

# MÁQUINAS MANIPULABLES GENERADORAS DE EVENTOS INESPERADOS: ESTUDIANDO SU CAMBIO Y VARIACIÓN

## MANIPULATIVE TOOLS WHICH GENERATE UNEXPECTED EVENTS WHEN STUDYING THEIR CHANGE AND VARIATION

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral  
Cinvestav-IPN. (México)  
jesus.hernandez@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

### Resumen

Este escrito tiene como primer objetivo mostrar la fundamentación teórica de un instrumento exploratorio cuya base proviene del análisis histórico/epistemológico de la génesis del caos determinista desde una perspectiva socioepistemológica. El taller impartido en RELME 32 consistió en la puesta en escena del instrumento mencionado, un segundo objetivo se centra en las actuaciones de los asistentes, centrando la atención en *las prácticas* que se presentan en las interacciones entre un manipulativo físico y sus gráficas de posición y velocidad. Durante la sesión los participantes interactuaron físicamente con un péndulo doble articulado vivenciando exploraciones que promovieron la construcción de hipótesis predictivas y formas de pensar en los movimientos erráticos o no predecibles desde una visión determinista.

**Palabras clave:** máquinas manipulables, determinismo, caos, socioepistemología

### Abstract

The first aim of this paper is to show the theoretical foundation of an exploratory tool based on the historical/epistemological analysis of the genesis of the deterministic chaos from a socioepistemological perspective. The workshop in the 32nd RELME consisted in putting into practice the already mentioned tool. The second objective focuses on the participants' actions, enlightening *the practices* that take place in the interactions between a physical manipulative and its graphs of position and speed. Throughout the workshop, the participants physically interacted with an articulated double pendulum, experiencing explorations that promoted the construction of predictive hypotheses and ways of thinking about erratic or unpredictable movements from a deterministic view.

**Key words:** manipulatives tools, determinism, chaos, socioepistemology

## ■ Introducción

Asumimos que las *máquinas manipulables o manipulativos físicos* son modelos vinculados con ciertos conceptos matemáticos y que en su interacción promueven la emergencia de prácticas predictivas. Con base en el estudio histórico – epistemológico realizado por Hernández Zavaleta & Cantoral Uriza (2018) sobre la génesis del Caos determinista se ha elegido una máquina que produce *eventos inesperados*: el péndulo doble articulado. Uno de los objetivos es proponer a este manipulable como una forma de contribuir en la construcción y modificación de hipótesis sobre el cambio y su variación en escenarios promotores de usos con finalidad predictiva.

Este taller forma parte de una investigación en curso (Hernández Zavaleta, 2017) que pretende caracterizar las acciones y sus formas de evolución en actividades y prácticas, con base en el *modelo de anidación de prácticas* de la Sociepistemología (Cantoral, 2016). Como hipótesis de investigación tenemos que la matemática del cambio y la variación ante fenómenos de inestabilidad dinámica configura una práctica que exige de formas de pensamiento diversas; por un lado, del pensamiento predictivo que sigue una tradición newtoniana y por otro aquel fruto del enfrentamiento con *eventos inesperados* ambos relacionados por los usos que acompañan a *pequeñas variaciones*.

**El objetivo del taller** fue que los participantes interactuaran con el mecanismo manipulable, físicamente, para elaborar argumentos sobre la explicación y predicción de sus estados, haciendo énfasis en el uso de *la pequeña variación* ante la aparición de *eventos inesperados*.

En este caso *la pequeña variación* se refiere a hacer cantidades, entre las variables o en su comparación, lo suficientemente pequeñas que permitan construir argumentos predictivos mediante estados subsecuentes de un fenómeno aparentemente aleatorio. Por otro lado, *los eventos inesperados* los entendemos como aquellos estados de transición entre comportamientos estables o predecibles a aquellos de inestabilidad o cuasi-estabilidad que imposibilitan la predicción. Para poder abordar el trabajo con pequeñas variaciones, se recurrirá al *cambio de naturaleza del problema*; por ejemplo, el tipo de movimiento que realiza un péndulo doble articulado depende de la longitud del segundo brazo y de sus condiciones de inicio.

## ■ Descripción del péndulo doble articulado

La máquina manipulable que se utilizó durante el taller es una base de 46 cm de altura que sostiene una barra de aluminio de 25 cm de longitud (Figura 1A) que se mueve de izquierda a derecha tomando como pivote el rodamiento en la parte superior haciendo las veces de un péndulo simple. En la parte inferior se encuentra un perno con cuerda que permite sostener una segunda barra y permitiendo el movimiento articulado del péndulo doble (Figura 1 B y C), en la parte trasera de la base se sostiene otra barra con las mismas propiedades que la descrita, de esta forma el manipulable permite comparar dos péndulos que comienzan en la misma posición (ver Figura 1 D).



Figura 1. A) péndulo simple, B) péndulo doble en reposo, C) articulación del péndulo doble

El perno en la parte inferior de la primera barra permite intercambiar la segunda barra por otras de diferentes longitudes, estas barras tienen longitud de 3, 6, 9, 12, 15, 18 y 20 cm; la medida de tres centímetros se eligió debido a que era la más corta que podía sostener el tipo de rodamiento utilizado y la barra de 20cm es la más larga que puede girar sin que otros elementos en la estructura la obstaculicen. En la Figura 2 se muestran las barras de izquierda a derecha en orden descendente.



Figura 2. Barras intercambiables del péndulo doble

### ■ Posicionamiento teórico

La discusión sobre las *máquinas manipulables* o simplemente manipulativos para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas ha sido tratada desde diferentes perspectivas; por ejemplo, Fisher, Samuels y Wangberg (2017) reportan una experiencia exitosa del uso de manipulativos físicos para la enseñanza/aprendizaje del cálculo de varias variables particularmente en el concepto de la derivada parcial. Por otro lado, Thomas y Martín (2017) argumentan que un manipulativo virtual bien diseñando ayuda a los estudiantes de cálculo a la comprensión de la convergencia de la serie de Taylor. Otras investigaciones (Moyer & Westenskow, 2013; Sengupta, Krishnan, Wright, & Ghassoul, 2015) relacionan el uso de manipulativos físicos y virtuales con las materias relacionadas con STEM (siglas en inglés de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) haciendo evidente un uso relevante en la conformación de conceptos y objetivos de las ciencias y las ingenierías.

Los posicionamientos mencionados, en general, pretenden realizar una transferencia del objeto matemático al objeto físico o viceversa centrándose en el estudio de uno de ellos y verificar su relación con el otro. Desde la perspectiva socioepistemológica asumimos la existencia de una relación simbiótica y transversal entre los manipulativos físicos y los objetos matemáticos; en la cual nuestro interés se centra en las interacciones entre ellos y particularmente en las formas emergentes de usos de la variación con intención predictiva.

### ■ Aspectos teóricos del diseño

Desde una aproximación socioepistemológica en el trabajo de Hernández Zavaleta y Cantoral Uriza (2018) se reportan tres *prácticas* en la *búsqueda del carácter estable del cambio* en situaciones de aparición de *un evento inesperado*. En la Figura 3 se muestra en la parte superior, de izquierda a derecha, la propuesta de H. Poincaré sobre el teorema de recurrencia para averiguar aspectos de estabilidad en las soluciones, E. Lorenz se encuentra con la sensibilidad a las condiciones iniciales y R. May propone elaborar un espacio de parámetros para identificar los tipos de comportamientos de la ecuación logística; en la parte baja, en el mismo orden, las prácticas que se hacen evidentes son: la búsqueda de lo circular o lo que se repite, la comparación de soluciones en el tiempo y la clasificación de comportamientos, en su conjunto forman parte de una forma de actuar ante lo errático (*la aparición de eventos inesperados*).



Figura 3. Paso de los objetos a las prácticas en la búsqueda del carácter estable del cambio ante eventos inesperados.

De manera puntual, *Buscar lo circular* se refiere a la búsqueda de periodicidades que se reflejan en trayectorias cerradas o comportamientos repetitivos y, su interpretación y representación está sujeta a la práctica de referencia en la que se localiza (Barrow-Green, 1997; Poincaré, 1892). *Comparar estados en el tiempo*: se refiere a la comparación puntual y global de dos comportamientos que comienzan con condiciones iniciales cercanas (del orden de milésimas) (Lorenz, 1963; May, 1974). Por último, *clasificar comportamientos* se refiere a la configuración de *códigos y argumentos* que permitan dar cuenta de la diversidad de comportamientos que existen en un sistema dinámico al cambiar su naturaleza mediante sus parámetros (May, 1976; Hale & Kocak, 1991).

El diseño está basado en el desarrollo intencional de las prácticas mostradas en la parte inferior de la Figura 3, la decisión de utilizar el péndulo doble articulado se debió a que una de las formas de acción que Poincaré mostró en el estudio del Problema de los Tres Cuerpos fue trabajar con péndulos forzados; situación que refleja su intención de buscar soluciones periódicas en una simplificación del problema que puede controlar. Por otro lado, nos basamos en un ciclo que vislumbramos en los trabajos de E. Lorenz y R. May para modelar el clima y el crecimiento poblacional respectivamente.

El ciclo propuesto se plasma en la Figura 4: una vez que tienen el objeto matemático o físico a estudiar (sistema dinámico), se procede a la *modificación de la naturaleza del problema* que se refiere a comenzar a modificar los parámetros del sistema que inciden la dinámica general, esto propicia la aparición de comportamientos que no son predecibles para ciertos valores de los parámetros; en este caso se promueve la emergencia de formas argumentativas sobre la predicción del cambio y se recurre a la selección adecuada de condiciones iniciales que vuelve a reiniciar el ciclo. En el caso de los eventos históricos estudiados las gráficas eran utilizadas como formas válidas de argumentación.



Figura 4. Ciclo de estudio de un sistema dinámico

### ■ Estructura del taller

Durante el taller se analizaron los movimientos de una máquina manipulable: el péndulo doble articulado, de forma perceptual y sin sistemas de referencia predefinidos se les solicitó la creación de hipótesis utilizando figuras y gráficas como formas argumentativas. El taller se estructuró en cuatro exploraciones (ver Figura 5): durante la exploración uno se solicitó el reconocimiento de la máquina manipulable de forma libre con el objetivo de propiciar la práctica de la búsqueda de lo circular, las exploraciones dos y tres se orientaron a la construcción de argumentos sobre la comparación de soluciones en el tiempo, el momento tres guió la *comparación de comportamientos en el tiempo*, en la exploración cuatro se pidió a los participantes *cambiar la naturaleza del sistema* mediante el cambio de longitud de la barra inferior para dar argumentos sobre los diferentes tipos de comportamiento que provoca el cambio de tamaño incidiendo en la *clasificación de comportamientos*, finalmente en el momento cinco se construyó una discusión sobre los comportamientos en la aparición de *eventos inesperados*.



Figura 5. Estructura del taller

**Exploración I:** la configuración inicial del péndulo es con la barra inferior de 20 cm una de las principales características de este movimiento es que es caótico, es decir, no se pueden hacer predicciones sobre su posición y velocidad en un tiempo determinado. Se les pide a los participantes que observen y describan con sus palabras el movimiento una pregunta orientadora es ¿qué les llama la atención de este movimiento? Posteriormente se les invita a trabajar en equipo con la máquina manipulable y a intercambiar el tamaño del brazo inferior.

**Exploración II:** esta exploración se divide en dos partes, antes de comenzar se les pide colocar una barra inferior de 20cm y marcarla en su parte más baja; en la primera hoja de trabajo aparece el siguiente enunciado: Describan

el movimiento de la barra inferior primero haciendo dibujos (trazos o diagramas), después expliquen por escrito sus dibujos y discutan sobre las variables que se ponen en juego en su forma de moverse. Compartan con sus compañer@s de equipo. Pueden manipular la máquina las veces que sea necesario. En la segunda hoja de trabajo se les pide que sigan trabajado con la barra inferior de 20cm y que describan el movimiento de la barra superior primero con dibujos (trazos, diagramas y graficas), después expliquen por escrito sus dibujos y compartan con sus compañer@s de equipo. Pueden manipular la máquina las veces que sea necesario.

**Exploración III:** El objetivo de esta exploración es diferenciar comportamientos predecibles de los que no lo son, se les pide llenar la Tabla 1 (faltan renglones en la tabla) comparando el movimiento de los dos péndulos (por lo menos 4 veces dejándolos caer siempre desde la misma posición y con los brazos doblados) prueben con diferentes tamaños de barra y digan si tienen la misma posición en el segundo solicitado ¿En todos los intentos mantienen la misma posición en el tiempo solicitado? Marquen con una / si la mantienen y con una X si no la mantienen. Tomando en cuenta los datos recabados hagan una descripción breve del comportamiento de las barras en cada tiempo solicitado.

Tiempo en segundos	5		10		20	
Barra en cm						
Sin barra	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.
Descripción						
3	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.
Descripción						
....	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.
Descripción						
20	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.

Tabla 1. Comparación de comportamientos en 5, 10 y 20 segundos

**Exploración IV:** la intención de esta exploración es que ayudados por las discusiones y los datos obtenidos en las exploraciones anteriores comiencen a clasificar tipos de comportamientos elaborando bosquejos de la gráfica de posición/tiempo de la barra superior. El enunciado que aparece en la hoja de trabajo es: Elaboren una gráfica (posición angular vs tiempo) del comportamiento de la barra superior en la que se muestre todo el tiempo que dura el movimiento hasta detenerse (una gráfica por cada tamaño de barra). Tomen en cuenta los datos obtenidos en el inciso anterior ¿Cómo ayuda comparar entre una y otra gráfica a dar argumentos sobre la posición de la barra superior en un tiempo determinado?

### ■ Actuación de un participante

El taller se llevo a cabo en dos sesiones de 90 minutos, el perfil de formación inicial de los participantes era de profesores de nivel básico, estudiantes de maestría y doctores Matemática Educativa. La dinámica interna de los participantes permitió indagar sobre las primeras dos exploraciones, sin embargo, es importante decir que hemos

comenzado a observar que las prácticas propuestas aparecen de un modo entrelazado en las formas de interacción de los participantes con las diferentes exploraciones que se les solicitan.

A continuación, se presenta la actuación de un participante [P1] del taller después de haber concluido con las primeras dos exploraciones, este episodio se retomó de la plenaria en la que compartían sus producciones individuales después de haberlas discutido con su equipo.

[ 1P1]P1: Bueno yo vi tres casos, yo veía que se parte de una idea que la barra inferior de 20 cm hay que marcarla en parte más baja, me imagine la parte más baja de la barrita, entonces me imagine si estaba estirada, si estaba en medio con la otra o si estaba en punto intermedio [ simula la máquina con una pluma y su dedo].

E: ¿los puntos son desde donde la tirabas?

[ 2P1]P1: sí, entonces, trate de dibujar más o menos lo que hace la maquinita [muestra su hoja de trabajo (ver Figura 5) y la señala] con los tres casos, uno estirado, uno a medias y el otro desde abajo. Trataba de ver la parte más baja antes de que se estabilizaran ... mientras más alta era más oscilatorio el movimiento, estaba en la parte alta era más oscilatorio [ mueve su pluma de arriba abajo], si lo dejabas doblado, era... mmm.. menos inestable esta trayectoria, si se movía muy loca,

[ 3P1]P1: Te lo muestro acá, caso 1 [ pone el péndulo arriba con el brazo estirado], caso 2 pone el péndulo arriba con el brazo doblado, caso 3 péndulo abajo con la barra inferior un poco levantada. Porque en el fondo lo que yo entendí de la pregunta es que era ver, esa distancia, la distancia más baja de la barra en esta yo me la imaginé con la pregunta, ósea yo trataba de ver cuándo se estabilizaba acá [señala la barra de soporte del péndulo].

- Si yo lo hacía acá [caso 1] la oscilación se vuelve loca, muy loca,
  - Si lo hacía acá [caso 2] también se vuelve loca, pero en menor grado que la otra
- En este [caso1] incluso a veces la vuelta completa y en esta [caso 2] no da el loop.
- y en esta [caso 3] es mucho más tranquilo es más fácil en este caso predecir. O sea, algo tiene que ver con la distancia ...

E: ¿con la distancia desde donde la tiras?

[ 4P1] P1: claro

En [1P1] habla de tres casos y los dibuja como se muestra en la Figura 6, marcados con los números en círculo, cada dibujo es acompañado de su respectiva “figura de ondas”; las configuraciones que P1 plantea corresponden a diferentes condiciones de inicio y cada una de estas afecta el comportamiento del péndulo articulado con la barra de 20cm en la parte baja, luego en [2P1] establece una hipótesis sobre estas configuraciones: *mientras más alta era más oscilatorio el movimiento, estaba en la parte alta era más oscilatorio* para concluir que si lo dejaba doblado su trayectoria era menos inestable, en [3P1] de nuevo recurre a la estabilidad como argumento y confirma que es lo que buscaba al cambiar las condiciones, entonces especifica haciendo que en el caso 1 *se vuelve loca*, en el caso 2 también se vuelve loca pero en menor grado que en el primero y dice que el caso 3 es mucho más tranquilo y es más fácil predecir.

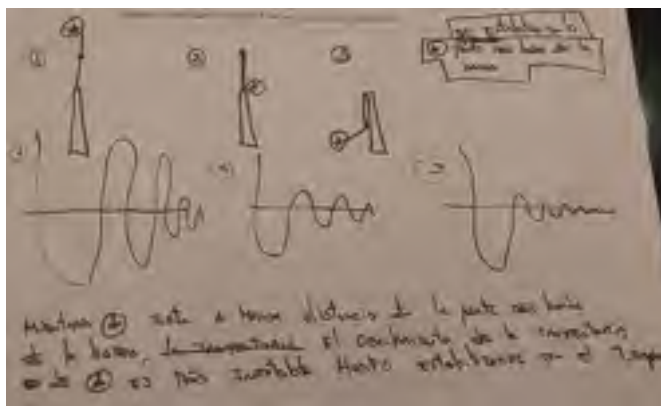


Figura 6. Producciones de P1 después de las primeras dos exploraciones

Como primera aproximación al análisis se puede decir que P1 establece la búsqueda de la estabilidad como una forma de orientar sus acciones, este tipo de actuaciones están relacionadas con el desarrollo de la práctica de la *búsqueda de lo circular* propia de una forma de pensar determinista, continuando en esta línea de argumentación recurre a la selección adecuada de condiciones de inicio que le permitan hacer predicciones sobre la posición del péndulo en un tiempo determinado llegando a concluir que el caso 3 es mucho más tranquilo y por lo tanto predecible; las explicaciones que da en el caso 1 y 2 son particularmente interesantes debido a que establece que un movimiento es más “loco” que el otro y lo confirma en su producción escrita recurriendo a formas figurativas que le permiten argumentar sobre el tipo de comportamiento al que se refería, es decir, en la Figura 6 se puede ver en el dibujo a la izquierda una figura de ondas de arriba abajo un tanto desproporcionadas en su amplitud y frecuencia, mientras que las otras tienden a tener un comportamiento con más proporción entre cada onda, esto nos da indicio de la *práctica de clasificación de comportamientos*.

## ■ Reflexiones finales

Una de nuestras hipótesis de investigación considera que el desarrollo intencional de las prácticas esta permeado por los episodios históricos que fueron problematizados, desde esta perspectiva, el instrumento exploratorio promueve la confrontación del paradigma determinista, en el que la predicción es total, contra el paradigma del caos en el que la predicción es limitada o nula; uno de los primeros argumentos que aparece en las personas que tratan con nuestro instrumento es que el movimiento del péndulo doble está regido por ecuaciones que explican y predicen su posición y velocidad para todo tiempo y la idea de utilizar métodos de probabilidad o estadística aparece al avanzar en la interacción y en la secuencia de preguntas.

Al analizar la actuación de P1 se evidenció la *búsqueda del carácter estable del cambio* al proponer diferentes condiciones de inicio y buscar aquellas que le permitiera predecir o que fueran mejor comportadas (estables). Las prácticas que se pusieron en juego son la *búsqueda de lo circular* expresada en la necesidad de encontrar periodicidades que le dan estabilidad al sistema y la *clasificación de comportamientos* como una práctica que permite discernir lo que puedo predecir de lo que no. Por otro lado, en P1 no se lograron observar indicios del uso de la *pequeña variación* ni de la práctica de *comparación de soluciones en el tiempo*; suponemos, para que ambas aparezcan se debe explotar la idea de repetir el experimento con las mismas condiciones de inicio, se espera lograr su aparición cuando se pongan en juego las exploraciones III y IV del instrumento.

Para finalizar, es importante hacer énfasis que el análisis del episodio mostrado es una aproximación al método y a la metodología que nos permitirá la construcción de categorías de análisis precisas que permitan, por un lado,



evidenciar una transición entre *acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas* de acuerdo con el modelo de anidación de prácticas de la sociepistemología y por otro el rastreo de construcción de hipótesis predictivas que hacen uso de la *pequeña variación*.

## ■ Referencias

- Barrow-Green, J. (1997). *Poincaré and the three body problem*. USA: American Mathematical Society.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.
- Fisher, B., Samuels, J., & Wangberg, A. (2017). Instrumental Genesis and Generalization in Multivariable Calculus. *20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1219-1224). San Diego, California: SIGMAA.
- Hale, J., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer.
- Hernández Zavaleta, J. E. (2017). *Prácticas emergentes ante el enfrentamiento con dinámicas erráticas. Un estudio del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Memoria Predoctoral, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV IPN.
- Hernández Zavaleta, J. E., & Cantoral Uriza, R. (2018). Caracterización de prácticas asociadas con la predicción en el enfrentamiento con lo errático: un estudio sociepistemológico. *Transformaciones [On line]*, 177-189.
- Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*(20), 130-141. Retrieved diciembre 13, 2017, from [https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2)
- May, R. (1974). Biological populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos. *Science, new series*, 186(4164), 645-647. Retrieved diciembre 13, 2017, from [https://www.researchgate.net/profile/Robert\\_May5/publication/18754203\\_Biological\\_Populations\\_with\\_Non\\_overlapping\\_Generations\\_Stable\\_Points\\_Stable\\_Cycles\\_and\\_Chaos/links/541814990cf2218008bf23d5.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Robert_May5/publication/18754203_Biological_Populations_with_Non_overlapping_Generations_Stable_Points_Stable_Cycles_and_Chaos/links/541814990cf2218008bf23d5.pdf)
- May, R. (1976). Simple Mathematics Models with very complicated Dynamics. *Nature*(261), 459-467. Retrieved diciembre 13, 2017, from [http://www.math.miami.edu/~hk/csc210/week2/May\\_Nature\\_76.pdf](http://www.math.miami.edu/~hk/csc210/week2/May_Nature_76.pdf)
- Moyer, P. S., & Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 35-50.
- Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris : Gauthier - Villars et fils, de l'école polytechnique .
- Sengupta, P., Krishnan, G., Wright, M., & Ghassoul, C. (2015). Mathematical Machines and Integrated Stem: An Intersubjective Constructionist Approach. (S. Zvacek, Ed.) *CSEDU 2014*, 272-288.
- Thomas, M., & Martin, J. (2017). Virtual Manipulatives, Vertical Number Lines, and Taylor Series Convergence. *20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 963-071). San Diego, California: SIGMAA.