

## USO DE TRACKER Y GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

### USE OF AND GEOGEBRA AS A TEACHING TOOL FOR THE LEARNING OF SOLIDS TRACKER OF REVOLUTION

Rafael Pantoja González, Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa  
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (México)  
rpantoja3@hotmail.com, karlalpn4@gmail.com, polin86@prodigy.net.mx

#### Resumen

La investigación se centra en aproximar el volumen de objetos cotidianos, con el método de sólidos de revolución, de cálculo integral, a partir de una fotografía, como una alternativa a la forma tradicional de enseñanza del tema. Con Tracker se obtienen las coordenadas  $(x,y)$  aproximadas con la interfase fotografía/PC. GeoGebra se ajusta a polinomios para modelado y volumen. Las actividades se realizaron colaborativamente y del análisis de las hojas de trabajo y observación. Se concluye que los alumnos mostraron motivación e interés para desarrollar las actividades y apropiarse de conceptos. Algunos objetos fueron frutas, recipientes, panqué y balones.

**Palabras clave:** solidos, revolución, colaborativo, tracker, geogebra

#### Abstract

The research focuses on approximate the volume of everyday objects, with the solid's method of revolution, of integral calculus, from a photograph, as an alternative to the traditional way of teaching the subject. With Tracker, the approximate coordinates  $(x, y)$  of the photography / PC interface and with GeoGebra, adjustment to polynomials for modeling and volume are obtained. The activities were carried out collaboratively and the analysis of the worksheets and observation. It is concluded that the students showed motivation and interest to develop the activities and appropriate concepts. Some objects were fruits, containers, pancakes and balloons.

**Key words:** solids, revolution, collaborative, tracker, geogebra

## ■ Introducción

En el plan de desarrollo institucional (2013-2018) del Tecnológico Nacional de México (TecNM) se sugiere emplear la modelación y las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los distintos cursos de matemáticas, con la finalidad de fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como propiciar el interés del profesor por generar estrategias de enseñanza alternativas, que incentiven y motiven al estudiante por aprender matemáticas (Arrieta y Díaz, 2015).

En esta reforma, en el plan de estudio que rige el desarrollo del curso Cálculo integral, se sugiere utilizar las TIC para facilitar el entendimiento de los temas a los estudiantes, pero su enseñanza se orienta a utilizar el software especializado de matemáticas para solucionar ejercicios propuestos en la bibliografía recomendada, que por un lado, los docentes no lo relacionan con la vida cotidiana, y por otro, omiten otras tecnologías como es el empleo de la fotografía y el video digital (Ezquerro, Iturrioz, Díaz, 2011; Jofrey, 2010).

En el caso que se reporta, se parte de la selección de una situación problema (Hitt y González-Martín, 2015; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016) de la vida cotidiana, como es calcular el volumen de una fruta, un recipiente o un balón deportivo, objetos tridimensionales con distintas formas.

Estos objetos se capturan en fotografía, para ser analizados y revisados en dos momentos: el primero es generar con el software Tracker un conjunto de coordenadas  $(x, y)$ , a partir de la señalización del contorno de la proyección del objeto plasmado en la fotografía, y segundo, exportar estas coordenadas a GeoGebra para ajustar una función a su periferia y aplicar la fórmula para aproximar su volumen.

Con la aplicación de estas herramientas digitales, se trata de dar una justificación al plan de estudios y sacar del aula el concepto del cálculo volúmenes por el método de sólidos de revolución, al aplicarlo a objetos cotidianos del contexto del estudiantes como son los cortes transversales de cuerpos tridimensionales como recipientes, frutas, balones, entre otros; se pretende fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como propiciar el interés del profesor por generar estrategias alternativas para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Se reportan los resultados del curso de Cálculo Integral impartido en el periodo Agosto a diciembre de 2017, realizado en el Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG), perteneciente al sistema descentralizado Tecnológico Nacional de México (TecNM) con 33 alumnos. La metodología para encontrar el volumen y su modelo, por el método de sólidos de revolución, se sustentó en el empleo de la fotografía y el video de objetos planos y de secciones transversales de cuerpos tridimensionales, comunes en el contexto del estudiante, mediante el ajuste de funciones polinómicas al contorno de la región con apoyo del software GeoGebra y con los datos o coordenadas  $(x, y)$  obtenidos de la manipulación al contorno del objetos que se haya seleccionado de la fotografía o video con el Tracker.

Un elemento importante para el desarrollo de la metodología propuesta son los conocimientos previos de los alumnos participantes, pues aproximadamente el 55% de los alumnos ha cursado y reprobado el curso Cálculo Integral, y el otro 45% de alumnos, son jóvenes en situación regular académica que quieren adelantar materias o ponerse al corriente con sus créditos escolares, situación que ha beneficiado de manera indirecta el desarrollo de alternativa didáctica planteada, pues ya tenían un conocimiento incipiente de los temas del curso.

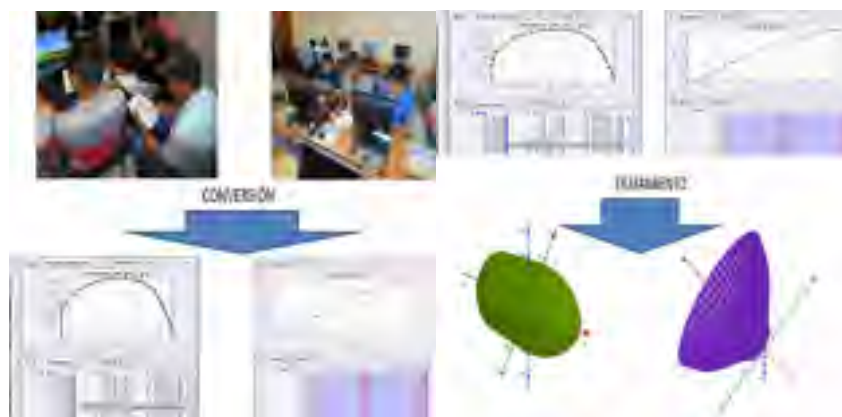
## ■ Marco teórico

La Teoría de las representaciones Semióticas de Raymond Duval (2004), se ha elegido sustento teórico debido a que desde el inicio se generan cuatro registros a saber: El visual que se relaciona con la fotografía del objeto, y al momento de emplear al Tracker se generan los acercamientos gráficos (gráfica del contorno), analítico (expresión

algebraica) y numérico (tabla de datos). Las representaciones verbal y escrita se propician al momento del trabajo colaborativo con la metodología ACODESA (Aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión) y la elaboración de un reporte final de las actividades realizadas.



(a) Esquema de la representación semiótica de Duval para encontrar el volumen del líquido de las copas.



(b) Experimentación en colaborativo esperada en la conversión y tratamiento de las representaciones semióticas de Duval del volumen aproximado del objeto seleccionado, en este caso, las copas

Figura 1. Esquemas esperados sobre la experimentación al utilizar las representaciones semióticas de Duval y el trabajo colaborativo

Las directrices que marca la teoría de representaciones Semióticas de Raymond Duval citado en Pantoja, *et al*, (2016), en el que este trabajo se sustenta, sitúa al alumno en acciones para la generación de los cinco registros: el *visual* que se relaciona con la toma de la fotografía digital, con la utilización de una medida de referencia, ya sea regleta, regla, flexómetro o cualquier elemento que se sepa su medida real, para que el software Tracker con sus rutinas de interfaz humano-máquina, pueda escalar el objeto de manera confiable para su análisis posterior, el *grafico* el cual se relaciona directamente con las gráficas que arroja el software Tracker al colocar los puntos o coordenadas (x,y) del contorno del objeto que se analiza, en este caso las copas. El *verbal* se denota cuando se observa discutir, entablar o discernir sobre en qué regiones marcar y visualizar la imagen para colocar los puntos en la imagen cuando se usa Tracker. El *analítico* se observa cuando se utilizan las herramientas de GeoGebra para

obtener la función polinómica del contorno de la copa y el *numérico* en la obtención de las coordenadas (x,y) y en la solución del polinomio para aproximar el volumen al aplicar el tema de solido de revolución.

## ■ Metodología

La actividad inicia con la selección de la situación problema, como se presenta en la figura 2, para este caso, encontrar el volumen de una copa mediante su fotografía. Otros objetos como la fruta papaya, se utilizan como ejemplos en salón de clase.

Al alumno se le ha capacitado sobre los cuidados que hay que tener en el manejo de la fotografía con el Tracker, direccionado a determinar el volumen de los diferentes objetos.

Los cuidados se describen a continuación:

- El lente de la cámara fotográfica digital, debe ser lo más paralela al objeto que se analizará.
- Se debe contar con una referencia de medida, esto sea con una regla graduada o un elemento que se conozca su longitud.
- Claridad en el objeto que se fotografía.



*Figura 2, situaciones iniciales para encontrar el sólido de revolución.*

Para la experimentación se planearon tres sesiones de trabajo guiado con los alumnos, las cuales se describen a continuación.

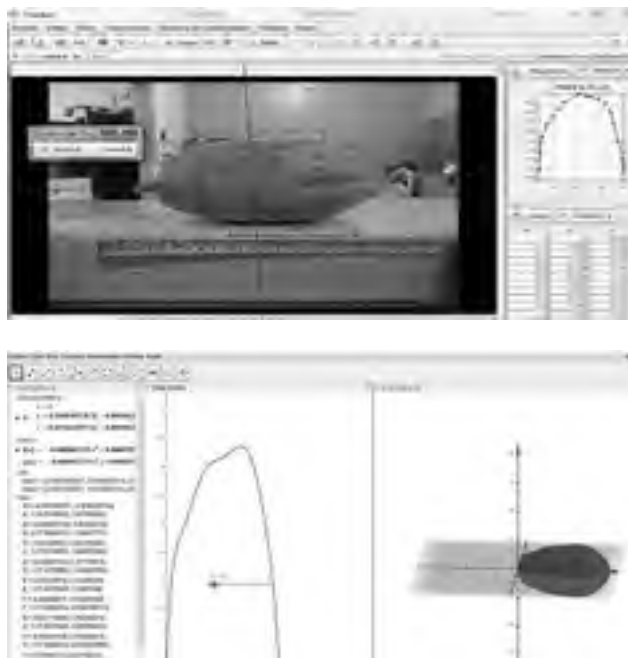
### Sesión uno

La labor de los instructores fue generar actividades significativas y accesibles para los alumnos, que fueron avaladas por la academia de ciencias básicas del ITCG, con la finalidad de validar la pertinencia del material. Como resultado de la revisión, se propuso generar una actividad extra previa al modelado de las copas, que consistió en una práctica guiada cuyo objetivo fue modelar el volumen de una papaya (Figura 3), fruta conocida por su forma ovalada semejante a un elipsoide.

Esta actividad promovió que los estudiantes vivieran la experiencia del modelado y manifestar sus dudas e inquietudes sobre la actividad.

Para lograr tal meta, las actividades se integraron en una secuencia didáctica, elemento promotor que los orientó paso a paso en el proceso de cálculo del volumen de la fruta. Se inicia con la búsqueda de la función que modela la

periferia en la fotografía de la papaya en Tracker, en donde con las rutinas se puede encontrar las coordenadas cartesianas (x, y) del contorno de la fruta. Ver figura 3.



*Figura3.* Ejercicio de práctica, el volumen de la Papaya.

De esta manera se logró sistematizar un proceso de análisis para aproximar el volumen que ayudó al alumno a visualizar y obtener el volumen de algunos objetos de su entorno, ya que la metodología es semejante.

### Sesión dos

Esta sesión es importante, ya que se trata de encontrar y aproximar el líquido que contiene la copa. Previamente a los alumnos se les mostró la instrucción de trabajo para toda la sesión lo que promovió el trabajo en grupos colaborativos. Los profesores únicamente participaron en resolver dudas sobre procedimientos técnicos.

Se solicitó a los estudiantes que, una vez que terminaran de explorar y calcular un volumen aproximado de la copa, redactaran un reporte con sus resultados, observaciones y conclusiones respecto al trabajo que se realizó, con esto se promueve la auto reflexión, trabajo colaborativo y sustentación del modelo ACODESA.

### Sesión tres

Se solicitó a los estudiantes exponer sus dudas o problemas que se generaron durante las sesiones anteriores y de esta forma, en sesión plenaria, dar solución y así aclarar, retroalimentar y sobre todo, enriquecer el trabajo en el aula.

### ■ Resultados

El uso de los software Tracker y GeoGebra en esta experimentación, auxiliaron a los alumnos a visualizar, relacionar y dar respuesta a las preguntas ya trilladas sobre para qué sirve el uso del teorema fundamental del cálculo en sus

vidas. El uso de estos Software agiliza y facilita los procesos de interiorización en las definiciones básicas del cálculo. El software Tracker apoyó a los alumnos en los registros visuales que se hacen presentes en los reportes que, Duval (2004) menciona que si los alumnos logran pasar de un registro visual (en este caso la fotografía o video de la copa) al registro gráfico que se logró con la obtención de las coordenadas del contorno de la copa en el software Tracker, se promueve un aprendizaje en el alumno ya que alcanza a visualizar parcialmente el modelo matemático del contorno de la copa.

Tracker necesita para realizar sus rutinas internas, que el usuario utilice una medida de referencia para enlazar el interfaz humano-maquina. Se utiliza este programa por que la medida que se usa es más acertada y menos complicada de trabajar que con el software GeoGebra, el cual se utilizan sus poderosas rutinas para aproximar el polinomio que mejor se acerque al contorno de la copa, que por otro lado, en Tracker son pobres y poco precisas. En Tracker se deja al alumno en libertad de ubicar los ejes coordenados (no como en el aula), que lleva implícito la representación gráfica de una función, pues depende de la ubicación de la ubicación de los ejes coordenados sobre la copa complicar o simplificar la determinación del polinomio ajustado, así como su grado (en el aula se le proporciona siempre), en función de la tabla de coordenadas y gráfica proporcionada por Tracker.

La tabla de datos o coordenadas  $(x,y)$  se exportan a GeoGebra, cuya rutina, como ya se mencionó, para el ajuste de funciones es más completa que la de Tracker, con la finalidad de que el alumno visualice el polinomio conveniente para realizar el ajuste, que en este caso puede ser de grado dos, tres, cuatro o lo que ellos consideren conveniente.

Un aspecto importante en la que tuvieron problema los alumnos fue la identificación de los límites de integración, porque no logran relacionar el acercamiento numérico, es decir, no visualizan que los límites de integración se encuentran implícitos en las tablas de datos. Se intuye que no están acostumbrados a relacionar la representación numérica y la analítica, ya que en el aula se le acostumbra a solucionar las ecuaciones o se les proporcionan los límites de integración, a partir de las funciones incluidas en el ejercicio. Por último, en la hoja de trabajo se les indica el proceso para reproducir el objeto en 3D, que les costó una inversión cognitiva considerable, pero en un alto porcentaje lo lograron después de varios intentos.

Por otro lado se observó que las conclusiones de los equipos de trabajo fueron variadas, ya que la mayoría presentaron evidencias de haber entendido y comprendido la función de la integral para encontrar el volumen de un objeto por el método de sólidos de revolución y el uso adecuado del software como complemento del trabajo en el aula. Pero también nos encontramos con diversos cuestionamientos que manifestaron los alumnos después de realizar la actividad. Hubo estudiantes que no les agrado en lo absoluto romper con el formato de lápiz y papel para realizar sus actividades, otros prefirieron trabajar en soledad, y no siguieron instrucciones establecidas (ver tabla 1).

*Tabla 1. Conclusiones varias de los alumnos (Transcripción fiel con errores de sintaxis)*

*Como conclusión puede obtener que es impresionante como la tecnología cada vez se adapta mas a las necesidades, como con estos programas realizamos algo de la vida cotidiana al transportarlos ahí y de una manera sencilla. Aparte me gusta mucho el tema, el aprender cosas nuevas, me interese mucho por dicha actividad y me dejó un gran aprendizaje, creo que es muy dinámica y aporta mucho para los conocimientos.*

(a) Conclusión alumno 1.

*Al principio me exaspere porque no tenía mucho conocimiento de la plataforma y me sentía más segura realizando los cálculos a mano, pero una vez que los entendimos, si puedo admitir que estos programas te ahorran mucho tiempo de cálculos y es mejor verlo de esa forma visual. El pensar que íbamos a obtener el volumen de una copa con un método complejo, suena un poco sin sentido, porque hay métodos mas sencillos, pero si este ejemplo que nos permitio conocer cómo se*

*realiza, lo vemos enfocado a estructuras grandes. En ese caso si suena interesante pensar que podrían calcular el volumen de un barco.*

(b) Conclusión alumno 2.

*Que podemos concluir con esto, que esperaban mucho de nosotros dándonos recursos bastante limitados, resolver problemas de cálculo para mi no es difícil siempre y cuando tenga tiempo y la práctica suficiente, pero resolver esos mismos problemas usando un software que mas que ayudar ralentizaba los procedimientos, estoy de acuerdo que hubiéramos tomado mas tiempo de práctica no sería problema, pero no sólo tuvimos una clase sino que además no fue explicada de la manera adecuada, el documento que se nos dio le hacía falta bastante información, en conclusión, prefiero volver a el lápiz y papel.*

(c) Conclusión alumno 3.

Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía idea que se podía sacar el volumen o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual rompe todas mis creencias que solamente era teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro día.

(d) Conclusión alumno 4.

*En este examen, puedo decir que fue un poco más rápido nuestro procedimiento, creo que memorizamos bien los pasos, y no sé si estamos bien, pero fue una actividad muy dinámica, no me gusta escribir mucho en cuaderno, aprendí algunas funciones de los software que utilizamos, creo que aunque no seamos arquitectos, necesitaremos en alguna ocasión programar algo como esto, no lo sé igual y a lo mejor hasta nos toca hacer programas para arquitectos, nunca está de más aprender algo nuevo.*

(e) Conclusión alumno 5.

*Creo que el uso de las tecnologías para el aprendizaje resulta verdaderamente eficiente, ya que a los alumnos nos resulta mas atractivo y menos aburrido aprender de esta forma que de la forma convencional y si más maestros utilizan estas técnicas algunas materias nos resultan un poco tediosas y complicadas, se nos harían más dinámicas.*

(f) Conclusión alumno 6.


## ■ Conclusiones

La investigación y propuesta generó interés y motivación en el estudiante por aprender una forma alternativa de aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo al acercamiento del volumen de objetos por el método de sólidos de revolución, a partir de fotografía, con la finalidad de relacionar la matemática escolar con situaciones problema de la vida cotidiana.

Se observó que la propuesta generó interés y motivación en los alumnos por aprender solidos de revolución en el curso de cálculo integral. Les motivó la idea de obtener información a partir de la fotografía o video digital de objetos de la vida cotidiana, pues en los ejercicios desarrollados en el aula siempre se les proporciona la función y en este caso ellos las obtuvieron.

Algunas dificultades que se identificaron al aplicar la propuesta se presentan en la tabla 2:

**Tabla 2:** tabla de dificultades que se presentaron durante la experimentación con los alumnos.

<ul style="list-style-type: none"> <li>La falta de calidad en los videos y fotografías borrosas.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>El grosor de las copas afecta el volumen calculado con el medido.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>La dificultad que manifestaron algunos alumnos al integrarse al trabajo colaborativo             <p>Que podremos concluir con esto, que utilizar un número de nosotros, algunos recursos (asistente virtual), resolver problemas de física para mí, no es difícil siempre y cuando tenga el tiempo y la atención suficiente para resolver esos mismos problemas usando un software que me ayude a visualizar los procedimientos, pero de acuerdo con el profesor me he dado cuenta que la práctica no sería problema, pero he sido tímido una clase sin que se me explicara de la manera adecuada, el documento que me fue dado me hacía falta bastante información, en conclusión, prefiero volver a el papel y el lápiz.</p> </li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Computadoras lentas.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Falta de práctica en los programas de cómputo Tracker y GeoGebra.             <p>Al principio me encantó porque yo tenía mucho conocimiento de la plataforma y me sentía más segura realizando los cálculos a mano, pero una vez que lo entendimos, se pudo ver que estos programas te ahorran mucho tiempo de cálculos y de esa forma ves de una forma visual. El pensar que vamos a obtener el volumen de una copa con un método sencillo, es un poco en serio, porque hay métodos más sencillos, pero en este sistema que me permitieron conocer cómo es realmente, la verdad enfocada a estructuras grandes, en ese caso si sería interesante pensar que podrían calcular el volumen de un bote.</p> </li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Apatía de algunos estudiantes al aplicar conceptos matemáticos a su vida cotidiana.             <p>Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía nada que se podía sacar al volumen, o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual tengo todas mis creencias que solamente esa teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro día a día.</p> </li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Alumnos acostumbrados a la clase exposición por parte del académico.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Alumnos no atendieron las directrices para la sistematización del proceso.</li> </ul>



## ■ Referencias bibliográficas

- Arrieta, J., Díaz L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología a modeling perspective from socioepistemology. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(1),19-48. doi: 10.12802/relime.13.1811.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.
- Ezquerria, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X.
- Hitt, F., González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics* 88, 201–219.
- Jofrey, J. A. (2010). *Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases*. *Physics Education*. doi: 10.1088/0031-9120/1/005.
- Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development* 5(1), 62-76.