

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL DE ESTUDIANTES CON DIVERSIDAD FUNCIONAL VISUAL. EL CASO DE LA SUMA

MENTAL ARITHMETIC STRATEGIES USED IN STUDENTS WITH VISUAL-FUNCTIONAL DIVERSITY. THE CASE OF ADDITION

Jaime Fonseca González, Angélica Rodríguez Rojas, Yeni Marcela Sánchez Laiton
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jaimejaimef@hotmail.com, anitacely.88311@gmail.com, jeniuz.sa.la@gmail.com

Resumen

Durante el apoyo al aprendizaje de las matemáticas de estudiantes en condición de diversidad funcional visual se identificó la constante realización de cálculos mentales en diferentes tareas matemáticas. Las estrategias empleadas por este grupo poblacional no han sido documentadas, por lo que se realizó un estudio cualitativo-descriptivo con método de estudio de caso y una entrevista semi-estructurada para recolectar información sobre de las estrategias de cálculo mental para sumas de estudiantes con ceguera total de nacimiento. Se presentan resultados para los casos que incluyen diagnóstico de déficit cognitivo leve; en ellos se encuentra que la representación mental del número es basada en el ábaco ruso; las estrategias de cálculo mental empleadas son artificios por columnas articulada recuento o hechos numéricos conocidos y la estrategia descomposición disociativa por descabezamiento cuando un sumando es un número natural entre 10 y 39.

Palabras clave: diversidad funcional visual, cálculo mental

Abstract

We identified permanent mental arithmetic in different mathematical assignments along math learning support in visual-functional diversity students. Because the strategies used by the population have not been documented, we made a qualitative-descriptive analysis through the method of case study and applied a semi-structured interview to collect data about mental arithmetic strategies for addition in blind-born students. We present outcomes for the cases involving diagnosis of minor-cognitive impairment students, where the mental representation of the number is based on the Russian abacus; the mental arithmetic strategies used are: appliances by summarized articulated columns or known numerical facts, and the dissociative decomposition strategy by decomposition when an addend is a natural number between 10 and 39.

Key words: visual-functional diversity, mental arithmetic

■ Introducción

Una institución de educación básica y media de Bogotá - Colombia - asumió el objetivo de desarrollar procesos de educación inclusiva. Para apoyar este objetivo de la institución y formar profesores de matemáticas inclusivos, un programa de formación inicial de profesores desarrolla trabajos de grado en modalidad de pasantía con sus estudiantes. Los pasantes notaron la excelente habilidad de cálculo mental de los estudiantes con diversidad funcional visual en todas las tareas matemáticas que realizan. Sin embargo, el currículo tradicional los obliga a emplear el ábaco y el sorobán como recursos para la realización de cálculos. Ante esta obligación, se notaba apatía de los estudiantes a los recursos y el privilegio del cálculo mental, con el que hacen creer al profesor que dominan los recursos. Con el objetivo de modificar esta práctica de enseñanza y sugerir una modificación al currículo se hizo necesario estudiar las estrategias de cálculo mental de los estudiantes en condición de diversidad funcional visual y se inició por la suma de número naturales.

Al realizar una revisión de literatura sobre cálculo mental en poblaciones diversas, se empleó google académico con los criterios de búsqueda: “cálculo mental” como frase exacta en el título de la publicación, delimitada en el periodo de 1990 a 2018 a los idiomas castellano y portugués. Se encuentran los estudios de Albanese, Adamuz y Bracho (2016) sobre algoritmos de cálculo mental empleados en integrantes de la comunidad gitana con el fin de adoptarlos en la enseñanza de las matemáticas en centros educativos con alta afluencia de esta comunidad; Palacio, Ramírez y Aroca (2016) en el que hacen un estudio sobre estrategias de cálculo de vendedores ambulantes con las que se permiten diseñar intervenciones de aula; Linhares de Mattos (2015) se presenta un estudio de caso sobre el cálculo mental de personas adultas de una comunidad de pescadores de Portugal; Soares y Mariani (2012) en el que analizan un programa de alfabetización para jóvenes y adultos sobre el número natural y las operaciones aritméticas en el reflexionan sobre la habilidad cálculo mental de los participantes y su papel en el desarrollo del programa; Velásquez y del Rio (2016) implementan una estrategia didáctica para la inclusión de estudiantes sordos empleando un enfoque visual. En la revisión de literatura no encontraron investigaciones o estudios sobre cálculo mental en estudiantes o personas con diversidad funcional visual, lo que justifica la pertinencia de este estudio.

■ Indagación bibliográfica

El cálculo mental se entiende como “una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel y lápiz, y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón y Vázquez, 1995, p. 93). En el caso de las personas con diversidad funcional visual, su habilidad para calcular mentalmente ha sido destacada por Fernández del Campo, Núñez y Rosich (1996) cuando afirman que “El alumno ciego parece tener una cierta propensión al cálculo mental” (p. 202). Según Fernández del Campo (2004), esta habilidad es consecuencia de las dificultades instrumentales del cálculo escrito y la mayor complejidad que el uso de instrumentos específicos de cálculo trae para el estudiante. Así, la inclusión de esta habilidad en el currículo propende por la equidad y la eliminación de barreras que el cálculo escrito impone a los estudiantes con diversidad funcional visual.

En cuanto a las estrategias de cálculo mental para las operaciones aritméticas, Gómez (1994) propone una clasificación en cuatro grandes clases:

- 1) Artificios. Incluye aquellos métodos de cálculo en los cuales los números son operado tomando hechos aislados y no las relaciones que las unen o que unen las cifras. Esta estrategia contiene tres subclases de estrategias:
 - a) Columnas. Es la estrategia de ejecutar con la mente el algoritmo usual de lápiz y papel o alguna variación de este; así, el cálculo se efectúa por columnas, obteniendo resultados parciales.

- b) Reglas. Es la estrategia consiste en aplicar algún algoritmo de cálculo proveniente de la aritmética antigua y no el algoritmo usual de lápiz y papel.
 - c) Fórmulas. Esta estrategia incluye el uso de igualdades algebraicas, fórmulas o generalizaciones numéricas conocidas para la realización de cálculos.
- 2) Descomposiciones. Esta estrategia recopila métodos de cálculo mental en los cuales las cantidades se dotan de significado numérico y relacional para expresarlas en relación con otras más pequeñas que son operadas para calcular el resultado. Según el tipo de relación operativa en que se haga la descomposición, la estrategia puede ser de dos subclases:
- a) Disociativas. Cuando la descomposición de uno o ambos datos es por suma. Esta categoría se subdivide en las estrategias de:
 - i. Descabezamiento. Consiste en separar las cantidades según su valor posicional en base 10 y operar según el orden de la unidad.
 - ii. Subsidiación. Consiste descomponer una de las cantidades en función de la otra.
 - b) Factoriales. Cuando la descomposición de por la multiplicación.
- 3) Compensación. Alberga aquellas estrategias en los que el cálculo dado es alterado por otro en el que las cantidades son distintas a las dadas, pero que facilitan el cálculo, de modo que el incremento o reducción se corrige posteriormente. Se distinguen dos tipos de estrategias de compensación:
- a) Compensaciones Intermedias. Cuando el incremento o reducción se corrige operando sobre el otro dato.
 - b) Compensaciones finales. Cuando el incremento o reducción se corrige operando sobre el resultado final.
- 4) Recuentos. Esta clase cubre aquellas estrategias en las que el cálculo se realiza por el conteo en sucesiones numéricas.

■ Método

Es un estudio cualitativo descriptivo con método de estudio de caso. La recolección de información se realizó con técnica de entrevista. La selección de la muestra se realizó con la técnica de participantes voluntarios. El criterio de inclusión fue ser estudiante de educación básica con ceguera total. La muestra observada fueron cinco estudiantes con diversidad funcional visual, de los cuales uno perdió la vista a los siete años, dos nacieron con ceguera total y tienen diagnóstico de déficit cognitivo leve, y dos con ceguera total de nacimiento sin déficit cognitivo.

El instrumento de recolección de información fue una entrevista semi-estructurada con cálculos de sumas de cuatro tipos: dos sumandos de dos dígitos; el primer sumando con tres dígitos y el segundo con dos; el primer sumando con dos dígitos y el segundo con tres; y dos sumandos de tres dígitos. A su vez, las sumas se clasifican según la cantidad de cambios de unidad que requiere el cálculo, por lo que pueden ir desde ninguno hasta tres cambios. Los cambios de unidad se consideran desde la combinación de dígitos clasificados en cuatro conjuntos $C1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $C2 = \{4, 5, 6\}$, $C3 = \{7\}$ y $C4 = \{8, 9\}$, ante la hipótesis de que estos a aparición de estos dígitos provocan estrategias de cálculo diferentes. La entrevista se aplicó en un ambiente de laboratorio con previa aprobación y consentimiento informado de los padres.

■ Resultados

Para este artículo se presentan los resultados de dos casos de estudiantes con ceguera total de nacimiento y diagnóstico de déficit cognitivo leve. Se trata de dos niñas que cursan grados de sexto y undécimo, con edades de 14 y 22 años, respectivamente. La primera inició su escolaridad en centro especializado de educación para ciegos y hacia los 8 años continuó en centro educativo convencional, mientras que la segunda inició sus estudios a una edad mayor de lo esperado ante la ausencia de una institución educativa inclusiva cercana a su lugar de domicilio. Las estrategias de cálculo mental identificadas se presentan según el tipo de suma, segregando por la cantidad cambios de unidad.

En general las estrategias de cálculo mental para adiciones empleadas por estas estudiantes no dependen de la cantidad de cambios de unidad o la cantidad de dígitos de los sumandos, pues siguen la estrategia de artificios en el método de columnas. La representación de los números es con del ábaco ruso cerrado, en el que cada columna tiene 10 cuentas. Esta representación hace que las estrategias de cálculo mental para sumas sigan el algoritmo de columnas articulado con el conteo, el cual simula el movimiento mental de las cuentas en el ábaco. Esta misma estrategia puede ir articulada con hechos numéricos conocidos, específicamente para la suma de cifras iguales, que son expresadas como el doble del número y ya sabe estas relaciones de memoria. El uso de esta estrategia obliga al estudiante a memorizar los números como un vector de cifras y no con su designación convencional en la representación en lenguaje natural; así que con el uso de esta estrategia se favorece la memorización cuando el entrevistador acompaña la representación en lenguaje natural con una enunciación de los dígitos en el orden de izquierda a derecha. Por ejemplo, “123 más 45, expresado como 1, 2, 3 más 4, 5”.

Es muy particular que en la realización de los cálculos la estudiante de 12 años indicaba con mucha persistencia que olvida las cifras que lleva o ubicarlas en la mente con las demás cifras. Sin embargo, con el avance de la entrevista la estudiante fue ganando confianza en sus cálculos mentales y superando la dificultad.

Si bien se identificó una estrategia predominante el cálculo de sumas, los resultados se presentan según la cantidad de cambios de unidad que requiere y algunas variaciones en la estrategia que se identificaron.

Sumas sin cambios de unidad. En estos casos, la estudiante presenta dificultades para recordar las cifras que componen los sumandos o las que lleva en los cambios de unidad. Esto provoca errores en: la recuperación de las cifras en cada posición, la evocación del orden de la posición de las cifras u olvido de algunas cifras (especialmente de las centenas). Esto es en parte provocado por la demanda de memoria en el recuento para sumar las cifras, pues debe concentrarse en las dos cifras a sumar, realizar el recuento desde una de las cifras, recordando la cantidad de saltos que hace en la secuencia numérica hasta hacer tantos como indique el segundo sumando; luego debe descomponer el total, llevar la cifra de las decenas y memorizar las unidades. Al realizar esta acción en la segunda ocasiones, provoca que olvide los resultados y cambios de unidad de la primera. De esta dificultad es consiente la estudiante y le provoca inseguridad en el cálculo mental. En los siguientes cálculos se ejemplifica lo ocurrido:

- 1) En la suma $132 + 30$, la estrategia de la estudiante es de artificio de columnas, pero solo logra retener en su mente las cifras de las decenas y las unidades, olvidando las centenas. La estudiante verbaliza: “2 más 0 da 2. Ehhhh 3 y 3. Da 62”

La entrevistadora hace la corrección de la solución, indicando que es 162, pues el sumando es 132.

- 2) Para validar el uso de la estrategia y la capacidad para retener todos los datos en la mente, la entrevistadora propone la suma $564 + 23$, a lo cual la estudiante verbaliza: “4 y 3; 7. 6 y 2; 8. Da 587”

En esta suma, la estudiante recordó con exactitud todas las cifras de los sumandos además de los resultados de las adiciones de las unidades con unidades y las decenas con decenas y recordar la cifra de las centenas.

Al parecer, el cálculo mental de la estudiante pocas veces había superado la suma de sumandos de una cifra y siente inseguridad con dos cifras. La corrección el cálculo anterior le permitió ampliar la estrategia.

- 3) El uso del recuento como método de cálculo de las cifras demanda la memoria de la estudiante y la lleva a olvidar las cifras que llevaba y quedaban, o la cifras de las centenas. Sin embargo, cuando no acude a este método, sino que lo hace por hechos numéricos conocidos o subitización, es capaz de realizar sumas de dos sumandos de tres dígitos cada uno. Esto se observa en el cálculo de $311 + 102$, del cual el procedimiento expresado por la estudiante es:
“Entonces 1 más 2 da 3. Eh, 1 más cero pues da el mismo número. Eh, 3 y 1. Da 413.”

Una variación de esta estrategia de columnas se presenta cuando la estudiante empieza a sumar por la izquierda desde las cifras de mayor valor posicional. Este método se observó en la niña de 22 años en el cálculo de $23 + 56$, el cual es evoca como $23 + 53$. Al dar el resultado 76, la entrevistadora indaga el procedimiento y la estudiante señaló:

“Cogí el 5 y lo sumé con el 2 y después cogí los dos 3.”

Esta técnica se confirma en la suma $54 + 45$. La estudiante la evoca como $54 + 44$ y el total que le da es 98. Al indagar por el procedimiento de cálculo, expresa que:

“Cogí el 5 con el 4 y el 4 con el 4.”

Con un cambio de unidad. En estos casos la estrategia continúa siendo por artificios en el método de columnas. La estudiante logra retener en la memoria los datos iniciales y los resultados parciales. Por ejemplo, en el cálculo de $777 + 10$. La estudiante indica que sumó 7 más 0, 7 más 1 y luego 7 más 0, lo que da 787.

La variación de la estrategia de columnas iniciando por la izquierda empieza a generar errores cuando hay cambios de unidad en la suma de las cifras de la posición de las unidades, pues desecha la decena ganada. Esto ocurre en el cálculo de $12 + 89$, en el que la estudiante da un total de 91. Al indagar por el procedimiento de cálculo, la respuesta es muy confusa, pero puede apreciarse que sumó 8 y 1; que da 9. Luego sumó 9 y 2 que da 11. Deja 1 en las unidades y 9 en las decenas, pero no adiciona la decena ganada en el cambio de unidad.

Para evitar el error anterior, la estudiante cambia la estrategia y emplea disociativa de descabezamiento articulado con recuento; esto en especial para los casos en los que el segundo sumando es un número natural entre de 11 a 39. Esta estrategia va acompañada de una conmutación del sumando e inicia con el mayor. En el cálculo de las sumas $13 + 77$ y $12 + 98$, la estudiante indica su procedimiento así:

“90. Al 77 le sumé 10 y a esos diez le conté los otros tres que me faltaban”

“110. Al 98 le sumé 10 después le coloqué los otros dos que me faltaban”

Con dos cambios de unidad. En estos cálculos la estudiante logra realizar con éxito la memorización de las cifras en cada posición, el recuento de las unidades y las decenas, pero tiene dificultad para componer el resultado y le impide dar un total. Estos se observan en:

- la suma $64 + 98$, cuyo procedimiento es verbalizado por la estudiante así:
“4 y 8: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; llevo 1. 6 y 9: 12. Y una 13. [intenta dar el resultado] ciento treinta y... Ciento treinta y... ah qué, a mí se me olvida, de verdad, como te digo. Es que a unos números me acuerdo y de otros no”
- la suma $77 + 54$, en la que la estudiante verbaliza su procedimiento:

“7 y 4 da 11. 1 y llevamos 1. 5 y 7: 8, 9, 10, 11, 12. Da 12. y... ¿cuánto era? 1 que llevaba. No, me confundo.”

En este mismo tipo de sumas se presentan una variación en la forma de calcular la suma de las cifras, pues acude hechos numéricos conocidos como el doble de un mismo número en lugar de hacerlo por recuento. Esto ocurrió en el cálculo de $98 + 988$, en el que la estudiante lo evoca como $98 + 98$ y comete un error en el cual suma a las centenas la cifra que llevaba al sumar las unidades.

“8 más 8, da 16. Llevamos 1. 9 más 9, 18 y una que llevaba 19. 0 y 1 da 1. Y la que llevaba pues da 2. Y eso me da 286”

Es notorio el aumento de la memoria para retener datos parciales de la suma cuando la estudiante acude a los hechos numéricos conocidos en lugar del recuento, pues es capaz de realizar con éxito sumas de dos sumandos con tres cifras y dos cambios de unidad. Esto se evidenció en el cálculo de $77 + 777$. La estudiante lo evoca como $777 + 777$. Y al respecto indica que:

“Entonces 7 más 7 da 14 y llevamos 1. 7 más 7 da 14 y una que llevábamos da 15; llevo 1. 7 y 7 da 14. Eso da 1554.”

3. en el cálculo $89 + 446$, la estudiante verbaliza el procedimiento como:

“6 y 9 da 15; 5 y llevo 1. eh, 8 más 6: 9, 10, 11, 12, 13, 14. 14 y uno que llevaba 15, da 155.”

En esta suma se nota un error al evocar una de las cifras. Sin embargo al revisar la estrategia, realiza nuevamente un procedimiento similar al primer caso, en el que nuevamente olvida la cifra de las decenas.

4. en el cálculo de $98 + 777$, la estudiante logra realizar correctamente el recuento de las decenas y las unidades, pero se le dificulta configurar las cifras del total y termina por invertir dos cifras. Ante el cálculo la estudiante verbaliza.

8 y 7: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. 15, llevo 1. Eh, 7 y 9: 8, 9, 10, 11, 12, 13. 16, da 695

En este tipo de sumas se presentó una variación en la estrategia que ocurre cuando el segundo sumando está entre 10 hasta 20 y consiste en hacer un recuento de uno en uno desde el mayor de los sumandos. Por ejemplo, en el cálculo de $899 + 11$, la estudiante acierta en el total 910; mientras hacía el cálculo, en voz muy baja verbalizaba numerales mayores a 899 y señala que la manera en que lo realizó: “cogí el 899 y le sumé los 11”.

Con tres cambios de unidad. A medida que avanza la entrevista la estudiante va ganando confianza en su cálculo mental y empieza a realizar los recuentos más rápidamente y a retener mejor los datos. Si bien continúa presentando dificultad para evocar algunos datos, progresa en la reconstrucción del total a partir de los datos parciales. Esto se ve en el cálculo de $645 + 889$, en el cual la estudiante requirió de una segunda repetición verbal para memorizarlo.

Su procedimiento en la segunda oportunidad fue: 5 más 9 da 14; 4 y llevamos 1. 4 y 8: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; y una que llevábamos 13. Y seis y nueve da [pronuncia algunos numerales, pero no se escucha claramente]: 12; y una que llevábamos, 13. Eso da 1334.

■ Conclusiones

En los dos casos analizados de estudiantes con ceguera total de nacimiento y diagnóstico de déficit cognitivo leve se encuentra prevalencia de la estrategia de artificios en el método de columnas. Esto provocado por la enseñanza de la aritmética basada en el ábaco ruso. La estrategia articula el recuento para sumar las cifras de un mismo valor posicional, lo que demanda el uso de la memoria en el recuento y provoca dificultad para retener cifras de las centenas o resultados parciales, así como para componer el total desde los resultados parciales. En esta estrategia se presentan dos métodos de columnas: iniciando por la cifra de las unidades e iniciando por la cifra de mayor valor posicional. Para los casos en los que uno de los sumandos está en el intervalo de 10 a 39, se presenta una estrategia disociativa de descabezamiento, en la cual el sumando en el intervalo citado es descompuesto en decenas y unidades; las decenas se agregan por recuento de 10 en 10 y las unidades por recuento de uno en uno. Cuando los dígitos a operar son iguales o uno de los dígitos están en el conjunto $C1 = \{0, 1, 2, 3\}$ no se acude al recuento sino a hechos numéricos conocidos y a la subitización, lo que optimiza el uso de la memoria para los datos de la suma y aumenta el éxito en el cálculo mental a dos sumandos de tres cifras con dos cambios de unidad.

■ Referencias Bibliográficas

- Albanese, V., Adamuz, N., Bracho, R. (2016). Algoritmos alternativos y cálculo mental en las comunidades gitanas. En M. Amor, J. Luengo-Almena, M. Martínez (Eds), *Educación intercultural: metodología de aprendizaje en contextos bilingües* (pp. 55-59), España: Editorial Atrio, S.L.
- Fernández del Campo, J., Núñez, J. y Rosich, N. (1996). *Matemáticas y deficiencia sensorial*. Madrid: Síntesis.
- Fernández del Campo, J. (2004). *Del cálculo mental*. Madrid: Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE).
- Gómez, A. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias* 13 (3), 313 -325.
- Linhares, J.R. (2015) Educação comunitária e cálculo mental em atividades cotidianas. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 1 – 10.
- Mochón, S. y Vásquez, J. (1995). *Cálculo mental y estimación: Método, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza*. *Educación Matemática* 7 (3), 93-105.
- Palacio R.J., Ramírez F.A., Aroca A.A. (2016). Cálculo mental aritmético desde el conocimiento de algoritmos etnomatemáticos en Barraquilla. *Revista Colombiana de Matemática Educativa* 1(1), 98-99.
- Soares, M. A., Mariani, R. C. (2002) O Cálculo Mental/Oral: Uma Experiência na Alfabetização Matemática de Jovens e Adultos. Recuperado de https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/82222/Resumo_20020301.pdf?sequence=1
- Velásquez D.M., del Río, N.A. (2016). El desarrollo de habilidades matemáticas desde un enfoque visual, con personas sordas. Tesis de grado, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.