VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

LAS PROBLEMÁTICAS SEMIÓTICAS Y LA METÁFORA EN LAS REPRESENTACIONES DE LOS CONJUNTOS INFINITOS

THE SEMIOTIC PROBLEMS AND THE METAPHOR IN THE REPRESENTATIONS OF THE INFINITE SETS

Héctor Mauricio Becerra Galindo, Vicenç Font Moll
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia), Universitat de Barcelona (España)
hemabe2@yahoo.es, vfont@ub.edu

Resumen

En este artículo se presentan los primeros resultados de la investigación doctoral sobre *las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos*. Esta surge de las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos de números. Centraremos la atención en la dificultad asociada a la falta de conciencia semiótica por parte de los profesores en las representaciones elegidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar esta dificultad, se indaga y describe también las problemáticas semióticas y las metáforas presentadas en las representaciones de los conjuntos infinitos en los libros de texto.

Palabras clave: representación semiótica, metáfora, conciencia semiótica, conjuntos infinitos, libros de texto

Abstract

In this article, we present some results of the doctoral research on *the semiotic problems and the metaphor in the representations of the infinite sets*. This arises from the difficulties that students present in the cognitive construction of infinite sets. We will focus attention on the difficulty associated with the lack of semiotic awareness on the part of teachers in the representations chosen in the teaching of the infinite sets. To address this difficulty, the semiotic problems and metaphors presented in the representations of infinite sets in textbooks are also investigated and described.

Key words: semiotic representation, metaphor, semiotic awareness, infinite sets, textbooks

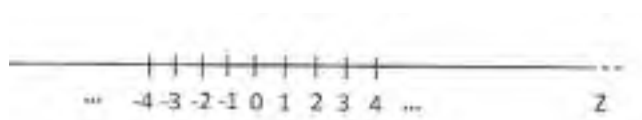
Introducción

Las diferentes investigaciones que se han realizado sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Duval, 1983; Moreno y Waldegg, 1991; Arrigo y D'Amore, 1999, 2002; Tsamir, 2000; Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011; entre otros) evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva. Estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico) como se concluye en la investigación de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993, p. 38) "[…] de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (paradoja de Duval).

Las dificultades acabadas de comentar ya fueron tema de muchas investigaciones en el pasado, por lo cual nuestra atención en este trabajo se dirige a las dificultades relacionadas sobre todo con: 1) la falta de "*conciencia semiótica*" (conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática) que usan los profesores al elegir las representaciones para la enseñanza de los conjuntos infinitos y 2) las interpretaciones que hacen los estudiantes de estas representaciones desde la elección del profesor, con la finalidad de potenciar una reflexión crítica por parte de los profesores sobre las representaciones y metáforas utilizadas en sus explicaciones en la generación de dichos conflictos.

Estas dificultades se empiezan a evidenciar cuando los profesores generan argumentos desde lo que ven en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarios para la conceptualización (Duval, 1993) de los conjuntos infinitos; por ejemplo, los profesores (se codifica con la letra C) el ver la siguiente representación gráfica (figura 1) que es habitual en los libros de texto, los lleva a proporcionar los siguientes argumentos a las preguntas realizadas por los investigadores (codificado como Inv):

Figura 1. *Representación gráfica de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.*



Fuente: Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti* (p. 222). Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos* (p. 222). Bogotá, Colombia: Magisterio].

> Inv: […] ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son: más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?
> C: Obviamente son más, están además todos los negativos.
> Inv: ¿Cómo representarías estos conjuntos numéricos a tus estudiantes?
> C: Los relativos [enteros] los pondría en la recta de los números y los naturales en cambio deben estar en la línea de los números.[…]
> Inv: ¿Esto lo presentas en clase?
> C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos. (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 209)

En este caso la representación gráfica lleva a pensar, tanto a los profesores como a los estudiantes, que el número de enteros es "el doble" de los números naturales, en otras palabras, que el conjunto de los enteros tiene más elementos que el conjunto de los naturales.

Para afrontar estas dificultades es necesario: 1) que el profesor reflexione sobre la importancia que tiene la elección de representaciones de los conjuntos infinitos en su enseñanza, 2) que se dé cuenta que esta elección no es univoca ni neutra y 3) que puede ser una causa de la falta de construcción cognitiva por parte de los alumnos. Alcanzar una conciencia semiótica en el proceso de su enseñanza, les permitirá a los profesores entender que "la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento [...] están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica" (Duval, 1999, p. 18).
Por lo tanto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué manifestaciones de la conciencia semiótica se producen en el profesor al problematizarle su elección de representaciones semióticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los conjuntos infinitos?

Dicha pregunta se concreta en diferentes objetivos específicos, siendo uno de ellos: Indagar y describir las diferentes problemáticas de las representaciones semióticas y metáforas de los conjuntos infinitos a partir de los libros de texto, que es el que vamos a desarrollar en esta comunicación.

■ Marco teórico

Los objetos abstractos de la matemática no son cosas que son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper, lo único que podemos hacer con estos "objetos matemáticos es describirlos, definirlos, denotarlos, denominarlos, diseñarlos etc., es decir dar representaciones semióticas" (D'Amore, Fandiño Pinilla y Iori, 2013, p. 125). Las representaciones semióticas no son las únicas que hacen parte de los procesos de la actividad matemática, como lo establece Font (2007) las metáforas también hacen parte de estos procesos, que estructuran el conocimiento de los objetos matemáticos en términos de nuestro conocimiento y que "actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto" (Font, 2007, p. 125). Por lo tanto, las referencias que se abordan para este trabajo de investigación están relacionadas especialmente con los elementos semióticos-cognitivos propuestos en la teoría de Duval (1999, 2004, 2006) y los elementos de las metáforas propuestos por Lakoff y Nuñez (2000).

Representaciones semióticas

En palabras de Duval (1999, 2004) una representación es algo que se pone en "lugar de otro algo" (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016, p. 62) y la estructura que propone Duval (2008) de una representación semiótica es:

{{contenido de la representación, registro semiótico representado}, objeto representado}.

Los registros que se movilizan en matemáticas son cuatro: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales. Duval (2004) define los registros discursivos como los que permiten describir, inferir, razonar, calcular. Los registros no discursivos como los que permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible. Los registros plurifuncionales como los que son utilizados en todos los dominios de la vida cultural y social. Los registros monofuncionales como registros derivados, que son especializados en un solo tratamiento. En la figura 2, se presenta la clasificación de los registros que son movilizados en matemáticas.

Es necesario aclarar que existen unas representaciones auxiliares que no dependen del registro semiótico y son utilizadas en matemáticas, como el material (por ejemplo, el manipulativo como: el ábaco, las regletas de Cuisenaire, bloques lógicos, etc.), los ejemplos, las ilustraciones, la organización (las tablas), etc. (Duval, 2004).

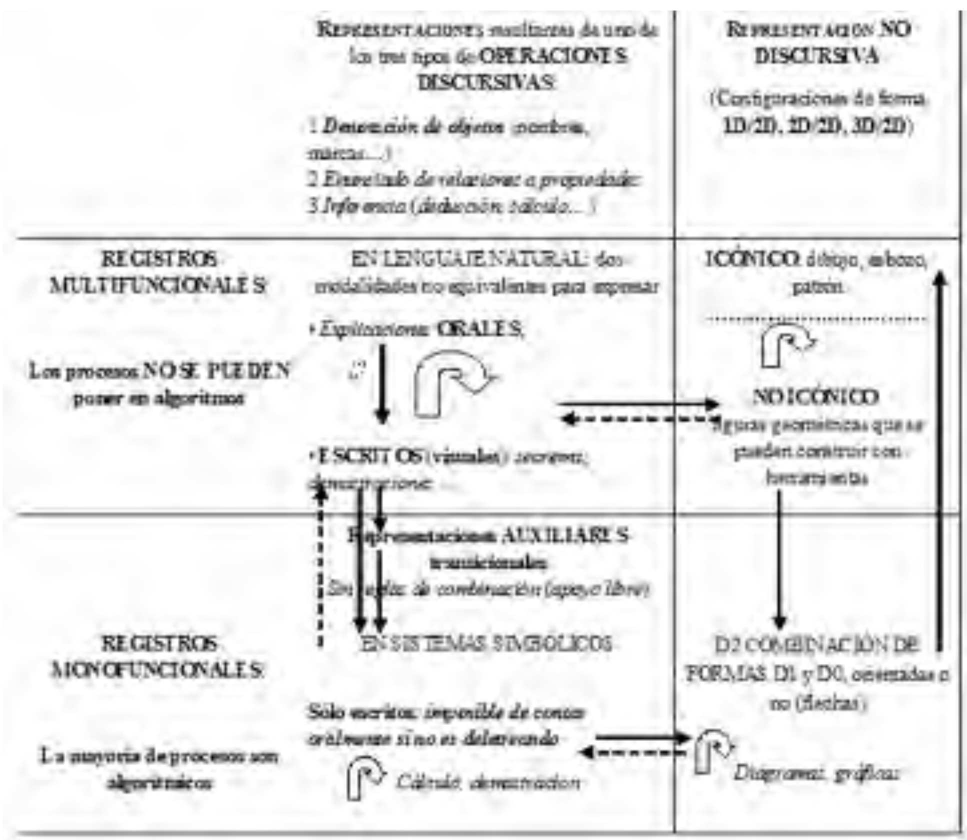
En los procesos de pensamiento que están involucrados con la actividad matemática, es necesario enfocarse en el nivel de los sistemas semióticos y no en la representación particular producida (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016), ya que es en este nivel donde se captura la importancia de la representación semiótica en las matemáticas.

Los dos tipos de transformaciones que se dan en la representación semiótica son:

1) Los tratamientos, que son transformaciones en el mismo registro; por ejemplo: ½ →0,5, se pasa de un registro de escritura fraccionaria a un registro de escritura decimal, pero se sigue conservando en el registro monofuncional y registro discursivo.
2) Las conversiones son transformaciones de representaciones que consiste en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar del registro de la lengua natural al registro pictográfico, así: Un medio → (Fandiño Pinilla, 2010, p. 37).

Esta última transformación es la raíz de "los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático [… por su…] complejidad cognitiva […y por el…] cambio de representación" (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016, p. 85).

Figura 2. Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas.



Fuente: Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. trad.) (p. 71). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Metáfora

Lakoff y Johnson (1991) pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido; el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas (v.g. Van Dormolen, 1991; English, 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000; Núñez y Lakoff, 1998; D'Amore y Fandiño Pinilla, 2012).

Las metáforas se caracterizan por crear, entre un dominio de partida y un dominio de llegada, un puente conceptual que permite la transfusión de propiedades del dominio de partida en el domino de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se transpongan una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y oculta otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes.

Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han detectado diferentes clases de metáforas. Un primer grupo lo constituyen las de tipo extramatemático (grounding), como la de "una función es una máquina", que sirven para explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. Dos de los ejemplos más notables de este tipo para nuestra investigación son la del “contenedor” y la del “camino”, la primera es usada para estructurar la teoría de clases, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora inconsciente, que tiene sus raíces en la vida cotidiana y que podemos visualizar de la siguiente manera:

Tabla 1. Las clases son contenedores

Dominio de partida **ESQUEMA DEL CONTENEDOR**		***Dominio de llegada*** **CLASES**
Interior del contenedor	→	Clase
Objetos dentro del contenedor	→	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	→	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	→	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	→	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	→	La unión de clases
El exterior de un contenedor	→	El complementario de la clase

Nota. Fuente: Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics (p. 13). In T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME24*, vol.1. Hiroshima: Hiroshima University.

La metáfora del camino se puede observar en el discurso del profesor cuando este facilita la comprensión de la gráfica como un camino por el que uno camina o una línea por la que uno pasa:

> Lo que tenemos que hacer es crear una tabla de variación. *Si antes de cero está aumentando ... si después de cero está disminuyendo ... Si antes y después de cero está aumentando, entonces hay un punto de inflexión. Si antes de cero está aumentando y después de cero está disminuyendo, entonces hay un máximo*. *Si antes de*

cero está disminuyendo y después de cero está aumentando, entonces hay un mínimo. (Dibuja una tabla de variación para esta función). (Acevedo, 2008, pp. 139-140)

De acuerdo con Talmy (2000), estos son ejemplos típicos de "movimiento ficticio" y se basan en el esquema de la imagen de un "camino". Este esquema permite una organización espacial: hay un origen (desde...), un camino (paso por, aquí, a lo largo) y un punto final (a...). Además, se refiere a una cosa que se está moviendo (un punto, un objeto) y cuya ubicación se puede conocer en un momento dado; en algunos casos, el punto de inicio es "menos infinito" y el punto final es "infinito positivo".

Podemos agregar que la "Gráfica de un camino" es una metáfora de tipo extramatemático (grounding), y el dominio de origen es el esquema de la imagen de un camino.

Tabla 2. *Gráfica de un camino*

Dominio de partida **ESQUEMA DEL CAMINO**		*Dominio de llegada* ***GRÁFICA***
Camino	→	Gráfica
Origen del camino	→	Origen de la gráfica
Estar sobre el camino	→	Punto que pertenece a la gráfica
Una localización en el camino	→	Punto en la gráfica
Final del camino	→	Final de la gráfica (por ejemplo, más infinito)
Estar fuera del camino	→	Punto que no pertenece a la gráfica

Nota. Fuente: Font, V., Bolitte, J. y Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions (p. 145). *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2).

Un segundo grupo de metáforas, también frecuente en las aulas, lo constituyen las metáforas intramatemáticas (linking) las cuales permiten estructurar partes del conocimiento matemático a partir de otras partes ya conocidas. Ejemplos de este tipo son “los números reales son los puntos de una recta”, “los números complejos son vectores”, “las funciones de proporcionalidad son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc. A continuación, se presenta la metáfora de los números naturales como conjuntos.

Tabla 3. *Los números naturales como conjuntos*

Dominio de partida ***CONJUNTOS***		*Dominio de llegada* ***NÚMEROS NATURALES***
El conjunto vacío $\emptyset$	→	Cero
El conjunto que contiene al conjunto vacio $\{\emptyset\}$ (ejemplo, $\{0\}$)	→	Uno
El conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (es decir, $\{0, 1\}$)	→	Dos
El conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (es decir, $\{0, 1, 2\}$)	→	Tres

El conjunto de sus predecesores (Construir siguiendo la regla anterior) $\longrightarrow$	Un número natural

Nota. Fuente: Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being* (p. 142). New York: Basic Books.

En esta metáfora se realiza la conceptualización desde una rama de las matemáticas como lo es la aritmética, en términos de otra rama de las matemáticas como lo es la teoría de conjuntos, se ve claramente que la perspectiva cognitiva es la conceptualización de los números a partir de los conjuntos.

Metodología

Esta investigación presenta un análisis de las representaciones de los conjuntos infinitos usadas en los libros de texto para la enseñanza de los números reales. Para la selección de los libros se siguió los siguientes procesos: 1) se preguntó a los profesores participantes qué libros utilizaban para enseñar los números reales, lo cual nos llevó a estudiar y examinar 35 libros diferentes, 2) los 35 libros en esta segunda fase se agruparon en tipos según las representaciones utilizadas, las problemáticas semióticas en las representaciones y las metáforas, y 3) se hizo un análisis detallado de las representaciones, de las problemáticas semióticas de las representaciones y de las metáforas, tal como se ejemplifican en el apartado siguiente.

Análisis de los datos

A continuación, se muestra un análisis de las problemáticas de las representaciones de los conjuntos infinitos y las metáforas de dos libros de texto, que hacen parte de dos de los cuatro tipos en los que se clasificaron los 35 libros analizados.

En un libro de grado octavo se define los números reales así: “Los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$, conforman, junto con los irracionales $\mathbb{I}$, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$” (Dueñas, Garavito y Lara, 2007, p. 48); esta definición se ubica en el registro de la lengua natural, pero los autores presentan también el esquema de la figura 3 que se ubica como representación auxiliar. Hay una evidente contradicción entre las dos representaciones semióticas, la escrita y la figural, ya que si ubicamos una representación hipotética de dos números (puntos azules) en la representación auxiliar donde está la letra $\mathbb{R}$, se puede establecer que en esos lugares los números no pertenecen a $\mathbb{Q}$, ni a $\mathbb{I}$, entonces surge la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de números se representarían en este lugar?; lo que tenemos en este ejemplo es un problema con la representación auxiliar, la cual no está representando correctamente el objeto matemático de los números reales, es decir, no existe una correcta coordinación de los dos registros (Duval, 1999; Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

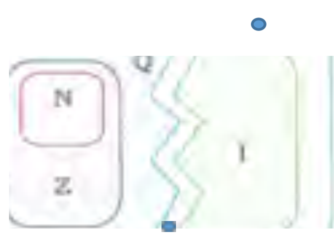


Figura 3: *Representación auxiliar en los $\mathbb{R}$*
Fuente: Dueñas, W., Garavito, A. y Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8* (p. 48). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Educar.

El esquema de la Figura 3, desde el punto de vista de los elementos metafóricos, se puede clasificar como un *esquema de contenedor* (es un esquema de imagen que se basa en la experiencia corporal) donde los elementos del contenedor forman la unidad, y tiene tres partes: el interior, el borde y el exterior; este esquema se relaciona con la metáfora conceptual de tipo extramatemático (grounding), donde el *esquema del contenedor* se encuentra en el dominio de partida y los números reales se encuentran en el dominio de llegada, y que haría parte de los ejemplos propuestos por Font (2007) de esta metáfora: *"Las clases son contenedores, los puntos son objetos y una función es una maquina*" (p. 118). En el esquema 1 (Figura 2) se puede comprender que la primera línea es el contenedor por lo tanto es la unidad, y en este caso todo lo que está al interior de esa línea serían los números reales, sin tener en cuenta las otras líneas interiores de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$. La dificultad se presenta cuando tenemos tres contenedores el de $\mathbb{R}$, el de $\mathbb{Q}$ y el de $\mathbb{I}$, pero algunos objetos de $\mathbb{R}$ no están en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{I}$, entonces esto contradice la lógica del esquema de contenedor y a su vez el de números reales, porque tiene que existir objetos de $\mathbb{R}$, que estén en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{I}$.

En la definición de un libro de grado once, se presentan los siguientes registros de representación: Algebraica: $\mathbb{N}$ ={1,2,3,…} y $\mathbb{Z}$ ={…,-3, -2, -1, 0, 1,2,3,…}, y gráfica (las rectas de los números naturales y enteros) (Figura 4):

Figura 4: *Representación gráfica de* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Z}$*.*
Fuente: Moreno, J., Roldán, D. y Romero, F**.** (2011). *Norma Matemáticas para pensar 11* (p. 12). Bogotá, Colombia: Carvajal Educación S.A.S.

En estos dos registros de representación se evidencian las siguientes problemáticas:

1) En el registro de representación algebraica se presenta en el conjunto de los números naturales su inicio desde 1, mientras que en la representación gráfica la recta de los números naturales empieza en 0, generando contradicción entre estos dos tipos de representaciones.
2) En el registro gráfico se presenta por parte de los autores del libro la semirrecta y la recta que representa los $\mathbb{N}$ y los $\mathbb{Z}$, lo que lleva a pensar a profesores y estudiante "que el número de enteros es el doble del número de naturales" (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 222); además, esta afirmación se fortalece cuando los profesores y estudiantes observan el registro gráfico y perciben que $\mathbb{N}$ tiene solo un verso hacia el infinito (positivo), mientras $\mathbb{Z}$ tiene dos versos hacia el infinito (uno positivo y uno negativo). Por lo tanto, $\mathbb{N}$ tiene más números que $\mathbb{Z}$, porque $\mathbb{N}$ tiene un infinito y $\mathbb{Z}$ tiene dos infinitos, argumento que no es válido y evidencia la problemática con este registro de representación.

Desde los elementos metafóricos se puede establecer la recta en este caso como la metáfora conceptual de la "gráfica de un camino", donde se establece en su esquema los siguiente elementos: origen o punto de partida (0 o menos infinito), un destino o punto final (más infinito), estar sobre el camino (en 1, 2, 3,.. o … -2, -1, 0, 1, 2, …), localización sobre el camino (1 o -2) y una ruta (serie de ubicaciones contiguas desde el origen hasta el destino).
Observamos dos tipos de situaciones con respecto a los puntos de inicio y fin del gráfico de los números naturales y de los números enteros con respecto al infinito. La primera se presenta cuando ya ha sido dibujado el gráfico de los números naturales y el de los números enteros (como los propuestos en los libros de texto), donde solo dibujan una parte de la recta y además le dejan al lector la interpretación en la recta numérica del infinito; por ejemplo, en la gráfica de la recta de los números enteros, se comienza en menos infinito y termina en más infinito, utilizando la flecha o los puntos suspensivos para sugerir que la recta continua en ambos sentidos, por lo tanto, ambos infinitos están fuera del gráfico dibujado.

La segunda situación se presenta cuando el docente dibuja un gráfico (en el tablero o con el software Cabri o Geogebra) generando una trayectoria con un punto desde el origen (0 o menos infinito) hasta que alcanza su punto final (más infinito), generando problemáticas con el concepto de la continuidad y nuevamente con el infinito en la recta numérica.

Si bien existen más problemáticas con los registros de representación y las metáforas en los libros de texto, solo se centró la atención en los anteriores análisis como una introducción a la falta de conciencia semiótica por parte de los autores de los libros de texto; los profesores se dejan conducir y guiar en la elección de las representaciones semióticas utilizadas para la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Resultados

Se identificaron y describieron (a partir de los constructos teóricos propuestos anteriormente) tres problemáticas en las representaciones de los conjuntos infinitos, que están relacionadas con: 1) el registro de la lengua natural y la representación auxiliar, 2) el registro algebraico y el registro gráfico y 3) el registro gráfico y el registro de la lengua natural; se debe destacar que estas problemáticas son novedosas en la literatura de didáctica de la matemática.

Con respecto a las metáforas, se identificaron y describieron las problemáticas en la metáfora *esquema de contenedor* y la metáfora conceptual *"gráfica de un camino"*. Estas problemáticas que se identificaron y describieron en las representaciones de los conjuntos infinitos y en las metáforas en los libros de texto, permitirán identificar algunas manifestaciones de la conciencia semiótica que se producen en el profesor al problematizarle su elección de representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje de los conjuntos infinitos. En la tesis doctoral se ampliarán estos análisis de las problemáticas semióticas de las representaciones de los conjuntos infinitos y las metáforas presentadas por el profesor en el aula de clase para dar respuesta a la pregunta de investigación doctoral.

Conclusiones

Los problemas que se presentan en las representaciones de los conjuntos infinitos apoyados algunas veces por las metáforas, aunque hayan sido evidenciados por las investigaciones en didáctica de la matemática, se siguen presentando en la enseñanza de los profesores que actualmente están en ejercicio y en formación. Por lo tanto, pensamos que se debe generar un cambio en la conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza de los conjuntos infinitos, teniendo en cuenta las metáforas.

El presente estudio proporciona, además, datos empíricos que demuestran que las metáforas conceptuales son herramientas relevantes para analizar no solo los libros de texto, sino el discurso matemático de los profesores en el aula, lo que contribuirá a una mejor comprensión de las representaciones de los conjuntos infinitos por parte de los estudiantes de secundaria y de universidad.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. (Tesis doctoral no publicada). Barcelona, España, Universitat de Barcelona.

Arrigo, G. y D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5-24.

Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá, Colombia: Magisterio].

D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. *11*, 63-71.

D'Amore, B. y Fandiño, Pinilla M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola. II edición 2016.

D'Amore, B., Fandiño, Pinilla M. I. y Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Dueñas, W., Garavito, A. y Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Educar.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(4), 385-414.

Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitive, 6*(5), 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: Radford L., Schubring G., Seeger E. (Eds) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers. 39-61.

Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. trad.). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, N.J: Erlbaum.

Fandiño Pinilla M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Fishbein, E., Tirosch, D. y Hess, P. (1979). "The intuitions of infinity". *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, *19*(2), pp. 95-128.

Font, V., Bolitte, J. y Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 131-152.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Moreno, L. y Walddeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, *22*(3), 211-231.

Moreno, J., Roldán, D. y Romero, F**.** (2011). *Norma Matemáticas para pensar 11*. Bogotá, Colombia: Carvajal Educación S.A.S.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME24*, vol.1 (pp. 3–22). Hiroshima: Hiroshima University.

Nuñez, R. y Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical cognition, 4*(2), 85-101.

Talmy, L. (2000). *Toward a cognitive semantics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell′infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matemática e la sua didattica*, *2*, 167-207.

Van Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. En A. J. Bishop & S. Melling Olsen (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 89-106). Dordrecht: Kluwer A. P.