

OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NA TRANSIÇÃO DO SECUNDÁRIO AO SUPERIOR NO BRASIL

OSTENSIVE AND NON-OSTENSIVE NOTIONS IN THE TEACHING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN THE TRANSITION FROM SECONDARY TO HIGHER EDUCATION IN BRAZIL

Miriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Universidade Federal de Goiás, Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Federal de Pernambuco. (Brasil)
miriamguaddagnini@gmail.com, maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com

Resumo

No Brasil, as noções de Geometria Analítica em IR^2 são introduzidas no Ensino Médio e consideradas disponíveis quando do estudo dessa disciplina em IR^3 no Ensino Superior. Para compreender como articular essas noções nessas duas etapas escolares, nosso objetivo foi analisar quais são os ostensivos e não ostensivos em jogo nessa disciplina e as possíveis articulações entre eles por meio de uma pesquisa documental. Para este artigo, consideramos apenas as noções de retas, planos e vetores, pois retas e planos são introduzidos em IR^2 no Ensino Médio e esses conhecimentos são considerados disponíveis no Ensino Superior, que introduz essas noções em IR^3 e em outras dimensões sem articular com os conhecimentos desenvolvidos em IR^2 . Este estudo nos auxiliou a propor ações que mostram a importância de revisitar IR^2 para criar as relações pessoais que auxiliam a desenvolver essa disciplina em IR^3 e em outras dimensões, ajudando assim os estudantes a compreenderem o significado do seu estudo.

Palavras-chave: retas, planos, vetores, ostensivos, não ostensivos.

Abstract

In Brazil, the notions of Analytical Geometry in IR^2 are introduced in High School, and they are considered available in the study of this discipline in IR^3 in Higher Education. In order to understand how to connect these notions in both educational levels, this work is aimed at analyzing which of them are ostensive and non-ostensive in this discipline, as well the possible linking between them through a documentary research. In this paper, we only consider the notions of straight lines, planes and vectors, since straight lines and planes are introduced in IR^2 in High School and this knowledge is taken for granted in Higher Education, where these notions are introduced in IR^3 , as well as in other dimensions without connection with the knowledge developed in IR^2 . This study helped us to propose actions that show the importance of revisiting IR^2 to create the personal relationships that helps to develop this subject in IR^3 and in other dimensions, thus helping students to understand the meaning of their study.

Key words: straight lines, planes, vectors, ostensive, non-ostensive notions.

■ Introdução

Vários problemas são encontrados por estudantes e professores na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior no Brasil, no que se refere ao ensino da Matemática. Neste artigo, propomo-nos a estudar as dificuldades associadas ao ensino da Geometria Analítica nos ensinos Médio e Superior. Essas dificuldades foram identificadas por meio das macroavaliações institucionais estaduais, nacionais e pesquisas. Como exemplo de pesquisa, citamos o trabalho de Gueudet, Bosch, di Sessa, Kwon, Verschaffel (2016), que aborda de maneira mais geral o que pode ser considerado no estudo das transições em Educação Matemática e considera a possibilidade de estudar a transição Ensino Médio e Ensino Superior. Além disso, estudamos essa questão desde 2010, tendo iniciado com um estudo comparado entre Brasil e França, para o domínio das funções, conforme Dias, Artigue, Jahn, Campos (2010).

Iniciamos observando que a disciplina Geometria Analítica é introduzida no Ensino Médio, quando se propõe o estudo de ponto e retas no plano seguido do estudo da circunferência e seções cônicas. No Ensino Superior, é introduzida a noção de vetor em um espaço de dimensão finita, suas operações e propriedades e, na sequência, é definida a noção de sistema de coordenadas de origem O associadas a um espaço vetorial de dimensão 3, em particular, ao espaço vetorial \mathbb{R}^3 , o que permite determinar as coordenadas de um vetor \overrightarrow{OP} de origem O e extremidade P , cujas coordenadas são as coordenadas do ponto P em relação a uma base do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Após a introdução de sistema de coordenadas no espaço, é proposto o estudo de retas e planos, das suas representações e propriedades em um espaço afim, cujo espaço vetorial associado é \mathbb{R}^3 . É indicado ainda o estudo das cônicas e das curvas e superfícies. Portanto, como tratamos da transição entre os ensinos Médio e Superior, consideramos especificamente o estudo de retas e planos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Os estudos das macroavaliações estaduais e nacionais nos conduziram a considerar que a falta de articulação entre os conhecimentos matemáticos mobilizáveis ou disponíveis dos estudantes que concluem o Ensino Médio (estudantes de 15 a 17 anos) e iniciam o Ensino Superior é um dos elementos que influenciam o desenvolvimento dos mesmos no Ensino Superior, levando muitos daqueles que iniciam carreiras, em que a Matemática é ferramenta para a introdução de novos conhecimentos, a desistirem de seus projetos em função das dificuldades encontradas. Observamos que as disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear estão entre as que apresentam maior dificuldade e que levam muitos estudantes a questionarem a razão destas dificuldades, já que eram “bons” alunos de Matemática para a instituição Ensino Médio.

Para melhor compreender e identificar essa falta de destreza, formulamos as seguintes questões: Quais as expectativas institucionais para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica para o Ensino Médio? Quais as expectativas institucionais para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica para o curso de Licenciatura em Matemática (formação inicial)? Quais as expectativas institucionais sobre as relações pessoais a serem desenvolvidas pelos estudantes que terminam o Ensino Superior?

Certamente, as questões acima são amplas e, para este artigo, consideramos como objetivo a análise dos ostensivos e não ostensivos em jogo no estudo de retas e planos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 na transição entre o Ensino Médio e Superior e as possíveis articulações entre eles.

Como tratamos da transição entre o Ensino Médio e Superior, é importante observar que, no Ensino Médio brasileiro, têm sido implementadas mudanças influenciadas por resultados de pesquisas em Educação Matemática, mas pouco se modifica no Ensino Superior, em particular, quando consideramos o ensino e a aprendizagem de Geometria Analítica. Assim, fica a cargo dos professores a elaboração de novos tipos de tarefas que possibilitem a articulação entre os diferentes conhecimentos. Para tal, é preciso identificar o que se pode considerar como conhecimentos prévios para os egressos do Ensino Médio.

Desse modo, para atingir nosso objetivo, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1994, 1998, 2015) e Bosch e Chevallard (1999) e as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 1992), de pontos de vista de Rogalski (2001) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997, 1998).

Em relação à TAD, consideramos as noções: praxeologia, ostensivos e não ostensivos e relações institucionais e pessoais. Em relação aos referenciais teóricos de apoio, consideramos as noções de quadro e mudança de quadro segundo Douady, níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definição de Robert, a saber: técnico, mobilizável e disponível e pontos de vista cartesiano e paramétrico, que correspondem a enxergar retas e planos em \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^n por meio de um sistema minimal de equações lineares, que os define para o ponto de vista cartesiano e por meio de um conjunto minimal de vetores para o ponto de vista paramétrico.

Em coerência entre o referencial teórico e o objetivo da pesquisa, nossa pesquisa é qualitativa, seguindo o método da pesquisa documental, conforme proposta de Lüdke e André (2013).

A análise das expectativas institucionais via documentos oficiais e da macro avaliação Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) aplicado a estudantes do primeiro e último ano dos cursos superiores tende a mostrar que fica sob a responsabilidade do professor identificar os conhecimentos prévios de seus estudantes e propor novas praxeologias, que permitam articular os ostensivos e não ostensivos de Geometria Analítica, em particular, considerando os pontos de vista cartesiano e paramétrico em \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^n , quando da introdução de novos conhecimentos sobre este quadro no Ensino Superior, explicitando a diferença entre os espaços considerados e que mesmo se algumas propriedades são as mesmas, os espaços vetoriais associados ao espaços afim não estão contidos uns nos outros, o que auxilia quando do desenvolvimento da Geometria Analítica e indica a articulação de conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio com os novos conhecimentos introduzidos no Ensino Superior, possivelmente dificultando o estudo deste domínio pelos estudantes.

A seguir, apresentamos os elementos teóricos que sustentam a pesquisa.

■ Referencial teórico

Como anunciado acima, o referencial teórico central da pesquisa é a TAD, mais particularmente as noções de praxeologia, ostensivos e não ostensivos e relações institucionais e pessoais.

Iniciamos ressaltando que Chevallard (1994, 1998) indica que a noção de praxeologia corresponde a uma das premissas básicas da TAD, pois segundo o autor, toda atividade regular humana pode ser entendida por meio deste modelo único. Ainda conforme o autor, as atividades humanas podem ser decompostas em certo número de tarefas, mais concretamente em tarefas de um determinado tipo. Esses tipos de tarefas necessitam de uma técnica para serem desenvolvidas; sendo assim, essas técnicas, para se tornarem viáveis, precisam ser compreensíveis e justificáveis. Essa dupla função de possibilitar resolver a tarefa e justificá-la é amparada por um discurso denominado tecnologia de uma técnica. Da mesma forma, a tecnologia de uma técnica deve ser compreensível e justificável, dando origem ao que o autor denomina teoria, que corresponde à tecnologia da tecnologia. Assim, a hierarquia técnica - tecnologia e teoria - está relacionada ao tipo de tarefa considerado.

Após considerar a noção de praxeologia e apresentar alguns exemplos, Chevallard (1994) elabora as seguintes questões: Do que é feita uma determinada técnica? Quais os “ingredientes” que a compõem? Em que consiste a implementação de uma técnica? Para responder a estas questões, o autor distingue dois objetos: os objetos ostensivos, que têm para nós uma forma material, sensível e os objetos não ostensivos, que correspondem às noções, conceitos e ideias etc. O pesquisador observa ainda que os ostensivos nos permitem manipular os não ostensivos aos quais estão associados e que são evocados durante essa manipulação. Ainda consoante Chevallard, toda técnica

supõe a ativação de um complexo de ostensivos e não ostensivos, sendo a manipulação dos ostensivos regrada pelos não ostensivos que são evocados com a ajuda dos ostensivos, o que conduz a uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos. Como exemplo, o pesquisador considera: os objetos materiais que possibilitam uma manipulação no sentido estrito (lápiz, compasso, ...) e os ostensivos: gestuais, discursivos, gráficos e escriturais, além da voz, olhar etc.

Lembrando que, conforme Chevallard (1998), a primeira noção fundamental da TAD é a de objeto o , que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Assim, a noção de objeto é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. Assim, para o autor, toda obra O é um objeto, sendo a obra considerada como qualquer parte de um complexo de praxeologias.

Prosseguindo na introdução das noções fundamentais da TAD, o autor indica que a segunda noção fundamental é a de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o , representada por $R(x, o)$, que sugere todas as interações, sem exceção, que x pode ter com o objeto o , isto é, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele etc. Isso conduz à definição de relação pessoal com o objeto o , indicada por $R(x, o) \neq \emptyset$, quando esta é não vazia. Continuando, o pesquisador adverte que a terceira noção fundamental é a de pessoa, que é definida pelo par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais $R(x, o)$ num dado momento da história de x . Dessa forma, quando um objeto o existe para uma pessoa x , ou seja, quando $R(x, o) \neq \emptyset$, dizemos que x conhece o e que a relação $R(x, o)$ indica a maneira que x conhece o . O autor, ao introduzir a quarta noção, a noção de instituição I , explicita que as instituições são obras de um tipo particular, que proporcionam e impõem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer, pois adotam praxeologias determinadas.

Assim, Chevallard (1998) esclarece que a relação pessoal de x com o objeto o é criada ou muda por meio da entrada de x em certas obras O , cujo objeto o as compõe, e essas mesmas obras vivem em determinadas instituições em que x poderá ocupar a posição p . Isso o conduz a transferir a “teoria do conhecimento” esboçada para os indivíduos para as instituições, ou seja, dado um objeto o , uma instituição I e uma posição p em I , denominamos relação institucional a o em posição p , e indicamos $R_I(p, o)$, a relação com o objeto o que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de I em posição p . Dizer que x é um bom sujeito de I em posição p é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo x está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição p , que indicamos $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. Para diversos objetos o , temos $R_I(p, o) = \emptyset$, isto é, os sujeitos de I em posição p não são conduzidos a conhecer o objeto o .

Consideramos ainda a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984, 1992), que a partir da análise epistemológica sobre o trabalho do matemático profissional, coloca em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, os quais, em geral, funcionam como ferramentas implícitas e, em seguida, explícitas da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e de serem trabalhados como tal e o papel desempenhado pelas mudanças de quadros nas atividades e na produção matemática.

Segundo Douady (1984, 1992), uma ferramenta implícita corresponde a um conceito em elaboração, enquanto uma ferramenta explícita está associada a um conceito ou a uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema, e um objeto é definido como um componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente.

O objeto matemático, tal como definido por Douady (1984, 1992), é parte de um edifício mais amplo que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina quadro, que corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferirem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Douady define as mudanças de quadros como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e possibilitam utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, favorecendo assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

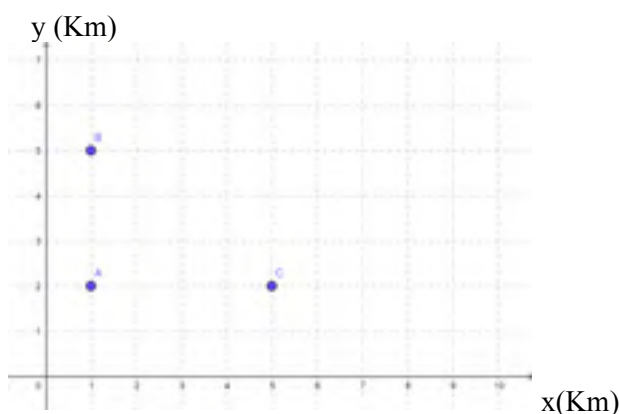
Outra noção que auxiliou nas análises é a noção de ponto de vista que, de acordo com Rogalski (2001), consiste nas diferentes maneiras de observar, fazer funcionar e eventualmente definir os objetos matemáticos. Logo, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro.

Utilizamos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Robert (1997, 1998) que, após definir níveis de conceituação como os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual e indicar que esses níveis são relativos, pois dependem das escolhas em função do nível de conceituação que desejamos abordar, apresenta os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Representar no sistema cartesiano ortogonal os pontos A(1, 2) e B(-3, 4).

O nível mobilizável equivale a um início de justaposição de saberes de um determinado domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito está em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: Calcular a distância entre os pontos A(1, 2) e B(-3, 4).

O nível disponível está atrelado a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Exemplo: Um motorista de UBER sai de A passa por B e se dirige a C, conforme indicado na figura a seguir.



Qual o valor da corrida, sabendo que o preço do quilometro rodado é \$ 2,00 dólares?

■ Metodologia

Como anunciado na introdução, trata-se de uma pesquisa qualitativa segundo Lüdke e André (2013), cujo método é o da pesquisa documental, pois, para compreender o fenômeno de transição entre os Ensinos Médio e Superior, quando se introduzem e desenvolvem os saberes a ensinar associados à Geometria Analítica, mais particularmente, às noções de pontos e retas no plano e pontos, retas e planos no espaço, analisamos documentos oficiais para identificar as relações institucionais esperadas e livros didáticos indicados pelo Ministério da Educação ou pela Secretária de Estado da Educação para o Ensino Médio e o mais indicado nos planos de ensino da disciplina de Geometria Analítica para os cursos de Licenciatura em Matemática no Ensino Superior.

Os documentos analisados foram as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e planos de ensino de universidades públicas e privadas para cursos de Licenciatura em Matemática (formação inicial de professores). Os livros que sustentam as análises apresentadas neste artigo são Dante (2017), indicado pelo Programa do Livro Didático do Ministério da Educação e um dos mais utilizados nas escolas públicas e o livro de Geometria Analítica de Boulos e Camargo (2004), indicado na maioria dos planos de ensino da disciplina de Geometria Analítica para os cursos de Licenciatura em Matemática.

Para compreender melhor os possíveis traços sobre as relações pessoais que se espera tenham sido desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Superior, analisamos as duas últimas macro avaliações Exame Nacional de Desempenho de Estudantes ENADE (2014, 2017), que avalia estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática e os do último ano, ou seja, verifica a evolução desses estudantes, uma vez que o exame, em geral, contempla os mesmos estudantes.

Para a análise das praxeologias sobre as noções de pontos e retas no plano e de pontos, retas e planos no espaço, construímos uma grade de análise, segundo o modelo de Dias (1998).

■ Exemplo da grade de análise

Tipo de tarefa: Representar um plano definido por um de seus pontos e dois de seus vetores diretores.

Exemplo: Seja Q o plano definido pelo ponto $P(0, -1, 2)$ e os vetores $\vec{u}(4, 0, -1)$ e $\vec{v}(0, 2, 1)$. Determinar as representações paramétrica e cartesiana de Q .

Técnica(s): 1) A técnica 1, parece mais natural, em função da forma como a tarefa é enunciada e consiste em escrever uma representação paramétrica do plano $M \in Q \leftrightarrow \exists \alpha, \beta$ tais que $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para, na sequência, fazer a passagem para a representação cartesiana via determinantes, escrevendo $\det(\overrightarrow{PM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$; 2) A técnica 2 inicia-se da mesma maneira que a técnica 1 e após determinar a representação paramétrica, resolve-se o sistema de equações lineares e interpreta-se a condição de solução como sendo a representação cartesiana pedida; 3) A terceira técnica consiste em determinar um vetor normal ao plano, aplicando o produto vetorial aos vetores diretores dados, que geram o plano. Obtém-se em seguida uma representação cartesiana do plano, considerando um ponto M qualquer desse plano e efetuando o produto escalar $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0$ após realizar a passagem da representação cartesiana para a representação paramétrica.

Tecnologia(s): 1) Noções de vetores e suas propriedades, noção de ponto e suas representações, noção do plano no espaço e suas representações e propriedades, noção de determinantes e suas propriedades, método de passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana; 2) As mesmas noções consideradas na tecnologia 1 e a noção de sistemas de equações lineares, um método de resolução de sistemas e suas propriedades; 3) Noção de vetor normal ao plano e noções de produto escalar e vetorial e método de passagem de uma representação cartesiana para uma representação paramétrica.

Teoria(s): Vetores no espaço, suas operações e propriedades; noção de ponto no espaço e suas representações; noção de plano no espaço, suas representações e propriedades; noção de determinantes de uma matriz, suas operações e propriedades e noção de sistemas de equações lineares, um método de resolução desses sistemas e suas condições de solução, noção de vetor normal, noções de produto escalar e vetorial, suas operações e propriedades.

■ Resultados

A análise da proposta institucional via Parâmetros Curriculares Nacionais +, Brasil (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Brasil (2006), a partir da descrição da origem histórica da Geometria Analítica propõe o estudo das coordenadas de um ponto P no plano por meio do que denominamos ostensivo coordenadas $((x,y))$. Na sequência, indica-se o estudo das propriedades geométricas por meio do que chamamos de ponto de vista cartesiano, o que conduz a determinar o conjunto solução de uma equação por meio do ostensivo coordenadas, indicando assim a articulação entre álgebra e geometria para o caso particular das retas e círculos. É indicada ainda a introdução do conceito de vetor no plano por meio do que denominamos ostensivo flecha (segmentos orientados com mesmo módulo, direção e sentido) e ostensivo coordenadas $((x,y))$, dando ênfase às operações de adição e multiplicação por escalar, utilizando o ostensivo coordenadas. Ressalta-se ainda a importância do estudo de vetores para a disciplina de Física que, por sua vez, só propõe o estudo dessa noção utilizando apenas a ostensiva flecha (\uparrow).

A análise dos planos de ensino da disciplina Geometria Analítica indica uma breve revisita ao estudo das noções de ponto de retas no plano após a introdução da noção de vetores no plano e no espaço, suas operações e propriedades para, na sequência, introduzir e desenvolver tarefas em que a ênfase é dada à determinação de uma das representações e à passagem às outras, e às aplicações a problemas de determinação de posições relativas, ângulos e distâncias, ou seja, os tipos de tarefas privilegiados ficam restritos ao nível mobilizável.

Na análise do livro didático para o Ensino Médio de Dante (2017), um dos mais adotados pelos professores, observamos que é desenvolvida apenas a Geometria Analítica no plano e que a noção de vetor não é considerada, mesmo tendo sido indicada na proposta institucional. Sendo assim, o autor introduz apenas ponto e reta no plano, representados por meio dos ostensivos coordenadas e gráfico. A partir da noção de ponto são consideradas as noções de distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e condição de alinhamento de três pontos, que é demonstrada utilizando o Teorema de Tales. É interessante ressaltar que a partir da demonstração, o autor introduz o ostensivo determinante simbólico considerando (x, y) um ponto qualquer e dois pontos que determinam uma reta, ou seja, um determinante de ordem três completado por uma coluna de 1 (elemento neutro da multiplicação). Ao igualar o determinante a zero, determinamos a representação cartesiana da reta que passa pelos dois pontos considerados por meio do ostensivo funcional implícito $(ax + by + c = 0)$.

Ao introduzir a noção de reta no plano, o autor utiliza os ostensivos funcional $(y = ax + b)$ e gráfico, mas não faz a passagem do ostensivo funcional implícito para o ostensivo funcional. A utilização do ostensivo funcional para representar uma reta está associada à abordagem proposta, uma vez que o autor considera a noção de coeficiente angular e , a partir do ostensivo gráfico, determina o mesmo por meio da noção de tangente do ângulo que a reta forma com o eixo dos x , o que lhe permite deduzir a representação cartesiana $(ax + by + c = 0)$, mesmo não utilizando essa nomenclatura.

Na sequência, a ênfase é dada à representação funcional $(y = mx + n)$ com o objetivo de estudar as posições relativas de duas retas no plano por meio da relação entre seus coeficientes angulares. O estudo das retas no plano prossegue e são apresentadas ainda as noções de distância entre ponto e reta e área de uma região triangular.

Os tipos de tarefas propostos aos estudantes são centrados na determinação das diferentes representações e no estudo de tarefas de Geometria Sintética por meio da Geometria Analítica, ou seja, as tarefas propostas aos estudantes exigem apenas o nível técnico e mobilizável.

São apresentadas ainda as noções de circunferência e cônicas com suas respectivas representações e propriedades.

Para a análise da relação institucional existente no Ensino Superior, escolhemos a obra de Boulos e Camargo (2004). Nossa opção deve-se ao fato de ser esta obra a mais indicada nos planos de ensino dos cursos de Licenciatura em Matemática. Nesta obra, os autores propõem o estudo da Geometria Analítica, iniciando com a noção de vetores no espaço, para a qual os autores explicitam que irão trabalhar com pontos e retas no espaço tridimensional, o que pode representar um momento para o professor associar aos conhecimentos de Geometria Analítica no plano desenvolvido no Ensino Médio.

Ao considerar a noção de ponto, os autores explicitam que este será representado pelo ostensivo letra (A, B, C,...) e a noção de segmento de reta pelo ostensivo segmento (segmento PQ), utilizando os pressupostos da Geometria Euclidiana. Os autores não utilizam a nomenclatura ostensivo, apenas a representação.

Os vetores são introduzidos por meio da ostensiva flecha (\uparrow) e é com essa representação que é definida a operação de adição e suas propriedades, sendo a regra do paralelogramo utilizada para determinar o módulo do vetor resultante. É definida ainda a operação de multiplicação de um vetor por um escalar (número real) e suas propriedades. Ainda em relação à noção de vetores, são consideradas as noções de dependência e independência linear, base e mudança de base, utilizando o ostensivo vetor intrínseco (\vec{u}). São consideradas ainda as noções de produto escalar, produto vetorial, duplo produto vetorial e produto misto, com suas respectivas propriedades que serão utilizadas como ferramentas explícitas para introduzir novas noções.

Após o estudo dos vetores em espaços tridimensionais, mais especificamente em \mathbb{R}^3 , os autores introduzem a noção de sistema de coordenadas no espaço \mathbb{R}^3 e deduzem a fórmula para determinar a distância entre dois pontos.

Na sequência, introduzem a noção de reta em \mathbb{R}^3 por meio de uma representação paramétrica $\vec{XA} = \delta \vec{v}$, sendo X um ponto qualquer da reta, A um ponto dado pertencente à reta, \vec{v} um vetor diretor da reta e δ um número real. A passagem da representação paramétrica para a representação cartesiana fica implícita na representação simétrica de uma reta $\left(\frac{x-a}{\delta} = \frac{y-b}{\delta} = \frac{z-c}{\delta}\right)$, na qual $A = (a, b, c)$, $X = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (e_1, e_2, e_3)$. Observamos aqui que ao considerar as igualdades, por exemplo, $\frac{x-a}{\delta} = \frac{y-b}{\delta}$ e $\frac{y-b}{\delta} = \frac{z-c}{\delta}$, podemos efetuar a passagem da representação simétrica para a representação cartesiana de uma reta, mas essa passagem não é realizada pelos autores.

Após o estudo das representações de retas no espaço \mathbb{R}^3 e suas propriedades, os autores introduzem o estudo do plano no espaço \mathbb{R}^3 , que é definido por meio de uma representação paramétrica $\vec{XA} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, sendo X um ponto qualquer do plano, A um ponto dado do plano, \vec{u} e \vec{v} dois vetores linearmente independentes que determinam o plano (vetores diretores) e α e β dois números reais.

Na sequência, é definida a representação cartesiana do plano por meio da noção de determinante, a saber: $\det(\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, sendo X um ponto qualquer, A um ponto dado do plano, \vec{u} e \vec{v} dois vetores linearmente independentes que determinam o plano e \vec{AX}, \vec{u} e \vec{v} vetores linearmente dependentes.

Os autores introduzem ainda a noção de vetor normal ao plano para, na sequência, determinar a representação cartesiana de um plano no espaço \mathbb{R}^3 ($\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$) por meio do produto escalar entre um vetor \vec{AX} do plano e um vetor normal ao plano \vec{n} , mas a passagem de uma representação cartesiana para uma representação paramétrica não

é tratada pelos autores. São considerados ainda o estudo das posições relativas entre retas e planos, perpendicularismo e ortogonalidade, ângulos entre duas retas, ângulos entre planos e as distâncias entre ponto e reta, reta e reta, reta e plano, plano e plano. A proposta de estudo prossegue com as definições e representações das cônicas e suas propriedades.

Em relação aos tipos de tarefa, observamos que é dada ênfase aos tipos de tarefas que correspondem à representação de retas e planos dados, seus pontos e seus vetores diretores. Os tipos de tarefa de aplicação são apenas intramatemáticos, ou seja, não exigem conhecimentos de outras disciplinas, sendo focados apenas na passagem da Geometria Euclidiana Espacial para a Geometria Analítica.

Como esperado na macro avaliação ENADE dos anos de 2014 e 2017, a ênfase é dada à Geometria Analítica plana por meio das representações e intersecções de cônicas; e as representações de retas em \mathbb{R}^2 e planos em \mathbb{R}^3 são tratadas nas questões de Álgebra Linear. Observamos aqui que a análise dos livros didáticos acompanhada das provas do ENADE nos mostra que as praxeologias desenvolvidas, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior, são exploradas na prova do ENADE, mas essas não exigem uma articulação entre quadros e um nível de conhecimento que ultrapasse a mobilização das técnicas de passagem de uma representação à outra.

■ Conclusão

A análise das expectativas institucionais via documentos oficiais, livros didáticos e a macro avaliação ENADE deixa transparecer que compete ao professor identificar os conhecimentos prévios de seus estudantes e propor novas praxeologias que possibilitem articular os conhecimentos de Geometria Analítica desenvolvidos no Ensino Médio com os novos conhecimentos introduzidos no Ensino Superior, o que pode dificultar o estudo deste domínio pelos estudantes.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes podem estar relacionadas ao tratamento puramente descritivo das tarefas que lhes são propostas, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior, pois além de trabalharem em dois espaços distintos que não são articulados; em ambos os casos, não encontramos tipos de tarefas associadas ao nível disponível que correspondem às possíveis aplicações intra e extramatemáticas que poderiam motivar o estudo dessa disciplina e mostrar sua importância para o desenvolvimento das ciências.

Ressaltamos que a falta de articulação entre as duas etapas escolares pode conduzir a obstáculos didáticos difíceis de serem superados, como, por exemplo, considerar que \mathbb{R}^2 é um subespaço de \mathbb{R}^3 , dificuldade apresentada por muitos estudantes, quando se inicia o curso de Álgebra Linear.

■ Referências bibliográficas

- Bosch, M., Chevillard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-124.
- Boulos, P., Camargo, I. (2004). *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda.
- Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf
- Brasil. (2002). *Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias*. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>

- Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de <http://www.gfen.asso.fr/fr/dial155>
- Chevallard, Y. (1998). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>
- Dante, L. R. (2017). Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática.
- Dias, M. A. ; Artigue, M. ; Jahn, A.P. ; Campos, T. M. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In: PME34 - Psychology of Mathematics Educations 34, Belo Horizonte. v. 2. p. 129-136.
- Dias, M. A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Tese de doutorado publicada, Université Paris VII. França.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.
- Douady, R. (1984). Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Tese de doutorado publicada. Universidade de Paris VII. França.
- Guedet, G. ; Bosch, M. ; diSessa, A.A. ; Keon, O.H. ; Verschaffel, L. (2016). Transitions in Mathematics Educations. Hamburg: Springer Nature.
- Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.
- Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), L'enseignement de l'algèbre linéaire en question (pp. 149-157), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2), 139-190.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In Actes de la journée en hommage à Régine Douady, 13-30. Paris: Didirem.