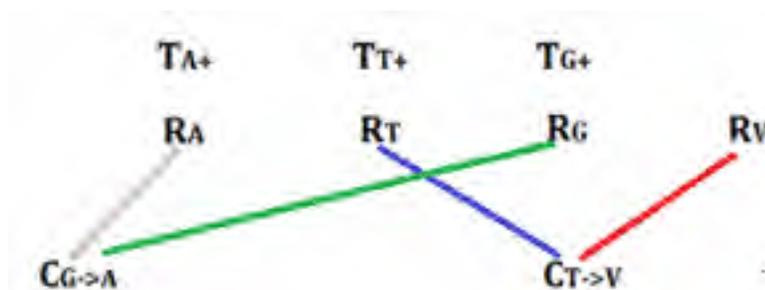


Figura 9. Red de representación del estudiante 42.

Se aprecia que este estudiante está en el nivel 3 puesto que realiza dos transitos entre registro diferentes, sin embargo, su red carece de muchas conexiones.

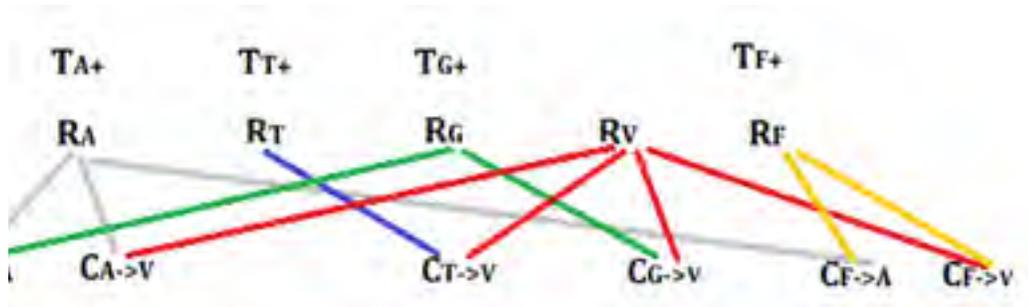


Figura 10. Red de representación del estudiante 10.

Este es otro ejemplo de un estudiante que está categorizado en el nivel 3, sin embargo, a diferencia del pasado, este estudiante tiene más conexiones debido a que realiza más tránsito entre registros de representación. Se puede apreciar que el número de conexiones del estudiante 34 es mucho mayor que la de los otros dos estudiantes, mostrando que este estudiante es más competente que los otros en el dominio de conocimiento relativo al concepto de Identidad Trigonométrica.

Después de analizar todas las redes que generaron los estudiantes, se procedió a asignarlos el nivel de comprensión, con lo que se obtuvo que los 51 fueran capaces de realizar al menos 2 de los tránsitos por lo que fueron categorizados en el nivel 3 de comprensión. Se logró que 5 estudiantes realizaran tareas de articulación entre registros, categorizándolos en el nivel 4 de comprensión.

Los 5 estudiantes que entraron en el nivel 4 de nuestra categoría fueron capaces de transformar (transitar), generar, comunicar y reflexionar sobre toda la información que se les presentó, lo que para nosotros los hace visualizadores en potencia. Ya que la visualización tiene que ver con comprender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión, podemos decir que todos los estudiantes cumplieron con el objetivo de visualizar matemáticamente hablando.

■ Conclusiones

En una época en donde todo cambia a pasos agigantados, es importante reflexionar sobre las formas de enseñanza en las aulas. En este sentido la tecnología puede tomar un papel relevante al momento de ser utilizada en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje, proponiendo alternativas didácticas que la incluyan.

Los resultados arrojados en este estudio dan muestra de que la visualización matemática, concebida a través de un diseño cuidadoso de actividades en el que intervienen tanto la interrelación de diversas representaciones de los objetos matemáticos como las herramientas tecnológicas, son un medio que permiten a los estudiantes desprender el objeto de sus representaciones, al tiempo que al crear redes entre estas últimas van logrando un mayor nivel de comprensión de los objetos trabajados.

La utilización de una herramienta tecnológica fue crucial para este estudio, pues favoreció de sobremanera la actitud de los estudiantes hacia el tema; además de que la representación de los objetos no habría sido posible de otro modo; aún más, la implementación de la metodología elegida, en la que se realizan diversos análisis preliminares como base principal para la concepción de la secuencia, nos permitió considerar aspectos en los que los estudiantes pudieran externar las imágenes mentales que en ellos se generan al momento de manipular el objeto en sus diferentes representaciones, creando con ello redes de representación lo suficientemente sólidas para dar muestra de la comprensión del objeto mismo.

■ Referencias bibliográficas

- Adame, A. (2017). *Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior*. Tesis sin publicar, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.
- Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Recuperado de: <http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf>
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Liked to the Concept of Function. *JMB, Journal of Mathematical Behavior*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

- Hitt, F. (2003). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques?
Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia.
- Torres, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en matemáticas. *Miscelánea Matemática* 40, 1-27.