

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE UN GRADO 7° AL RESOLVER UN PROBLEMA DE PROPORCIONALIDAD

MATHEMATICAL PRACTICES IN 7TH GRADE STUDENTS IN SOLVING PROPORTIONALITY PROBLEMS

Miguel Ángel Hurtado Martínez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)

miguelhurtado@colegiosangelestunja.com

Resumen

En este artículo se presentan los resultados parciales de una investigación en curso, desarrollada desde un enfoque mixto, y relacionada con los significados de la proporcionalidad. Se presenta un análisis epistémico/cognitivo a través del cual se identifican los objetos y significados, activados en la resolución de un problema de ampliación/reducción de una fotografía aérea. Se estudia la solución dada por el investigador (configuración epistémica), y por un grupo de estudiantes de grado 7° de educación básica (configuración cognitiva). El análisis epistémico permite la identificación previa de algunos conflictos potenciales que pueden estar presentes en la resolución del problema, mientras que el cognitivo comprende la identificación de algunos de los significados dados a la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes. En estos resultados se presenta la reflexión pedagógica del profesor investigador como un aporte a la enseñanza del objeto matemático proporcionalidad.

Palabras clave: proporcionalidad, objetos y significados, configuraciones epistémicas y cognitivas

Abstract

This article presents the partial results of an ongoing research developed under a mixed approach and related to the meanings of proportionality. This research includes an epistemic/cognitive analysis by means of which the emerging objects and meanings involved in an aerial photograph enlargement/reduction problem are identified. The epistemic analysis allows the previous identification of some potential learning conflicts which may be present when solving the problem; whereas the cognitive one deals with the identification of some of the meanings given to proportionality in the mathematical practices of the students. These research results show the pedagogical reflection of the teacher- researcher as a contribution to the teaching of proportionality as a mathematical object.

Key words: proportionality, objects and meanings, epistemic and cognitive configurations

■ Introducción

La enseñanza y aprendizaje de los objetos del conocimiento matemático: razón, proporción y proporcionalidad, es compleja, tanto para profesores como para estudiantes debido a su diversidad de significados, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Obando, 2015). Como dan a conocer Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017) en algunas ocasiones, la diversidad de significados del objeto proporcionalidad es desconocida por el profesor de matemáticas, este desconocimiento hace que el profesor enseñe a sus estudiantes la proporcionalidad desde el formalismo, es decir aplicando algoritmos como la regla de tres simple o compuesta al resolver problemas de proporcionalidad y dejando de lado el desarrollo de otras habilidades como el razonamiento proporcional.

Para Arboleda y Castrillón (2013) una de las posibles causas del formalismo con que se enseña la proporcionalidad en las instituciones educativas en Colombia es que los profesores no reflexionan sobre los significados que dan los estudiantes a la proporcionalidad, así como aquellos que emergen a través de la historia de la matemática. Desde esta perspectiva, se considera necesario estudiar las formas como han emergido los significados de los objetos: razón, proporción y proporcionalidad en los distintos contextos históricos, culturales y sociales, y además realizar estudios que permitan comprender la diversidad de significados atribuidos a la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes. Las reflexiones desde esta perspectiva por parte del profesor de matemáticas pueden llegar a favorecer el desarrollo de las competencias Didáctico–Matemáticas de los profesores (Pino-Fan, 2017).

El estudio de los significados de los objetos de conocimiento: razón, proporción y proporcionalidad desde estudios históricos, epistemológicos y fenomenológicos, así como la caracterización y reflexión de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver situaciones problema de proporcionalidad, pueden llegar a transformar las prácticas del profesor-investigador: por tal motivo, este artículo presenta un avance de la Tesis de Maestría del autor intitulada “*Significados de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo*”, la cual tiene como objetivo: Caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas institucionalizadas en un grupo de estudiantes de grado séptimo de un colegio de la ciudad de Tunja (Colombia), al resolver situaciones problema sobre proporcionalidad.

En el desarrollo de la tesis se ha venido realizando un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad, además del diseño y aplicación de tres situaciones problema que han permitido obtener información significativa relacionada con los significados de la proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes. En este artículo se reporta el proceso investigativo que se siguió para el análisis de una de las situaciones problema, con el propósito de dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los significados de la proporcionalidad, presentes en las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja (Colombia) al resolver una situación problema de ampliación/reducción de una fotografía?

■ Marco teórico

El marco teórico y metodológico desde el cual se abordan los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos - EOS (Godino, 2017). El EOS centra su atención en el problema de los significados y la representación del conocimiento matemático mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos de tipo antropológicos, semióticos y socioculturales. El estudio del proceso de asignar significado considera la relevancia de varios conceptos: la práctica matemática, los objetos, los significados y las configuraciones epistémicas/cognitivas. A continuación, se describen los conceptos más importantes para el desarrollo del estudio y la relación con el análisis de los significados de la proporcionalidad, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Se considera como *práctica matemática*, a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla, a otros contexto y problemas (Godino, 2017); las practicas pueden ser institucionales (grupo de personas que comparten una clase especifica de situaciones problema) o personales (estudiante que resuelve la situación problema). En el artículo se analizan las prácticas personales de los estudiantes evidenciadas en sus producciones escritas al resolver una situación problema de ampliación/reducción de una fotografía.

Como *objeto matemático*, se considera en el EOS, a cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático, designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Según D' Amore y Godino (2007) “los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo” (p.207). Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a la sola definición matemática. El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos o entidades primarias: *a) Lenguaje*: Términos y expresiones matemáticas, símbolos, representaciones gráficas, etc. *b) Situaciones- problema*: Aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc. *c) Conceptos*: Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición. *d)Proposiciones*: Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba. *e) Procedimientos*: Técnicas de cálculo, operaciones algoritmos. *f) Argumentos*: Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas (Godino, 2017).

Los objetos matemáticos o entidades primarias se analizan en una *configuración epistémica* y corresponde a la solución de la situación problema desde la perspectiva del profesor-investigador. En este sentido, la configuración epistémica, contempla el estudio de los seis tipos de entidades primarias que se relacionan entre sí, formando configuraciones más complejas, las cuales se definen como redes de objetos, que son los que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas (Rivas y Castro, 2011).

La propuesta metodológica del EOS permite efectuar análisis epistémicos los cuales tienen tres objetivos: el primero, explorar los objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema, el cual se asume como un análisis de referencia; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir posibles dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes dan al problema, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales y posibles prácticas matemáticas de los estudiantes. Además, en el marco del EOS se propone efectuar *análisis cognitivos* que consisten en la caracterización de las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes en relación a como aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje (D' Amore y Godino, 2007). El análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas constituyen finalmente el “sistema de prácticas matemáticas” que fija los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad activados en la resolución de la situación problema propuesta.

■ Metodología

Esta investigación se desarrolla desde un enfoque mixto; el cual hace uso de las metodologías de la investigación cualitativa y cuantitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2014); se analiza la variable cuantitativa: Número de estudiantes que evidencian cierto tipo de práctica matemática al resolver la situación problema propuesta, y además se caracterizan los significados de la proporcionalidad mediante el análisis de las producciones escritas de los estudiantes. La investigación se realizó en un colegio de la ciudad de Tunja del departamento de Boyacá (Colombia) con un grupo de 28 estudiantes de grado séptimo de educación básica.

Para la recogida de los datos, se entregó a cada participante una fotografía aérea tomada por un dron de dimensiones 25 cm × 20 cm, como se aprecia en la figura:



Figura 1. Fotografía de la Institución Educativa donde estudian las personas objeto de estudio. Fuente: Autor

Se plantearon las siguientes situaciones:

1. Si se desea ampliar la fotografía para que el lado de 25 cm mida 30 cm ¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía ampliada? Justifica tu respuesta.
2. Si ahora se desea reducir la fotografía para que el lado de 25 cm mida 5 cm ¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía reducida? Justifica tu respuesta.

La recogida de los datos tuvo lugar en cuatro clases de matemáticas, cada una de 50 minutos: En la primera los estudiantes realizaron una lectura sobre proporciones y se presentó la situación problema; en la segunda, los estudiantes resolvieron individualmente el problema; en la tercera, se realizó un trabajo cooperativo en equipos, donde se tomaron medidas de algunos lugares del colegio con el uso del metro y se realizaron comparaciones con la fotografía aérea. Finalmente, en la cuarta clase se realizó una plenaria acerca de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, del mismo modo, el investigador institucionalizó los significados pretendidos. Este artículo reporta las prácticas matemáticas realizadas en la segunda clase donde los estudiantes resolvieron individualmente el problema.

■ Resultados

Análisis epistémico

A continuación, se presentan las soluciones propuestas por el investigador a las preguntas 1 y 2 usando la estrategia de la regla de tres simples:

Solución propuesta a la pregunta 1: Si el lado de 25 cm de la fotografía equivale a 30 cm del lado de la fotografía ampliada, entonces 20 cm de la fotografía equivale a x cm de la fotografía ampliada.

Fotografía Original (cm)	Fotografía ampliada (cm)
25	30
20	X

$$\longrightarrow x = \frac{20 \times 30}{25} = 24$$

Respuesta: el lado de 20 cm quedara midiendo 24 cm en la fotografía ampliada.

Solución propuesta a la pregunta 2: Si el lado de 25 cm de la fotografía equivale a 5 cm del lado de la fotografía reducida, entonces 20 cm de la fotografía equivalen a x cm de la fotografía reducida.

Fotografía Original (cm)	Fotografía reducida (cm)
25	5
20	X

$$\longrightarrow x = \frac{20 \times 5}{25} = 4$$

Respuesta: el lado de 20 cm quedara midiendo 4 cm en la fotografía reducida.

Este tipo de situación problema es usado en geometría al comparar polígonos semejantes y es posible identificar cuatro posibles soluciones: hacer uso de una regla de tres simple, establecer una proporción aplicando la propiedad fundamental de las proporciones (el producto de medios es igual al producto de extremos), comparar las magnitudes mediante un proceso de reducción a la unidad y establecer la relación de porcentajes entre las magnitudes correspondientes de la fotografía original y la ampliada/reducida.

Una vez obtenidas las cuatro soluciones se procede a realizar una configuración epistémica, la cual corresponde a la identificación de los objetos primarios (lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) relacionados con la solución de la situación problema propuesta en la que se aplica la regla de tres simple.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (RELACIÓN DE REFERENCIA O DE USO)												
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)													
<p>El lado de 25 cm equivale a 30 cm del lado de la fotografía ampliada.</p> <p>El lado de 25 cm en equivaler a 5 cm del lado de la fotografía reducida.</p> <p>¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía ampliada?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Fotografía Original (cm)</th> <th>Fotografía ampliada (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>25</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>X</td> </tr> </tbody> </table> <p>¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía reducida?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Fotografía Original (cm)</th> <th>Fotografía reducida (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>25</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>X</td> </tr> </tbody> </table>	Fotografía Original (cm)	Fotografía ampliada (cm)	25	30	20	X	Fotografía Original (cm)	Fotografía reducida (cm)	25	5	20	X	<p>Razón como comparación entre magnitudes homogéneas.</p> <p>Medida relativa: lado de la fotografía original en relación con la medida del lado correspondiente de la fotografía ampliada/reducida.</p> <p>Igualdad entre razones (ecuación lineal o de primer grado).</p> <p>Magnitudes homogéneas.</p> <p>Regla de tres simple: constante de proporcionalidad, reducción a la unidad Divisiones/multiplicaciones, escalas y porcentajes.</p>
Fotografía Original (cm)	Fotografía ampliada (cm)												
25	30												
20	X												
Fotografía Original (cm)	Fotografía reducida (cm)												
25	5												
20	X												
<i>Conflictos relacionados con los elementos lingüísticos:</i>													
<ol style="list-style-type: none"> Comparar magnitudes mediante estrategias aditivas. No reconocer la situación problema como una tarea de proporcionalidad. No comprender las preguntas al razonar que solo se debe ampliar/reducir el lado de 20 cm, sin variar la medida del otro lado. 													
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)													
Razón entre segmentos	La razón entre dos segmentos es la comparación entre sus correspondientes magnitudes, (que cantidad es una magnitud tomada como referencia en relación con otra).												
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una al doble, el triple, la mitad, la otra también varía el doble, el triple, la mitad.												
Reducción a la unidad	Relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes (1 cm de la fotografía original equivale a 1,2 cm en la fotografía ampliada, 1 cm de la fotografía original equivale a 0,2 de la fotografía reducida o viceversa)												
Incógnita x	Valor desconocido que debe ser encontrado a partir de la resolución de una ecuación.												
Ecuación/igualdad de razones	Relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que interviene por lo menos una incógnita.												

Conflictos relacionados con los conceptos:

- Comparar segmentos no correspondientes.
- No reconocer las fotografías ampliada/reducida como proporcionales.
- No comprender el significado de la estrategia “reducción a la unidad”.
- Despojar a x de su valor de incógnita.
- Usar la igualdad como símbolo que indica un resultado.

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)

Regla de tres simple directa	Algoritmo algebraico (fórmula) que permite plantear y resolver problemas de proporcionalidad donde se desconoce un valor.
Representación: tabla de magnitudes.	Transforma una expresión verbal en una representación tabular.
Representación algebraica	Permite calcular el valor faltante utilizando propiedades de las ecuaciones (propiedad uniforme o transposición de términos)

Fotografía Original (cm)	Fotografía ampliada (cm)
25	30
20	X

Fotografía Original (cm)	Fotografía reducida (cm)
25	5
20	X

Procedimiento de ampliación: $x = \frac{20 \times 30}{25} = 24$

Procedimiento de reducción: $x = \frac{20 \times 5}{25} = 4$

Conflictos relacionados con los procedimientos:

- Uso inconsciente-mecánico de la regla de tres, sin un razonamiento proporcional previo.
- Interpretación de ampliación/reducción de la fotografía mediante razón por suma o diferencia.
- Modelización de una expresión simbólica en otra también simbólica que permite operar y obtener un resultado que representa la solución del problema.
- Operaciones que interviene entre cantidades en la regla de tres simples.
- Uso inadecuado de la regla de tres.

PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

P1. Si los ángulos correspondientes de dos figuras tienen la misma amplitud y las razones entre los lados correspondientes forman una proporción, entonces las figuras son semejantes.	Se reconoce en la ampliación/reducción de la fotografía una tarea de proporcionalidad.
--	--

Conflictos potenciales con las propiedades:

- Comparar lados que no se corresponden.
- No comprender P1.

ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

A1: Puesto que al ampliar/reducir un lado de la fotografía (proporcionalmente) las medidas correspondientes deben ampliarse/reducirse proporcionalmente.	Justifica la propiedad P1
--	---------------------------

Conflictos con los argumentos:

- No evidenciar en la situación problema una tarea de proporcionalidad.
- Obtener medidas, para las cuales no se tiene un significado preciso.

El análisis de la configuración epistémica permite prever algunas prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver la situación problema, estas posibles prácticas se presentan a continuación:

- P0: El estudiante no comprende el problema, evidenciando otro tipo de prácticas matemáticas.
 P1: El estudiante no usa un razonamiento proporcional al argumentar que se debe ampliar/reducir un solo lado dejando el otro lado de la fotografía constante (siempre medirá 20 cm).
 P2: El estudiante usa estrategias aditivas.
 P2.1: Para ampliar la fotografía el estudiante suma 5 cm al lado de 20 cm dando como respuesta 25 cm, y para reducir la fotografía resta 20 cm al otro lado dando como respuesta 0 cm y no argumenta la inconsistencia.
 P2.2: Para ampliar la fotografía el estudiante suma 5 cm al lado de 20 cm, dando como respuesta 25 cm, y para reducirla resta 20 cm al otro lado dando como respuesta 0 cm, además manifiesta la inconsistencia, pero no da argumentación del porqué.
 P3: El estudiante aplica el algoritmo de la regla de tres, reconoce la situación problema como una tarea de proporcionalidad, da una respuesta correcta, y argumenta los procedimientos.
 P4: El estudiante aplica estrategias multiplicativas: reconoce las magnitudes dadas como proporcionales, da una respuesta correcta y usa otro tipo de estrategias como reducción a la unidad, relación de comparación entre lados, uso de porcentajes o notación de escalas.

■ Configuración cognitiva

En la Tabla 1, se muestra una síntesis de las prácticas matemáticas evidenciadas en las producciones escritas de los estudiantes de grado séptimo al resolver la situación problema propuesta. En las figuras 2 a 6 se muestran algunas producciones escritas que corresponden a los significados de la proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Tabla 1. Prácticas matemáticas de los estudiantes

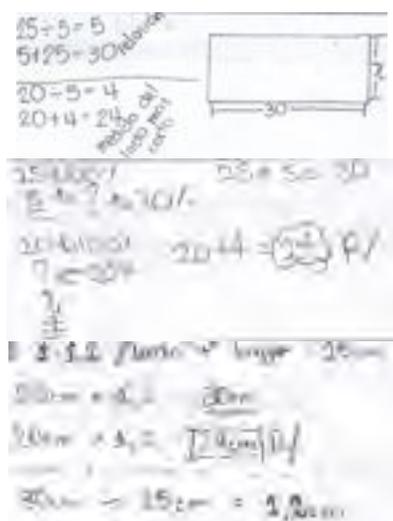
Categorías	Subcategorías	Frecuencias	
		No.	%
P0: No comprende el problema evidenciando otro tipo de prácticas matemáticas.		1	3,6
P2. Razonamiento no proporcional con estrategias aditivas.	P2.1: estrategia aditiva sin argumentación.	8	28,6
	P2.2: estrategia aditiva con argumentación.	2	7,1
P3: Regla de tres con argumentación.		3	10,7
P4. Uso de estrategias multiplicativas correctas.		12	42,9
Prácticas matemáticas no previstas		2	7,1
Total		28	100

Frecuencias de estudiantes que evidencian cierto tipo de práctica matemática al resolver la situación problema propuesta.

Fuente: Autor

Del total de estudiantes objeto de estudio el 53,6 % resuelve con éxito el problema de ampliación/reducción de la fotografía. El 35,7 % aplica estrategias aditivas sin reconocer en el problema una tarea de proporcionalidad y el 3,6 % (un estudiante) no comprende el problema y evidencia otro tipo de procedimientos o respuestas. Se evidencian dentro de las prácticas matemáticas de los estudiantes dos fuertes tendencias: una referente a estrategias multiplicativas con razonamiento proporcional argumentativo distinto a la regla de tres simple en un 42,9 % dando lugar a respuestas como las evidenciadas en la figura 2.

Estrategias usadas para ampliar la fotografía



Estrategias usadas para reducir la fotografía

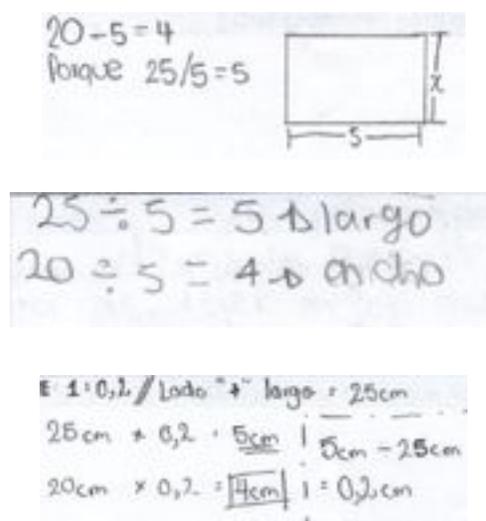


Figura 2. Uso de estrategias multiplicativas

La otra tendencia, es el uso de estrategias aditivas sin argumentación en un 28,6 %, dando lugar a respuestas como las que se presentan en la figura 3.

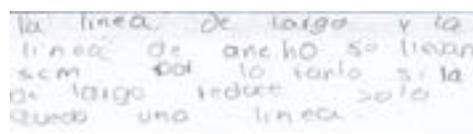
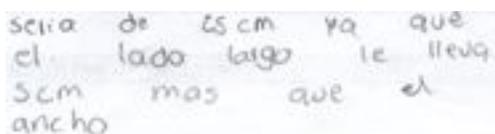


Figura 3. Uso de estrategias aditivas

Por otra parte, un 10,7% usa la estrategia de la regla de tres simple y la argumenta como se muestra en la figura 4.

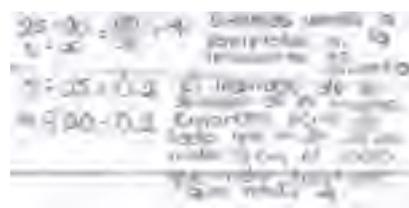
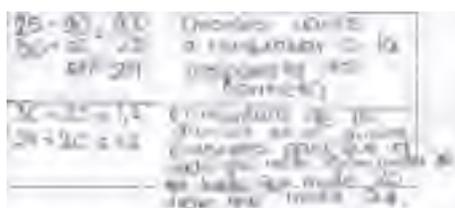


Figura 4. Regla de tres con argumentación

Un 7,1% de los estudiantes reflexionan sobre sus procedimientos al considerarlos inconsistentes, pero no logran clarificar las respuestas, tal como se muestra en la tabla 5.

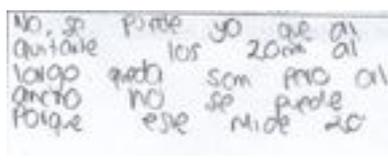
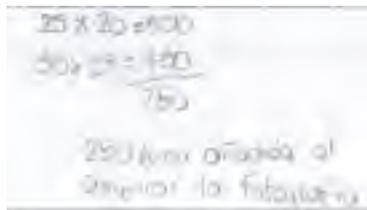
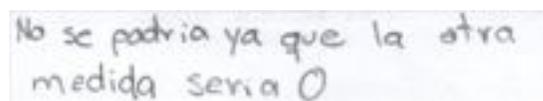


Figura 5. Otro tipo de operaciones o respuestas

El 3,6 % (un estudiante) no comprende el problema y da a conocer otro tipo de respuestas como se evidencia en la figura 6. El 7,1 % de los estudiantes evidencia una solución que no se tenía prevista dentro de las practicas matemáticas como se observa en la figura 7.

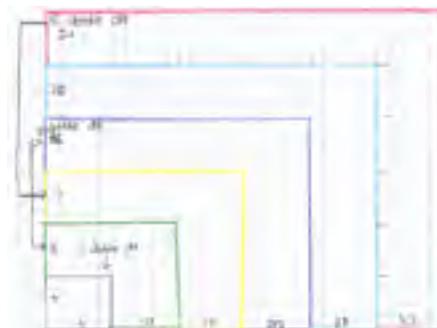


Estrategia usada para ampliar la fotografía



Estrategia usada para reducir la fotografía

Figura 6.
Estrategia aditiva con argumentación



El estudiante amplifica rectángulos proporcionalmente y llega a las respuestas correctas.

Figura 7.
Estrategia no prevista en las practicas matemáticas

■ Análisis cognitivo

las practicas matemáticas identificadas a través de las configuraciones epistémicas caracterizan un alto porcentaje (92,9%), pero resultaron insuficientes para explicar la totalidad de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lo anterior justifica la necesidad de identificar los aspectos que pueden deducirse a partir del estudio de las configuraciones cognitivas. Un estudio de ambas configuraciones (epistémica/cognitiva), puede llegar a informar sobre la totalidad de las prácticas manifestadas durante la resolución del problema de ampliación/reducción de la fotografía. El análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas, permite identificar estrategias correctas e incorrectas, los errores y dificultades, así como conflictos potenciales que pueden darse en los procesos de resolución de la situación problema. Las estrategias correctas de resolución pueden ser identificadas al elaborar previamente el análisis epistémico. El hecho de que el 37, 5% de los estudiantes apliquen estrategias aditivas evidencia la complejidad de la situación problema, lo cual permite reflexionar en la preparación previa al momento de llevar el problema al aula para poder enfrentar las dificultades de los estudiantes.

Según Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández (2003) las respuestas incorrectas de los estudiantes posiblemente pueden darse por la dificultad de relacionar los procedimientos de cálculo con su significado: para el estudiante es mucho más económico y sencillo desencadenar una respuesta automática ante cierta clase de estímulos (sobre todo cuando se piensa que esto es hacer matemáticas) que buscar el significado relacionando los conceptos matemáticos con las operaciones. Para Obando (2015) otra de las posibles causas de las respuestas incorrectas de los estudiantes se relaciona con la forma como se introduce la multiplicación en la escuela a partir de la suma de sumandos iguales porque se circunscribe a una forma de pensamiento aditivo alejándola de las formas de razonamiento típicamente multiplicativo (variación conjunta de dos o más cantidades), haciendo que los estudiantes al ampliar/reducir la fotografía sumen o resten un número a un solo lado de la fotografía sin evidenciar en la situación problema propuesta un razonamiento proporcional.

■ Conclusiones

La caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo se presenta desde una perspectiva del análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas, las cuales permitieron identificar los objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema de ampliación/reducción de una fotografía aérea. A través del análisis epistémico/cognitivo, el profesor investigador fue comprendiendo la complejidad de los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad que emergen de las prácticas matemáticas de los estudiantes. La identificación de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos presentes en la resolución del problema llevaron al profesor a identificar posibles estrategias, errores, dificultades y conflictos potenciales que podrían manifestarse en las actuaciones de los estudiantes. Esta reflexión pedagógica del docente-investigador puede llegar a desarrollar algunas de las competencias didáctico – matemáticas, necesarias para una enseñanza idónea de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad.

■ Referencias bibliográficas

- Arboleda, L., y Castrillón, G. (2013). La historia y la educación matemática en el “horizonte” conceptual de la pedagogía. *Revista cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 11, 189-202.
- D’Amore, B., y Godino, J.D. (2007). El enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 10(2), 191-218.
- Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. Recuperado el 02 de enero de 2018 de <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, J. D., Beltrán, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. Recuperado el 15 de enero de 2018 de http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la de investigación*, México: McGraw-Hill.
- Obando, G. (2015). *Sistemas de prácticas matemáticas en relación con las Razones , las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F.(Ed). (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*, Bogotá: Una empresa docente.
- Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. Recuperado el 20 de febrero de 2018 de <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos/pino-fan.pdf>
- Rivas, M., y Castro, W. (2011). *Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria*. Recuperado el 02 de Marzo de 2018 de <http://funes.uniandes.edu.co/2589/1/RivasAportesAsocolme2011.pdf>