Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA SOBRE LAS DEMOSTRACIONES EN PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

MATHEMATICAL PRACTICE KNOWLEDGE ON DEMONSTRATIONS IN MATHEMATICS TEACHERS IN INITIAL TRAINING

Christian Alfaro Carvajal, Pablo Flores Martínez, Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional (Costa Rica), Universidad de Granada (España), Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
cristian.alfaro.carvajal@una.cr, pflores@ugr.es, gabriela.valverde@ucr.ac.cr

Resumen
El trabajo tiene como objetivo caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración. Es una investigación en curso que consta de una fase teórica y tres fases empíricas. En la fase teórica, se desea precisar el significado de las demostraciones matemáticas mediante el análisis conceptual y en las fases empíricas, caracterizar el conocimiento sobre los aspectos lógicos, sintácticos y matemáticos de las demostraciones y determinar cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas mencionados. Se espera aportar al conocimiento de la práctica matemática de la demostración y brindar insumos para la formación inicial de profesores de matemáticas.

Palabras clave: formación de profesores, demostración matemática, MTSK

Abstract
This work is aimed at characterizing the knowledge of mathematics teachers in initial training with respect to the mathematical practice of demonstration at the National University of Costa Rica. It is an ongoing research that consists of a theoretical phase and three empirical phases. In the theoretical phase, we want to specify the meaning of mathematical demonstrations through conceptual analysis; and in empirical phases, to characterize knowledge about the logical and syntactic aspects of the demonstrations; to characterize knowledge about the mathematical aspects of the demonstrations; and to determine which characteristics of the mathematical arguments are the most convincing ones to the aforementioned mathematics teachers. It is expected to contribute to the knowledge of the mathematical practice of the demonstration and provide inputs for the initial training of mathematics teachers

Key words: teacher training, mathematical demonstration, MTSK

Introducción

La demostración es un tema relevante dentro de la Educación Matemática. Para Hanna y De Villiers (2011) existen seis grandes temas para comprender la enseñanza de las demostraciones: *(1) el desarrollo cognitivo de la demostración, (2) la argumentación, (3) software de geometría dinámica y experimentación, (4) la demostración en el currículo (5) la naturaleza de la demostración en el aula* y *(6) la demostración en el nivel terciario o universitario.* En el caso de la demostración en el currículo se considera relevante la investigación sobre el conocimiento que los maestros y profesores requieren para enseñar demostraciones de manera efectiva.

Existen dos posiciones claramente diferenciadas sobre la enseñanza de las demostraciones en la educación secundaria: como un contenido específico o como un estándar de proceso. En países como Francia, Alemania y Japón la demostración es considerada en sus programas de estudios como un contenido explícito de enseñanza, de este modo, el programa establece lo que se debe aprender y los libros de texto tienen capítulos dedicados a la enseñanza de la demostración. En otros países como Italia y los Estados Unidos la demostración es tomada en cuenta en sus programas de estudio de una forma implícita e informal, particularmente en los Estados Unidos es vista como un proceso que debe integrarse mediante el contenido matemático específico (Cabassut et al., 2011).

Según la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) los programas de estudio de todos los niveles educativos deben favorecer en los estudiantes los procesos de razonamiento y demostración como elementos fundamentales de las matemáticas, para ello, deben promoverse actividades tales como formular e investigar conjeturas, desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones en donde se escojan y utilicen diferentes métodos de demostración y tipos de razonamientos.

Para el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012), en el programa de matemática de la educación secundaria la demostración forma parte del proceso denominado *razonar y argumentar*. La palabra proceso hace referencia a actividades cognitivas que una persona puede realizar en las diferentes áreas matemáticas consideradas en dicho programa: *números, geometría, medidas, relaciones y álgebra y; estadística y probabilidad*. El proceso de razonar y argumentar corresponde a actividades mentales que involucran la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, los ejemplos, contraejemplos y la demostración. La argumentación se debe promover paulatinamente, primero de forma verbal, luego de forma escrita y posteriormente de manera simbólica. De igual manera, se deben introducir de manera gradual las diferentes formas de razonamiento hasta lograr procesos más formales y el uso de la deducción.

El profesor de matemática debe promover que los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración matemática, para ello, debe realizar demostraciones de algunos teoremas y solicitar a los estudiantes que realicen demostraciones sobre algunos resultados matemáticos. La demostración es considerada como una fase formal de la argumentación y tiene un papel relevante en la formulación de conjeturas. Una vez que los estudiantes han formulado una conjetura se deben trabajar tres etapas: en la primera se debe hacer la verificación en casos particulares, en una segunda etapa los estudiantes deben proponer un argumento que justifique la validez de la conjetura y finalmente, en una tercera etapa deben realizar la demostración (MEP, 2012).

Independientemente de la forma en la que se aborden las demostraciones matemáticas en un currículo de la educación secundaria, como contenido o como proceso, los docentes deben tener un conocimiento profundo sobre el contenido de las mismas, es decir, deben poseer un conocimiento específico sobre qué es una demostración matemática y el por qué una demostración matemática es válida (Cabassut et al., 2011; Lin et al., 2011).

Realizar demostraciones a sus estudiantes y promover que ellos las hagan es una tarea altamente demandante para el profesor de matemáticas que exige un sólido conocimiento del contenido sobre las demostraciones matemáticas, pero también pueden tener influencia en su práctica profesional las concepciones que tenga sobre las mismas (Knuth, 2002).

Esta investigación tiene como principal objetivo caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la práctica matemática de la demostración. Para esta caracterización se utilizará el subdominio denominado *conocimiento de la práctica matemática* que forma parte del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)*. Este subdominio corresponde al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que significa demostrar, justificar, definir, deducir e inducir. Incluye el conocimiento del fundamento lógico de cada una de las prácticas anteriores y el del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo. En este subdominio se hace referencia a las formas de producción y del funcionamiento de las Matemáticas (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2013).

Específicamente en la práctica matemática de la demostración en los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica interesa indagar sobre tres elementos fundamentales: *(1) el conocimiento sobre la validez lógica de la demostración matemática, (2) el conocimiento sobre la validez matemática de las demostraciones y (3) las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas.* Los dos primeros elementos están asociados al conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática y el tercero a la convicción.

Con respecto a la naturaleza de la demostración matemática algunas investigaciones han evidenciado que los profesores de matemáticas identifican de manera correcta un argumento válido, pero también aceptan argumentos inválidos como demostraciones. Por otra parte, los criterios utilizados por los profesores para evaluar un argumento difieren mucho entre sí, no obstante, existen algunos elementos comunes como los esquemas simbólicos o rituales, la forma del argumento, las manipulaciones algebraicas utilizadas, entre otros. Además, los profesores encuentran que un argumento es convincente por factores tales como el uso de ejemplos concretos, la referencia visual y no necesariamente su validez lógico-matemática (Cabassut et al., 2011).

Marco teórico

El análisis conceptual

De acuerdo con Rico (2001) una problemática en los procesos de investigación surge en el planteamiento de un marco teórico mal definido en el cual se presenten términos o conceptos de manera errónea y con poca precisión. La multiplicidad de significados de los conceptos centrales propuestos en un marco teórico puede suponer una dificultad si no se hace una precisión de los mismos. Es por esto que "el análisis conceptual ofrece un método que permite al investigador convertir los conceptos en piezas teóricas precisas para el estudio que quiere llevar a cabo" (Rico, 2001, p.185). Se define el análisis conceptual como "un método para trabajar y profundizar los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y domino en su uso" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 8).

Modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)

El MTSK es un modelo teórico que permite caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y un instrumento metodológico para analizar las diferentes prácticas del profesor de matemáticas mediante sus categorías. Se consideran dos grupos fundamentales de conocimiento o dominios: *(1) el conocimiento matemático* que hace referencia al conocimiento que posee el profesor sobre las matemáticas como una disciplina científica, pero en un contexto escolar y *(2) el conocimiento didáctico del contenido* que refiere sobre los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza – aprendizaje (Aguilar et al, 2014).

Knowledge of practices of mathematics (KPM): el conocimiento de la práctica matemática

Este subdominio forma parte del conocimiento matemático y hace referencia a las formas de tratar con las matemáticas. Se considera relevante el conocimiento sobre la definición, la demostración y la argumentación que muestren la comprensión de lo que es una definición y qué elementos la constituyen o cuándo se ha realizado una demostración o cuándo una línea de razonamiento es válida. En este subdominio se encuentran las siguientes categorías: demostrar, definir, ejemplificar y usar heurísticos (Carreño et al., 2013; Flores-Medrano, 2015).

El conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones

En esta categoría se incluyen las ideas de argumentación, justificación y validación debido a la similitud que tienen en cuanto a su carácter de convencimiento, aunque diferentes en cuanto al uso de los criterios de verdad. Se considera importante el conocimiento sobre la naturaleza de las demostraciones, los esquemas de demostración y las funciones atribuidas (Flores-Medrano, 2015).

Para caracterizar el conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones, en esta investigación se considerarán tres categorías principales que se han construido con base en trabajos anteriores sobre la demostración en profesores de matemáticas: *(1) el conocimiento sobre la naturaleza de las demostraciones matemáticas*, *(2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración matemática* y *(3) la convicción* (Flores-Medrano, 2015; Knuth, 2002).

A continuación, se detallan cada una de las categorías mencionadas anteriormente.

(1) El conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática: es el conocimiento sobre lo que constituye una demostración matemática. Se consideran las siguientes subcategorías:

> *(a) el concepto de demostración matemática* que refiere al conocimiento del profesor de matemática sobre lo que es una demostración matemática y lo que significa demostrar algo en las matemáticas (Flores-Medrano, 2015).
>
> *(b) la validez lógica* que refiere al conocimiento del profesor sobre cómo proceder en demostraciones de afirmaciones matemáticas que involucran de forma implícita o explícita las conectivas lógicas *(y, o, si-entonces, no)* y los cuantificadores existencial y universal. Además, se considera el uso correcto de las reglas de inferencia, de las equivalencias lógicas y de los métodos de demostración matemática (Durand, Boero, Douek, Epp y Tanguay, 2011).
>
> *(c) la validez matemática* que refiere al conocimiento del profesor sobre la condicionalidad y la generalidad de los teoremas en la teoría matemática en la que se insertan, además del uso consciente de las definiciones de dicha teoría lo que le permite evaluar la demostración de los teoremas en función de los axiomas, de otros teoremas y de las definiciones pertinentes de la teoría matemática empleada en dicha demostración. Es el conocimiento que le permite poder evaluar la generalidad de una demostración en función de los elementos de la teoría matemática empleada y de este modo determinar la validez en general del teorema demostrado en dicha teoría (Cabassut et al., 2011).

(2) El conocimiento sobre las funciones de la demostración matemática: es el conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas. Se consideran las siguientes subcategorías propuestas por De Villiers (1993*):*

> *(a) la verificación:* la demostración se considera como la máxima autoridad para asegurar la validez de una afirmación matemática. Se considera que detrás de cada teorema hay una secuencia de transformaciones lógicas para obtener la conclusión a partir de las hipótesis asumidas. Sin embargo, una demostración lógico-formal no es un garante de convicción.

(b) la explicación: la demostración brinda las razones por las que una afirmación matemática es verdadera. Esta función es importante para comprender las razones que hacen verdadero a un resultado evidente de manera intuitiva o por evidencia cuasi-empírica.

(c) la sistematización: la demostración permite organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas lo que favorece la identificación de inconsistencias, verifica y simplifica teorías matemáticas y brinda una visión global sobre una temática que favorece sus aplicaciones en diferentes campos.

*(d) el descubrimiento**:*** la demostración es un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva, que permite descubrir nuevos resultados los cuales serían difíciles de determinar de forma intuitiva o con procesos cuasi-empíricos. Un ejemplo de esta función es el descubrimiento de las geometrías no euclidianas al modificar el postulado de las paralelas.

(e) la comunicación: la demostración permite divulgar los resultados a los diferentes miembros de la comunidad científica: matemáticos, profesores, alumnos, entre otros. Debido a la complejidad del conocimiento matemático, se deben generar procesos de negociación subjetiva de significados de los temas involucrados de manera que las argumentaciones sean aceptables. Esta función comunicativa expone las demostraciones a la sanción pública que permite refinar, simplificar, modificar y hasta refutar los resultados presentados.

(3) La convicción: se refiere a las razones por las que los profesores de matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático. Un argumento para validar una afirmación puede asumir varias formas diferentes y ser convincente, aunque no necesariamente sea una demostración (De Villiers, 1993; Hanna, 2002). Se consideran las siguientes categorías basadas en los trabajos de Knuth (2002) y Harel y Sowder (1998):

(a) el uso de elementos concretos en el argumento: el argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.

(b) la familiaridad del argumento: el argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de matemáticas con el argumento.

(c) el nivel de detalles en el argumento: el argumento es convincente debido a que justifica con mucho detalle cada paso realizado en él.

(d) la forma ritual del argumento: el argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo. De esta manera, se juzga el valor del argumento en función del uso de notaciones matemáticas simbólicas, aunque lo expresado no tenga validez lógica o matemática.

(e) el nivel explicativo del argumento: el argumento es convincente porque explica por qué la afirmación que se está demostrando es verdadera. Es decir, muestra las matemáticas subyacentes que explican la validez del resultado.

(f) la validez del argumento: la convicción se basa en la validez matemática y la validez lógica del argumento. En el argumento se utilizan correctamente las reglas de inferencia, las equivalencias lógicas, los métodos de demostración y la teoría matemática correspondiente.

Marco metodológico

La investigación consta de una fase teórica y tres fases empíricas que se detallan a continuación:

(1) La fase 0: consiste en un estudio teórico para precisar el significado de la demostración matemática. Para dicho estudio se emplea el análisis conceptual como metodología de investigación. Específicamente se quiere profundizar sobre el concepto, su origen y desarrollo histórico, los tipos de demostración, las funciones atribuidas, los diferentes esquemas de las demostraciones matemáticas, además de realizar un estudio sobre diferentes demostraciones de dos resultados clásicos en matemáticas: la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y la suma de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana que servirán de insumos para el planteamiento de argumentos en las fases empíricas 2 y 3. Para ello se propone hacer una revisión bibliográfica en diccionarios, libros de texto, investigaciones previas y el Programa de Estudios de Matemática de la educación secundaria costarricense.

(2) La fase 1: consiste en un estudio empírico para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la subcategoría denominada *validez lógica* la cual forma parte de la primera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática.* Para dicho estudio se aplicarán dos cuestionarios, uno sobre las formas de proceder en la demostración de proposiciones matemáticas en función de su estructura lógica y sintáctica y otro para la evaluación de argumentos matemáticos en donde lo central son los elementos lógicos de la demostración.

(3) La fase 2: es un estudio empírico para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la subcategoría denominada *validez matemática* la cual forma parte de la primera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática.* Para ello, se aplicará un cuestionario para que los sujetos evalúen argumentos correctos desde el punto de vista lógico, en donde lo central sea el análisis de la demostración en función del uso de los axiomas, teoremas o definiciones del área matemática en la que se inserta.

(4) La fase 3: es un estudio empírico para determinar cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica. Este estudio está fundamentado en la tercera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *la convicción.* En esta fase se aplicará un cuestionario en donde se presenten argumentos matemáticos para que sean evaluados por los sujetos de investigación y determinen cuáles les convencen más y porqué razones.

Para la *fase 0* la técnica para la recolección de la información es la revisión bibliográfica o de literatura. De acuerdo con Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2014) esta revisión "implica detectar, consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio, de donde se tiene que extraer y recopilar la información relevante y necesaria para enmarcar nuestro problema de investigación" (p.61).

Para el análisis de la información de las fases empíricas se hará uso del análisis de contenido. Los propósitos de este análisis incluyen la codificación de preguntas abiertas en encuestas, cuestionarios, la revelación del enfoque de asuntos individuales, grupales, institucionales y sociales, y la descripción de patrones y tendencias en el contenido comunicativo. Este análisis implica codificación, categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis - palabras, frases, oraciones), comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y conclusión - extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis (Cohen, Manion, y Morrison, 2007).

Las respuestas de los profesores de matemáticas en formación inicial se codificarán en códigos externos, los cuáles son generados a priori por los investigadores y que corresponden a las categorías indicadas en el marco teórico sobre la práctica matemática de las demostraciones. Posteriormente, mediante un enfoque más inductivo se generan códigos internos a medida que se examinan los datos y se observe la necesidad de nuevos códigos para categorías emergentes.

Resultados

En esta investigación se ha realizado el análisis conceptual de la demostración matemática, para ello, se hizo una revisión y sistematización del concepto de demostración, su origen y desarrollo histórico, los tipos de demostración, las funciones atribuidas, los esquemas de demostración y diferentes demostraciones sobre la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y sobre el teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo en la geometría euclidiana. Se han precisado con mayor claridad las categorías y subcategorías de lo que en esta investigación se ha denominado *el conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones.* Se están elaborando los cuestionarios de las fases empíricas los cuales serán aplicados a los sujetos de investigación en el periodo de setiembre-noviembre de 2018 y marzo-junio de 2019.

Conclusiones

Se considera importante caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración para determinar si dicho conocimiento y las concepciones sobre la demostración matemática están en concordancia con las exigencias del currículo nacional e internacional de matemáticas de la educación secundaria. De esta manera, esta investigación pretende aportar al conocimiento de la práctica matemática sobre la demostración y a la vez brindar insumos para el abordaje de la demostración en la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. En este sentido Knuth (2002) sugiere que los profesores de matemática en formación inicial deben experimentar la demostración matemática en sus cursos de formación como una herramienta significativa para el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, las experiencias a las que sea expuesto en su formación inicial pueden aportar favorablemente al desarrollo de su conocimiento profesional en esta área.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero, D., Zakaryan, D. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Miguel_Montes/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas/links/544e6bd40cf29473161bde8f.pdf

Cabassut, R.; Conner, A.; İşçimen, F. A.; Furinghetti, F.; Jahnke, H. N. y Morselli, F. (2011). Conceptions of proof– In research and teaching. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Dordrecht: Springer. Doi: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á., & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. *Proceedings of the CERME, Turkey, 8*, 2976-2984.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). Research Methods in Education (sixth edition). London: Routledge.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2011). Examining the role of logic in teaching proof. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Flores-Medrano, E. (2015). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En Carrillo, J., Contreras, L y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* 2, (pp. 30-34). Huelva, España.

Hanna, G., & De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer. Doi https://doi. org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Recuperado de http://math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Students'%20Proof%20Schemes.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.a edición). México: McGRAW-HILL.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/pdf/4149959.pdf?refreqid=excelsior%3A3130897e8847df8383552edfbe28c44e&seq=1#page_scan_tab_contents

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2011). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 327-346). Dordrecht: Springer. Doi https:// doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_14

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: autor Recuperado de https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática.* España: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes. uniandes.edu.co/523/1/RicoL01-2593.PDF

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Granada: Comares, S. L.