NATURALEZA DINÁMICA DE LA VARIACIÓN EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL: SIMULACIÓN DIGITAL DE UN FENÓMENO FÍSICO CON PERSPECTIVA DE GÉNERO

DYNAMIC NATURE OF VARIATION IN THE DIFFERENTIAL EQUATION: DIGITAL SIMULATION OF A PHYSICAL PHENOMENON WITH A GENDER PERSPECTIVE

Brenda Carranza-Rogerio, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
brenda.carranza@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en curso, cuya motivación surgió de una problemática doble: la persistente desarticulación del currículo escolar en el Nivel Superior y la aún escasa presencia de las mujeres en carreras STEM. Se detalla la definición del problema de investigación a partir de la transversalidad de las ecuaciones diferenciales y la necesidad de atender su introducción. Se describen los fundamentos que permitieron perfilar una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial para rescatar el *carácter funcional* del saber, esencial para el diseño de una iniciativa *integradora* (en el sentido de interdisciplinariedad y de inclusión de género). Se muestran algunos ejemplos de cómo se abordó la hipótesis de investigación a través de un diseño en un ambiente digital y se comparten las primeras reflexiones respecto al *valor pragmático* y *epistémico* del ambiente en la correspondencia de la naturaleza dinámica de la noción con las *representaciones dinámicas* del fenómeno físico asociado a través de *estrategias dinámicas*.

Palabras clave: naturaleza dinámica, variación, ecuación diferencial, STEM, género

Abstract

Here are presented the advances of an ongoing investigation whose motivation arose from a twofold issue: the persistent disarticulation of higher education curriculum and the still scarce presence of women in STEM careers. The definition of the research problem is detailed based on the transversality of the differential equations and the need to address their introduction. The theoretical foundations that led to outline a *dynamic nature* of the variation in the differential equation for regaining the *functional character* of knowledge are also described, as this character is assumed essential for the design of an *integrative* initiative (in the sense of interdisciplinarity and of gender inclusion). Some examples of how the research hypothesis was addressed via a design in a digital environment are shared, as well as the first reflections on the *pragmatic* and *epistemic value* of the environment in the correspondence of the dynamic nature of the notion with the *dynamic representations* of the associated physical phenomenon via *dynamic strategies*.

Key words: dynamic nature, variation, differential equation, STEM, gender

Introducción

Se presentan los avances de una investigación en curso, cuya motivación surgió de una problemática doble: (1) la persistente desarticulación del currículo escolar en el Nivel Superior (universitario) y (2) la aún escasa presencia de las mujeres en carreras del área de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés).

El primero de dichos fenómenos, además de estar reportado en investigaciones nacionales (Hernández, 1995) e internacionales (Marciuc y Miron, 2014; Roth, 2014), se puede apreciar en la propia estructura del plan de estudios de algunas universidades mexicanas. Como ejemplo está el de la universidad de la cual provenían las y los participantes de la fase empírica de la investigación: para el primer semestre se contempla la asignatura de Física I y, para el segundo, la de Ecuaciones Diferenciales; sin embargo, consultado un libro (Halliday, Resnick y Walker, 2009) de la bibliografía básica recomendada para el curso inicial de física, se observa, desde el segundo capítulo, una concepción *diferencial* de la velocidad y de la aceleración, así como la necesidad (implícita) de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales para deducir las fórmulas correspondientes al movimiento con aceleración constante. Más aún, para el momento en que esto es abordado, en el curso de Cálculo I (de primer semestre) todavía no se ha tratado el tema de la derivada.

Respecto a la baja presencia de mujeres en carreras STEM, más allá de equilibrar en términos numéricos la desigual distribución por sexo de la matrícula (41.8% de mujeres en *ciencias exactas y naturales* y 26.8% en *ingeniería y tecnología* en el año escolar 2012-2013, de acuerdo con Zubieta y Herzig, 2016, p. 161), se plantea la necesidad de conformar *espacios inclusivos* para el desarrollo académico de las mujeres (Dasgupta y Stout, 2014; Master y Meltzoff, 2016) y, más aún, de propiciar su inclusión desde el propio tratamiento matemático, por ejemplo, atendiendo el *carácter funcional del saber* (Farfán y Simón, 2016).

A partir de lo anterior, se comenzó a perfilar un problema de investigación que permitiera abordar la problemática desde un enfoque *integrador* de la Matemática Educativa, tanto en el sentido *interdisciplinario* que propone Sanders (2009), como en el sentido de *inclusión* para la democratización del aprendizaje (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014; Roschelle y Hegedus, 2013).

El problema de investigación se precisó entonces tras realizar un análisis general de los programas de estudio de las carreras STEM de una institución pública mexicana. A través de él fue posible identificar a las ecuaciones diferenciales como un elemento *transversal* en dicha área: *horizontalmente*, al estar presente en la mayoría de las carreras, y *verticalmente*, al retomarse en diversas asignaturas de distinto nivel en una misma carrera.

Con base en tal observación se llevó a cabo una revisión inicial de literatura (Carranza-Rogerio y Farfán, 2018) que permitió identificar *tendencias* en investigación respecto al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (ordinarias): el estudio de *fenómenos físicos* (para la contextualización), el uso de *tecnología* (para la simulación o el análisis de datos) y la *modelación* matemática (para la matematización de dichos fenómenos); comunes en varios estudios, con mayor o menor énfasis dependiendo del enfoque del cual partieran.

Etapas posteriores de revisión y análisis condujeron a la identificación de un aspecto adicional que hizo posible acotar el problema de investigación: si bien la literatura era amplia entorno al tratamiento de las ecuaciones diferenciales, poco se hablaba de su *introducción*. Así, se decidió abordar esta etapa tomando en cuenta las tendencias antes señaladas.

En las secciones subsecuentes se describe el desarrollo que ha seguido la investigación hasta el momento: inicialmente, los fundamentos que permitieron perfilar una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial –con base en la cual se identificaron pautas para la concepción de una *evolución pragmática* de su construcción que contemplara el uso de *estrategias dinámicas* (asociadas a las representaciones dinámicas de un fenómeno de variación) además de *estrategias variacionales* (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017)–; seguidamente, la hipótesis epistemológica de investigación, fruto del análisis de los fundamentos descritos; posteriormente, la manera en la cual este supuesto puede ser explorado a través de un diseño en un ambiente digital; luego, a grandes rasgos, el proceso de implementación del diseño (fase empírica de la investigación y etapa más actual en el desarrollo del estudio) con la perspectiva de género integrada; y, para cerrar, las primeras reflexiones respecto al *valor pragmático* y *epistémico* del ambiente digital en la correspondencia de la *naturaleza dinámica* de la noción con las *representaciones dinámicas* del fenómeno físico asociado a través de *estrategias dinámicas*.

Tsme, stem y género

Por un lado, se reconoce la formación de competencias transversales como un objetivo clave en la reconstrucción del currículo que demandan los cambios estructurales de la sociedad del siglo XXI (Marciuc y Miron, 2014). Por otro lado, en lo que respecta al *género* (entendiéndolo como una construcción social, distinta de *sexo* que alude a lo biológico), Dasgupta y Stout (2014) señalan la importancia de la *sensación de pertenencia* de las mujeres en el área STEM, pues se ha demostrado que aquellas que creen en visiones estereotipadas ven mermado su desempeño (p. 24). Ante ello, Master y Meltzoff (2016) proponen: diseñar espacios de aprendizaje neutros (sin objetos estereotípicos); hacer énfasis en que las habilidades requeridas en el área STEM son maleables; remarcar que las carreras STEM involucran trabajo colaborativo; así como mostrar modelos de rol (mujeres o no) diferentes al estereotipo y con quienes puedan identificarse de algún modo (p. 227).

Asimismo, la *exclusión* de las mujeres y otros *grupos minoritarios* (en cantidad o en representatividad) es un fenómeno que se puede abordar desde el propio *discurso matemático escolar*: la cultura del salón –e incluso el contenido matemático– es una propiedad emergente construida conjuntamente por quienes participan en su construcción, principalmente, a través del *discurso* (Pierson-Bishop, 2013, p. 234); sin embargo, este discurso suele ser hegemónico y utilitario (Soto y Cantoral, 2014), limitando el acceso del alumnado al aprendizaje.

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se sugiere rediseñar dicho discurso considerando al *saber* cómo conocimiento puesto en uso, aunado a "una visión crítica, solidaria y humanista de la sociedad del conocimiento" (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 112). Esto es congruente con la perspectiva de Roschelle y Hegedus (2013) sobre el *acceso democrático* al aprendizaje, pues lo abordan en tres sentidos: en cuanto al filtro de grupos privilegiados; con relación a sus implicaciones en la participación ciudadana; y al ver en las representaciones dinámicas una oportunidad para crear notaciones más accesibles hacia las matemáticas del cambio y la variación (p. 7).

En el caso de las mujeres, el carácter utilitario del discurso "no solamente las excluye de la construcción del conocimiento matemático, sino que […] no es suficiente para despertar su interés en matemáticas o para cumplir sus expectativas" (Farfán y Simón, 2016, p. 182), pues se ha identificado que sus respuestas, inferencias y argumentaciones toman en cuenta una gran cantidad de variables *funcionales* relacionadas con el fenómeno específico (p. 181).

En consecuencia, se determinó que el diseño habría de conceder un papel central a este carácter funcional del saber. Al respecto, Mendoza y Cordero (2012), quienes estudian los usos de las ecuaciones diferenciales y de la modelación en una comunidad de ingenieros en formación, reportan que no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional pues se busca explicar la matemática desde ella misma, "soslayando otros campos, […] desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento" (p. 1023).

A partir de estas condiciones, se decidió abordar el problema *desde* la Matemática Educativa a través de una visión *socioepistemológica*, pues ella plantea constructos teóricos que atienden la transversalidad de la dimensión *sociocultural* del aprendizaje en consonancia con sus dimensiones *didáctica*, *cognitiva* y *epistemológica*. A su vez, las preocupaciones de esta perspectiva coinciden con las de un enfoque integrador de la educación STEM:

Se postula [en el caso del cálculo] como objetivo al análisis de los *procesos de construcción del conocimiento matemático* cuando estos se guiaron por la *transversalidad* del pensamiento físico, ámbito de *significación* progresiva cuyo *valor epistémico* se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. (Cantoral, 2013, p. 102)

El remarcar que el problema se aborda *desde* esta disciplina responde al carácter *interdisciplinario* de la iniciativa. Como Roth (2014) señala, uno de los problemas que suele enfrentar la interdisciplinariedad es que las matemáticas son consideradas como una disciplina *de servicio*. La consecuencia de esta concepción es que, dado que las intenciones curriculares de las demás materias son diferentes a las de las matemáticas, se producen tensiones acerca de dónde hacer énfasis en las iniciativas interdisciplinarias (p. 317).

Si bien la investigación parte de un objetivo para el aprendizaje *en* matemáticas, la consideración anterior devino en reconocer la necesidad de delimitar los conceptos físicos que intervendrían en el proceso, puesto que se buscaba rescatar el carácter funcional del saber a través del estudio de un fenómeno físico. A su vez, dado que la comunidad objetivo estaba conformada por estudiantes de una carrera fisicomatemática, se asumió importante el establecer los inicios de un puente entre las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales y Física.

Contexto y práctica de referencia

Desde el *constructivismo social*, Simon (1995) propone una articulación alrededor de diversas nociones que abordan la contextualización. De manera particular, alude a que el objetivo es proponer una situación de aprendizaje en la cual el alumnado busque una respuesta al *milieu*, en lugar de una que solo busque satisfacer a quien enseña (p. 120).

Desde la TSME, Reyes-Gasperini (2016) identifica dos contextos que rigen a las interacciones didácticas: el *contexto situacional* y el *de significancia*. "El primero, refiere a la manera de contextualizar la tarea y, el segundo, la manera de contextualizar la construcción de conocimiento matemático (basado en objetos o en prácticas)" (p. 58). La investigadora añade que "las *prácticas de referencia* están inmersas en el *contexto de significancia* mientras que los marcos de referencia podrían relacionarse con el *contexto situacional*" (p. 58).

La noción de *práctica de referencia* fue introducida por Farfán (2012) con base en la matematización del estado estacionario a partir de fenómenos propios de la ingeniería. En el caso de la ecuación diferencial, al estar epistemológicamente correlacionada con el desarrollo del cálculo –*fluxional*– (Hernández, 1995), comparte con éste prácticas de referencia. Cantoral (2013) señala que la teoría de fluxiones fue la herramienta mediante la cual se puso en uso el conocimiento –matematizando el cambio instantáneo–, dando pie al nacimiento de un saber con práctica de referencia específica: la cinemática y la dinámica (pp. 125-126).

Estas dos ramas de la física se diferencian en que la *cinemática* describe el movimiento de objetos, su comparación y clasificación, independientemente de sus causas; mientras que la *dinámica*, para el caso de movimiento, busca describir su evolución con respecto al tiempo y con relación a las causas que lo originan. Para definir las características que se retomarían a partir de estas prácticas de referencia para apoyar la introducción de la ecuación diferencial ordinaria, se retomaron los trabajos de Arrieta (2003) y Arthur (1995).

Por un lado, la *figuración de las cualidades* de Oresme –que retoma Arrieta (2003)–permite establecer un puente entre las descripciones *cinemáticas* de los miembros del Merton College y el análisis *dinámico* de Galileo mediante una caracterización gráfica del movimiento independiente a la utilización de ejes coordenados graduados, pero con una patente asociación funcional de correspondencia entre la "cualidad" (velocidad) y el tiempo. En particular, Suárez (2014) retoma esta figuración para estudiar el uso de gráficas en la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas (p. 97).

Por otro lado, Arthur (1995) provee un indicio a partir del análisis de lo *fluxional* para la visión newtoniana, pues señala que ésta contenía inmersa una concepción *absoluta* del tiempo como referente inmutable con respecto al cual se cuantificaba el cambio, ya que el considerar *fluentes* (cantidades que fluyen) presupone la existencia de un *flujo* temporal cuya magnitud no aumenta ni disminuye; a su vez, asumir que con él se generan *todas* las cantidades, permite *comparar* las tasas (*fluxiones*) a las cuales cambian (p. 334). A partir de este relativismo con respecto al tiempo, se vislumbró una *naturaleza dinámica* en la variación.

Ahora bien, en términos generales, la ecuación diferencial ordinaria se caracteriza por tres aspectos: (a) en ella aparece al menos una *derivada* (como función o como cociente de diferenciales) de la función a analizar; (b) a través de ella es posible *relacionar* una o más derivadas de diferente orden y la propia función; (c) su solución es de tipo funcional y depende de condiciones particulares (llamadas *condiciones iniciales*) del fenómeno descrito.

No obstante, en el discurso usual –observable a través de los libros de texto (Hernández, 1995)– solo el primero suele ser explícito, aunque se omiten explicaciones sobre la notación (Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017). El segundo suele sugerirse en términos *utilitarios* conforme se incorporan marcos de referencia reales. Y el tercero suele responder más a las demandas algebraicas del planteamiento ("dadas las condiciones iniciales, hallar la solución particular …") que a cuestiones asociadas al contexto (Buendía y García, 2002).

Por ende, para abordar tales aspectos en una introducción a la ecuación diferencial, se propone rescatar el análisis cinemático y dinámico del movimiento. En esta labor, se plantea retomar las *estrategias variacionales* propuestas por Caballero-Pérez y Cantoral (2017), las cuales "deja[n] ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación" (p. 1060) y consisten en: la *comparación* (cuantificación del cambio), la *seriación* (conjunto de comparaciones sucesivas), la *estimación* y la *predicción*. Asimismo, dos nociones que retoman los autores de la psicogenética: la *causalidad* y la *temporalización*, donde la primera implica reconocer que, entre todas las posibles variables que intervienen en un fenómeno, existen algunas que se pueden relacionar entre sí; mientras que la segunda conlleva reconocer los estados intermedios de un fenómeno (Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018). Y, transversal a ello, la consideración de un *sistema de referencia* (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017) para "organizar" la variación del fenómeno mediante cuatro elementos: *variables* (¿qué cambia?), *unidades de referencia* (¿respecto de qué cambia?), *unidad de medida* (¿cuánto cambia?) y *temporización* (¿cómo cambia?).

En cuanto a las condiciones iniciales, se retoman los hallazgos de Buendía y García (2002) que parten de observar gráficamente que, en el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden, la familia de soluciones se conforma por curvas que no se cruzan entre ellas, por lo que, para determinar una solución particular, basta con *una* condición inicial que indique un punto por el cual pasa la curva. En el caso de las de segundo orden, al observar que varias curvas solución se pueden intersecar en un mismo punto, se hace necesario saber además de qué manera pasa la solución particular por él, lo cual se obtiene con una *segunda* condición inicial (p. 112). Asimismo, abordar esto mediante la *modelación* de un fenómeno físico permite articular los diferentes significados contextuales de las condiciones iniciales para una resignificación de la relación entre el orden de una ecuación y su número de condiciones iniciales necesarias (Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar, 2016, p. 116).

Respecto a la modelación, se retoma la concepción de Arrieta y Díaz (2015), quienes la definen como "una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo" (p. 35). La modelación de un fenómeno puede abordarse desde la experimentación, ya sea presencial, discursiva o *virtual* (Arrieta y Díaz, 2016); esta última comprende la *simulación* en ambientes digitales a través de animaciones interactivas, la cual se postula como un elemento que permite fusionar la modelación con las tecnologías digitales para vincular hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016). En general, se prefiere el término "digital" al "virtual", pues lo *virtual* posee la connotación de *algo no real* y en este tipo de ambientes se puede tener un soporte *concreto* significativo para el alumnado, que resulta ser incluso más limpio, flexible y extensible que su contraparte física (Sarama y Clements, 2016, p. 73).

Por otro lado, se postula que la propia naturaleza dinámica de la variación en la ecuación diferencial se encuentra intrínsecamente relacionada con las representaciones dinámicas que permite un software de matemática dinámica, como el software libre GeoGebra. Al respecto, Parada, Conde y Fiallo (2016) señalan que, en este ambiente, "todas estas variaciones se pueden representar *en movimiento*" (p. 1035) con lo cual se potencia la visualización de *variantes* e *invariantes* y, por ende, "involucra al concepto de *función* como la generalización de la *interdependencia* entre magnitudes variables" (pp. 1035-1036). Así, se plantea que la propia herramienta permite acceder a cualidades del objeto matemático mediante *estrategias dinámicas* en cuyo proceso se reconoce –además de un *valor pragmático*– un *valor epistémico* (Artigue, 2002) asociado a su naturaleza.

Con base en todo lo anterior, se planteó la siguiente hipótesis epistemológica: *la noción de variación en la ecuación diferencial surge de modelar un fenómeno como el movimiento a partir de su naturaleza dinámica*.

Diseño para la fase empírica

A continuación, se presentan algunos de los elementos del diseño elaborado para mostrar ejemplos sobre cómo se abordó la hipótesis con base en las consideraciones descritas. En términos generales, el diseño se basa en la observación de la caída del agua.

Inicialmente, se muestra la caída simultánea de tres gotas de agua con velocidades iniciales diferentes (Imagen 1). En el applet, además de los controles de la animación, aparecen dos deslizadores: tiempo y "paso del tiempo". Cuando se inicia la animación, se muestra la caída de las gotas de agua y el tiempo transcurrido.

Se cuestiona entonces cuál de las tres gotas ha caído más rápidamente y las razones posibles de la diferencia en las caídas (origen del movimiento: *causalidad*).

Dado que la programación se hizo de tal manera que se simulara el tiempo real de caída, la percepción de la diferencia se torna complicada pues los desplazamientos son muy rápidos. En ello entran en juego los deslizadores. Con el primero, es posible observar la posición de las gotas en cada momento; no obstante, difícilmente se logra un transcurso temporal uniforme mediante el desplazamiento manual del cursor. Para ello, el segundo, al permitir *ralentizar* el tiempo, tiene una implicación directa en el estudio del *comportamiento* del fenómeno, pues permite apreciar la dinámica de las variables de manera continua.

Imagen 1: Escenas de la caída de tres gotas de agua (izquierda) y deslizadores (derecha) del applet.

Más adelante en el diseño, se muestra la unión de estas tres escenas de manera vertical (hasta arriba la de la izquierda, en medio la del centro y hasta abajo la de la derecha), lo cual evidencia que las escenas corresponden a diferentes intervalos en la caída de una misma gota.

En seguida, se cuestiona sobre el comportamiento de la caída si la primera escena se subdividiera en más y más partes (*temporalización*).

Otro momento del diseño plantea el análisis de la caída del agua en una cascada artificial (agua regulada que proyecta figuras, Imagen 2 – izquierda) a partir de un video. Después, se muestra una simulación del fenómeno (Imagen 2 – derecha) para ser analizada posteriormente de forma gráfica y numérica mediante estrategias variacionales.

***Imagen 2*: Escena de la cascada artificial (izquierda) y escena de la simulación digital interactiva (derecha).**

Luego de una exploración cualitativa de la caída del agua, se aborda la *comparación* y *seriación* de forma numérica mediante una hoja de cálculo integrada a la interfaz del ambiente y se cuestiona sobre el comportamiento de las diferencias. Seguidamente, se muestran las diferencias gráficamente (Imagen 3 – izquierda) con un primer botón y, con un segundo botón, se muestra una animación de su desplazamiento hacia la parte inferior de la pantalla con sus extremos superiores alineados (Imagen 3 – derecha).

***Imagen 3*: Diferencias gráficas (izquierda) y diferencias alineadas en acercamiento (derecha).**

Se propone entonces mover el deslizador de tiempo para explorar qué ocurre con el *comportamiento* de estas diferencias alineadas (lo *variante* e *invariante*).

El diseño continúa con la construcción de las gráficas de posición, velocidad y aceleración (analizando su correlación) y una introducción a la notación. Transversalmente, se aborda la necesidad de las *condiciones iniciales* para deducir aspectos particulares del fenómeno. Por ejemplo, en el cierre del diseño, se busca explorar dicha necesidad con relación al número de condiciones requeridas para el orden de la ecuación.

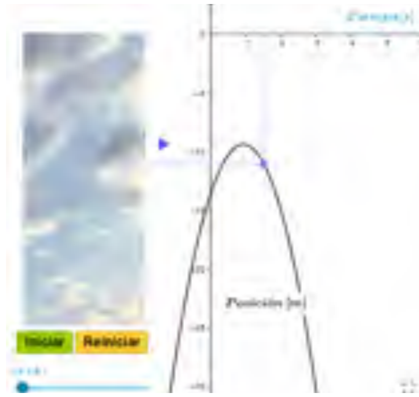

Imagen 3: Applet con animación de la caída de la gota y la gráfica de su posición respecto al tiempo (móvil).

Se presenta primero el applet de la Imagen 3 sin los controles de animación, es decir, solo se puede ver de forma estática la escena de la caída. Entonces, se cuestiona sobre la ubicación correspondiente de la gráfica de la posición de la gota (parábola en color negro). Esta gráfica se puede arrastrar hacia cualquier lugar en el plano y la única información disponible es la altura de la gota en un cierto tiempo (punto azul).

Para explorar la *estimación* producto de la exploración anterior, se presenta el applet de la Imagen 3 –con los controles de animación– de tal manera que la/el estudiante tenga la posibilidad de ver la simulación de la caída y la correspondiente trayectoria del punto azul.

Implementación

En la fase empírica del diseño participaron tres mujeres y ocho hombres de una carrera fisicomatemática, que acababan de cursar Cálculo I y que se encontraban próximas y próximos a cursar Ecuaciones Diferenciales.

La implementación consistió en una introducción de la actividad, la resolución del diseño en línea (en un *Libro GeoGebra* dentro de un *Grupo GeoGebra*) por parte del alumnado, una charla informal respecto a sus experiencias escolares y una socialización de las conclusiones emanadas de la resolución del diseño. Para este último momento, dado que el *Grupo* permite un seguimiento en tiempo real de las respuestas del alumnado, se seleccionaron algunas sobre ciertos puntos de interés para propiciar y mediar la discusión grupal; en este aspecto, se procuró visibilizar y promover activamente la participación de las mujeres al considerar en cada punto respuestas de ellas. Aunado a ello, se les solicitó resolver una encuesta en línea (Hinojos y Torres-Corrales, 2018) basada en la obra de Farfán y Simón (2016) respecto al entorno sociocultural de las y los participantes.

Para el registro de datos se empleó un cuaderno de notas y se grabó en audio y video todo el proceso; asimismo, las respuestas escritas quedaron registradas en la plataforma de GeoGebra y la pantalla de cada quién fue grabada para observar posteriormente sus exploraciones dinámicas. Además, se consideró la colaboración de un observador externo. Todo lo anterior fue con la autorización previa de quienes participaron.

Primeras reflexiones

En particular, se definen dos acepciones de lo dinámico: con respecto a la relación de variables (*estrategias dinámicas*) y con respecto a las transformaciones de los objetos (*acciones dinámicas*). La primera alude a la *naturaleza dinámica* de la variación, mientras que la segunda se refiere al movimiento en ambientes dinámicos (como traslaciones o rotaciones).

En el caso de los usos descritos anteriormente de los deslizadores, se identifica un *valor epistémico* del instrumento, en cuanto tales acciones instrumentadas promueven el planteamiento de preguntas respecto al conocimiento matemático involucrado (Artigue, 2002). La *estrategia dinámica* emerge entonces en el uso del instrumento con una intención particular en el análisis de fenómenos de variación. Por ejemplo, al regular el paso de tiempo para explorar la cinemática en la caída simultánea de las tres gotas de agua y al mover el deslizador de tiempo para explorar la dinámica en el comportamiento de las diferencias.

Asimismo, el permitir el arrastre libre en el applet de cierre (que en principio es una *acción dinámica*) propicia el surgimiento de una *estrategia dinámica* al promover que se identifique que, además de la altura de la gota en un cierto tiempo (un punto: $y(t_0)$), se requiere saber qué velocidad lleva la gota en ese momento (cualidad de la gráfica: $y'(t_0)$). De ahí que, si bien la acción dinámica tiene más que ver con el valor pragmático del instrumento, puede a su vez posibilitar la exploración con estrategias dinámicas que permitan acceder a su valor epistémico.

En general, se identifica que, si bien la variación posee una *naturaleza dinámica* asociada a un cambio continuo y uniforme del tiempo, para describirla se recurre a aproximaciones discretas, pero que se pueden explorar dinámicamente.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). Lo lineal y su otredad. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: Matemática Educativa* (pp. 17-57). Barcelona, España: Gedisa.

Arthur, R. (1995). Newton's fluxions and equably flowing time. *Studies in History and Philosophy of Science*, *26*(2), 323-351.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Buendía, G. y García, C. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15*(1), 109-114. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 1057-1065.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 50*(1-2), 77-89.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, J. y Zaldívar, D. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales: Una argumentación gráfica*. Barcelona, España: Gedisa.

Carranza-Rogerio, B. y Farfán, R. (2018). Ecuaciones diferenciales: Tecnología digital y fenómenos físicos con perspectiva de género. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1852-1859.

Dasgupta, N. y Stout, J. (2014). Girls and women in science, technology, engineering, and mathematics: STEMing the tide and broadening participation in STEM careers. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *1*(1), 21-29.

Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

Farfán, R y Simón, G. (2016). *La construcción social del conocimiento: El caso de género y matemáticas*. Barcelona, España: Gedisa.

Halliday, D., Resnick, R. y Walker, J. (2009). *Fundamentos de Física* (Vol. 1, 8ª ed.). Ciudad de México: Grupo Editorial Patria.

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinaras*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Hinojos, J. y Torres-Corrales, D. (2018). *Encuesta del entorno sociocultural del estudiante de ingeniería*. Recuperado el 23 de junio de 2018 de https://goo.gl/forms/pTbE9yiFgHoYzaxo2

Marciuc, D. y Miron, C. (2014). Technology integration of GeoGebra software in interdisciplinary teaching. En I. Roceanu (Ed.), *Proceedings of the 10th international scientific conference "eLearning and Software for Education"* (Vol. 3, pp. 280-287). Bucharest, Rumania: Editura Universitatii Nationale de Aparare "Carol I".

Master, A. y Meltzoff, A. (2016). Building bridges between psychological science and education: Cultural stereotypes, STEM, and equity. *Prospects*, *46*(2), 215-234.

Martínez, A., Pluvinage, F. y Montaño, L. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El cálculo y su enseñanza, enseñanza de las ciencias y la matemática*, *8*, 1-17.

Mendoza, J. y Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 1023-1030. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parada, S. E., Conde, L. A. y Fiallo, J. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: Una aproximación al estudio de la variación. *Bolema*, *30*(56), 1031-1051.

Pierson-Bishop, J. (2013). Mathematical discourse as a process that mediates learning in SimCalc classrooms. En S. J. Hegedus y J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions* (pp. 233-249). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Roschelle, J. y Hegedus, S. (2013). Introduction: Major themes, technologies, and timeline. En S. Hegedus y J. Roschelle, *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 5-11). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa.

Roth, W. M. (2014). Interdisciplinary approaches in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 317-320). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Rubio, L., Prieto, J. y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *2*, 90-111.

Sanders, M. (2009). STEM, STEM Education, STEMmania. *The Technology Teacher*, *68*(4), 20-26.

Sarama, J. y Clements, D. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? En P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 71-93). Suiza: Springer.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525-1544.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ciudad de México: Díaz de Santos.

Zubieta, J. y Herzig, M. (2016). *Participación de las mujeres y niñas en la educación nacional y en el sistema de ciencia, tecnología e innovación en México: Evaluación nacional con base en el marco de indicadores de equidad de género en la sociedad del conocimiento*. Ciudad de México: WISAT-Conacyt.