

## ECUACIONES DIFERENCIALES Y TEORÍA APOS. UN ESTUDIO DE LOS SISTEMAS MASA RESORTE

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APOS THEORY; A STUDY OF THE MASS SPRING SYSTEMS

Luis Alberto Jaimes, Efrén Ricardo Baquero, Margarita Mónica Rey  
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito (Colombia)  
luis.jaimes@escuelaing.edu.co, efren.baquero@escuelaing.edu.co,  
margarita.rey@escuelaing.edu.co

### Resumen

Este trabajo propone un modelo hipotético de construcciones mentales y mecanismos de construcción, para comprender el objeto matemático *ecuación diferencial lineal de segundo orden, que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado*. Se toma como marco teórico y metodológico la propuesta de la teoría APOS, que implica la elaboración de una descomposición genética direccionada en tres etapas; análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y recolección y análisis de datos. Lo anterior desde tres enfoques diferentes como son los elementos de la matemática formal, la experiencia como docentes del curso de ecuaciones diferenciales y el componente didáctico. Finalmente, cabe mencionar que este trabajo se desarrolló con la participación de estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito durante el año 2017.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales, APOS, masa resorte

### Abstract

This work proposes a hypothetical model of mental constructions and construction mechanisms, to understand the mathematical object differential linear equation of second order, which models a spring mass system with free motion damped. The proposal of APOS theory is taken as a theoretical and methodological framework, which involves the elaboration of a genetic decomposition addressed in three stages; theoretical analysis, design and implementation of teaching and data collection and analysis, all of which is viewed from three different approaches such as the elements of formal mathematics, teaching experience in the course of differential equations, and the didactic component. Finally, it is worth mentioning that this work was developed with the participation of differential equations course students at Julio Garavito Colombian School of Engineering, during the year 2017.

**Key words:** Differential Equations, APOS, Spring Mass

## ■ Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un componente fundamental de formación, en los programas de ingeniería, economía o aquellos relacionados con las ciencias exactas. Su importancia radica en la diversidad de fenómenos físicos o sociales que pueden ser modelados matemáticamente, para describir su comportamiento. El trabajo que se presenta corresponde a un proyecto de investigación desarrollado por el grupo GIMATH (Grupo de investigación en Matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito), en la línea de investigación en enseñanza de las matemáticas. Lo anterior, en busca de herramientas que fortalezcan las prácticas educativas de los docentes, y la comprensión de conceptos matemáticos en los estudiantes de institución.

De otra parte, la elección de nuestro objeto de estudio (ecuación diferencial de segundo orden que modela un sistema de masa resorte con movimiento libre amortiguado EDSMR) se encuentra relacionada con su aplicabilidad de dichos sistemas en campos de la ingeniería, como por ejemplo la biomédica; para estudiar la otosclerosis (Fragoso et al., 2014), y en la mecánica para modelar el sistema de suspensión de un vehículo (Aly & Salem, 2013). Adicionalmente, es conveniente resaltar que este trabajo se desarrolla sobre la comprensión de un modelo matemático, y no la construcción de un modelo (modelización matemática), lo anterior dando continuidad a la postura tomada en investigaciones realizadas sobre otros modelos en ecuaciones diferenciales; como los problemas de mezclas (Chaves y Jaimes, 2014) y la ecuación logística (Vargas, Chaves, Jaimes y Monserrat, 2017).

Así mismo, en educación matemática la modelación es utilizada para dotar de significado a los objetos abstractos, y en ocasiones utilizada por los docentes para mostrar que puede explicar o predecir diferentes fenómenos reales (Villa-Ochoa, Quintero, Arboleda, Castaño y Ocampo, 2009). En ese sentido, dentro de este trabajo también se proponen unas actividades que lleven al estudiante a plantear una expresión algebraica (Ecuación Diferencial) para describir un problema dado, partiendo de un modelo establecido y validado, e interiorizando cada uno de los elementos que lo componen, tal que comprenderlos lleve a comprender el modelo. Por ejemplo, en el caso de los sistemas masa resorte con movimiento libre amortiguado, la ecuación diferencial  $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$ ; donde  $x$  representa la posición de un objeto de masa  $m$  en un tiempo  $t$ , acoplado a un resorte de constante de elasticidad  $k$ , sometido a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea  $\beta\dot{x}$ , requiere la comprensión de cada uno de los elementos que la conforman: ley de Hooke, ley de Stokes, segunda ley de Newton, y conocimiento de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, sin embargo, elementos como límite, periodo de una función, e incluso la experiencia del individuo con fuerzas de resistencia (por ejemplo, sacar la mano por la ventana de un vehículo en movimiento) también son necesarios para la comprensión del modelo.

Finalmente, para el desarrollo de esta investigación se utilizó una herramienta de la teoría APOS (la cual se describe más adelante en este documento), llamada descomposición genética de un concepto, que identificó las construcciones mentales y mecanismos de construcción de los estudiantes para la comprensión de un concepto u objeto matemático.

## ■ Marco teórico

En este trabajo se utiliza frecuentemente la palabra modelo matemático, para la cual se adoptó la definición propuesta por Villa (2007, p. 67), refiriéndose a este como “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”, es decir, esto es lo que realizan los estudiantes cuando utilizan la EDSMR para solucionar un problema de masa resorte. Además, cabe señalar la importancia de diferenciar el uso del modelo, con su proceso de obtención, dado que en este trabajo el modelo que corresponde a la EDSMR ya se encuentra dado, por el contrario, lo que se busca es la comprensión de esta ecuación diferencial considerando cada uno de sus elementos.

El trabajo se desarrolló desde el enfoque conocido como Teoría APOS, la cual define la descomposición genética de un concepto como “un modelo hipotético de construcciones mentales y mecanismos necesarios para comprender un concepto matemático específico” (Arnon, et al, 2014, p. 27). Las construcciones mentales, a las que se refiere la Teoría APOS, son todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permiten obtener significado de ellas (Bermúdez, 2011), como son las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* sobre un determinado concepto matemático, así mismo, para desarrollar y realizar las construcciones mentales se tienen seis clases de abstracción; los mecanismos de construcción, que hacen referencia a procesos mentales como la interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización.



Figura 7. Elementos principales de la teoría APOS

A continuación, se presenta una breve descripción de los elementos que aporta la teoría en relación a la comprensión de conceptos u objetos matemáticos, partiendo de las construcciones mentales y finalizando con la herramienta de la descomposición genética.

Una *acción* es cualquier actividad mental o física que transforma un objeto físico o mental, por ende, tienden a ser algorítmicas y de forma externa (Clark et al., 1997). Una acción es *interiorizada* por la repetición y el reflejo de la misma, no se produce por alguna influencia externa, y en consecuencia se vuelve en una construcción interna llamada *proceso*.

Un individuo posee una concepción *proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Sin embargo, un proceso también puede generarse por la *coordinación* o *reversión* de dos o más procesos; estos mecanismos permiten establecer relaciones entre los procesos para determinar un nuevo proceso, ya sea realizando nuevas transformaciones o deshaciendo las secuencias de dichas transformaciones. Según Meel (2003, p. 245) “cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto”, esto es, una vez encapsulado el proceso, el *objeto* existe en la mente del individuo. Finalmente, según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema viene dada por la capacidad del individuo de determinar si se puede utilizar en el tratamiento de una situación matemática particular. Los esquemas son entonces construcciones mentales que contienen la descripción, organización y ejemplificación de las estructuras mentales que un individuo ha construido en relación a un concepto matemático.

Un tercer elemento fundamental de la teoría APOE, es el que establece el vínculo entre las construcciones mentales y los mecanismos de construcción y se llama *descomposición genética*. Las descomposiciones genéticas pueden verse como una ruta estructurada de cómo se construyen los conceptos matemáticos en la mente de un individuo. Para Asiala et al (1996, p. 7), la descomposición genética de un concepto se define como el “conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno”, otra idea sobre el significado de la descomposición genética es “la descomposición genética representa una vía posible en que un estudiante pueda lograr el desarrollo de una comprensión conceptual, así como una guía para el desarrollo de una actividad constructiva. En específico, la descomposición genética proporciona al maestro una trayectoria general que puede llevar al estudiante a construir una comprensión adecuada” (Meel, 2003, p. 268).

Es importante aclarar que no puede hablarse de una única descomposición genética de un concepto, ya que ésta depende de la formulación que han hecho los investigadores, y por tanto puede haber varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto (Trigueros, 2005, p.8).

La descomposición genética que se plantea con respecto a un concepto matemático en principio es preliminar, es decir es una descomposición que no ha sido validada y que ha sido diseñada basada en el análisis teórico de un concepto. Luego de desarrollar determinadas estrategias de enseñanza y aprendizaje, y realizar el análisis de los datos recogidos a través de algunos de los instrumentos de recolección que sugiere la teoría APOE en su marco metodológico, estos son: entrevistas, observaciones en clase, revisión de los libros de texto, juegos de computador, estudios epistemológicos e históricos, exámenes, (Arnon, et al, 2014, p.95), la descomposición genética es refinada, la cual debe incluir las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante realiza para aprender el concepto en cuestión.

## ■ Metodología

La metodología utilizada para desarrollar este trabajo se rige bajo el marco de la teoría APOS, y es direccionada en tres etapas, desde tres enfoques diferentes. El primer enfoque está relacionado con los elementos de la matemática formal, que estuvo liderado por el investigador con formación en matemática. El segundo enfoque, se relaciona con la experiencia como docentes de ecuaciones diferenciales, liderado por la directora del curso. El tercer enfoque, implica el componente didáctico; relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, liderado por el investigador con formación en educación matemática.

En la primera etapa se elaboró un análisis teórico, que parte desde la formalidad del objeto, la experiencia como docentes del curso y el componente didáctico en su enseñanza y aprendizaje. Inicialmente se realizaron reuniones, en las que cada uno de los investigadores proponía elementos a considerar desde cada enfoque liderado, estas reuniones permitían confirmar, replantear o descartar dichos elementos del análisis teórico. Adicionalmente, se programaron seminarios de teoría APOS para que los investigadores ampliaran su conocimiento de la teoría y generaran un espacio de discusión en el que se relacionaran los elementos de la teoría con el objeto de estudio analizado desde los diferentes enfoques; trabajo que dio unicidad a la hora de presentar los análisis realizados entre los investigadores.

La segunda etapa, correspondió al diseño e implementación de enseñanza, para lo cual se elaboró un taller sobre los sistemas masa resorte que consideraba los elementos encontrados en el análisis de la primera etapa. El taller se elaboró durante el primer semestre del año 2017, con dos objetivos, el primero, mejorar la comprensión de los estudiantes en relación a la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado (EDSMR). El segundo objetivo, utilizarlo como instrumento de recolección de información en la siguiente etapa del ciclo de investigación.

Finalmente, la tercera etapa que corresponde a la recolección y análisis de datos, que se desarrolló con dos grupos de estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales, el primero durante el periodo intersemestral del año 2017 (2017-I), y el segundo con los estudiantes del segundo semestre del año 2017 (2017-II). La aplicación del instrumento al primer grupo permitió identificar y categorizar algunos niveles de comprensión o construcciones mentales de los estudiantes acerca de la ecuación diferencial que es objeto de estudio. Además, permitió identificar algunos ítems del taller que debían ser ajustados, y adicionar otros elementos que no se consideraron inicialmente. Al aplicar el taller al segundo grupo, se validó la categorización obtenida en el periodo intersemestral y se identificaron nuevas categorías.

Al finalizar la tercera etapa, se realizó nuevamente un análisis que describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, y se presenta como la descomposición genética de este objeto.

## ■ Resultados

Uno de los resultados obtenidos consiste en la propuesta de un taller que busca la identificación de algunas construcciones mentales de los estudiantes sobre el objeto de estudio (EDSMR), así como la interiorización de acciones, y la coordinación de procesos, para que sea encapsulado. A continuación, se comparten algunos puntos del taller y una breve descripción de lo que se espera en cada punto.

El primer punto que se planteó fue un enunciado de un sistema masa resorte en el que no se pedía hallar la función que describía el movimiento o plantear la ecuación diferencial, por el contrario, las preguntas fueron orientadas a la forma como interpretaban cada elemento de ecuación implícito en el enunciado. El problema y una de las preguntas fue el siguiente:

masa de 160 libras de peso se sujeta a un resorte y lo estira 8 pies. Se sustituye la masa por una de 128 libras de peso. El sistema se encuentra en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de 16 veces la velocidad instantánea.

¿Qué diferencia hay entre una masa que tiene un peso de 160 Libras y una masa de 5 Slugs?

*Figura 8. Pregunta 1*

En este caso la pregunta que se observa en la figura 2 busca identificar la forma como el estudiante pasa de una unidad de medida a otra en relación con las diferentes características del mismo objeto, por ejemplo, la masa de 5 Slugs tiene un peso de 160 libras, solo que se están dando características diferentes del mismo objeto. Para llegar a esa conclusión el estudiante debe tener claro que el peso es una fuerza y que se obtiene multiplicando la masa del objeto por la gravedad a la que está sometido.

Las preguntas 2,3 y 4 del punto 1, se plantean con el propósito de identificar las relaciones que establece el estudiante entre el tránsito del lenguaje natural al algebraico. Por ejemplo, se identificó que independiente de la información dada, generalmente los estudiantes buscan la forma de reemplazar los datos de la descripción problema en la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, sin detenerse a reflexionar si en la información dada efectivamente se proporciona esta información. En la Figura 3 la última pregunta pide que se expresen las condiciones iniciales del

sistema; aunque estas no se dieron en su descripción, algunos estudiantes las asociaron con otro tipo de información dada en la descripción dada del problema.

... sirve esa información?

■ ¿Para usted qué significado tiene la expresión "se encuentra en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de 16 veces la velocidad instantánea"?

■ ¿Cuáles son las condiciones iniciales del problema? Justifique su respuesta.

Figura 9. Punto 1, preguntas 2, 3 y 4.

El siguiente punto del taller se planteó en relación a la identificación de características propias de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado. El ejercicio consistió en dar 6 posibles soluciones de tres ecuaciones diferenciales diferentes, dentro de las cuales el estudiante debía descartar aquellas que no serían solución de la ecuación diferencial y las que no se ajustan a un sistema masa resorte. Por ejemplo, si las raíces de la ecuación característica son imaginarias, estas deben darse como pares conjugados, así mismo, si la ecuación corresponde a un sistema masa resorte, por ser todos sus coeficientes positivos las raíces deben ser negativas en su parte real.

Para revisar la capacidad de pasar del registro algebraico al lenguaje natural, se dio una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes positivos y se pidió que describiera o enunciara un problema de masa resorte que se ajustara a esta ecuación diferencial. Después de haber planteado el problema, se dieron unas condiciones iniciales para que fuesen interpretadas y agregadas en la redacción del problema (Figura 4).

Dada la ecuación diferencial  $3x'' + 10x' + 5x = 0$ .

■ Describa un sistema masa-resorte que pueda ser modelado por dicha ecuación.

■ Si a la ecuación  $3x'' + 10x' + 5x = 0$ , agregamos una de las siguientes condiciones, ¿qué redacción agregaría al problema para incluir cada caso? No olvide indicar las unidades de medida.

$x(0) = -1, x'(0) = 2$	
$x(0) = 0, x'(0) = -1$	

Figura 10. Punto 3

Otro ítem del taller, estuvo relacionado con el uso del discriminante de la ecuación característica y su relación con cada tipo de movimiento, por ejemplo, si el discriminante es mayor que cero entonces las raíces son reales diferentes y las soluciones son de la forma  $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ , lo cual está relacionado con un movimiento sobreamortiguado.

De otra parte, para realizar el análisis de los resultados en esta propuesta, se partió de tres elementos que se consideran componentes fundamentales de la ecuación diferencial, el primero de ellos está asociado con la comprensión de las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial, como la ley de Hooke, ley de Stokes y la segunda ley de Newton. El segundo componente está relacionado con la comprensión de las condiciones iniciales del problema; la forma de interpretar la descripción del modelo, unificación de unidades y la representación gráfica de la ecuación diferencial. El tercer componente comprende todo lo relacionado con la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden; ecuación característica, relación entre el discriminante y tipo de movimiento, hasta llegar al planteamiento de la solución.

En relación a las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial, la comprensión de la EDSMR implica la comprensión de la ley de Hooke, ley de Stokes y segunda ley de Newton, que respectivamente dan significado a los coeficientes  $k$ ,  $\beta$  y  $m$ , de la ecuación diferencial  $mx'' + \beta x' + kx = 0$ .

En lo que corresponde a estas leyes el estudiante posee un nivel de concepción proceso cuando identifica y comprende las variables y constantes implícitas en la descripción de la ecuación diferencial. Estos procesos, en algunas ocasiones son el resultado de la interiorización de acciones, en este caso, relacionadas con los coeficientes de la ecuación diferencial. Ejemplos de estas acciones son:

- Hallar la masa del objeto cuando en la descripción del problema se refieren a su peso. En ese caso, el estudiante parte de la igualdad  $W = mg$  (donde  $W$  es el peso del objeto,  $m$  la masa y  $g$  la fuerza de gravedad a la que se encuentra sometido), y despeja la masa. Dependiendo de las unidades de fuerza en las que se da el peso, el estudiante debe elegir uno u otro valor para la gravedad, por ejemplo: si las unidades de peso están dadas en Newtons, generalmente se trabaja con una gravedad de  $9.8 \frac{m}{seg^2}$ , pero si las unidades se dan en libras Fuerza, entonces se debe trabajar con una gravedad cercana a los  $32 \frac{pie}{seg^2}$ .
- Cuando se indica la elongación de un resorte, es suficiente con plantear la igualdad  $F = ks$ , donde  $F$  es la fuerza de recuperación del resorte  $k$  es la constante de proporcionalidad o constante del resorte y  $s$  la elongación, de esta forma, como la fuerza que hace estirar el resorte es el peso de la masa, se despeja  $k$  y se obtiene la constante a reemplazar en la ecuación diferencial.

La repetición de acciones y reflexión sobre las mismas pueden ser interiorizadas en procesos que el estudiante ejecuta. Un ejemplo de procesos relacionados con la comprensión de las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial son los siguientes:

- Reconoce el significado de la expresión  $mx''$  en la ecuación diferencial según lo expuesto por la segunda ley de Newton.
- En enunciados en los que inicialmente se sujeta una masa que genera una elongación inicial del resorte y posteriormente esta es reemplazada por otra, el estudiante clasifica la información necesaria para obtener la constante del resorte, por ejemplo, en el texto de Zill y Cullen (2008) se encuentra el siguiente enunciado: “Después de sujetar una masa de 10 libras de peso a un resorte de 5 pies, el resorte mide 7 pies. Esta masa se separa y reemplaza por otra que pesa 8 libras...”, durante la recolección de información los investigadores encontraron que algunos estudiantes no comprendían para que se daba la primera parte del enunciado si finalmente el sistema se analizaba con otra masa. Así mismo, algunos estudiantes que si extraían la

información del primer enunciado realizaban la identificación de los demás coeficientes con la masa inicial sin considerar que al realizar el reemplazo el coeficiente  $m$  corresponde a la masa final.

El segundo componente, que corresponde a la comprensión de las condiciones iniciales del sistema, cuando se hallan las raíces de la ecuación característica, se plantea la solución general del sistema de acuerdo a la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, pero son las condiciones iniciales del sistema las que proporcionan las constantes de la solución particular, la cual describe el movimiento del objeto suspendido al resorte. Es posible que un estudiante plantee la solución particular del sistema, mediante una serie de algoritmos, pero esto no garantiza su comprensión. En relación con lo anterior, se presentan algunos ejemplos de acciones en la comprensión de las condiciones iniciales:

- Relacionar las expresiones similares a “Se libera desde un punto ubicado ( $a$ ) unidades por encima de la posición de equilibrio” o “Se libera desde un punto ubicado ( $a$ ) unidades por debajo de la posición de equilibrio” con la condición sobre  $x(0)$ .
- Relacionar las expresiones similares a “se libera a una velocidad ascendente” o “se libera a una velocidad descendente” con la condición sobre  $x'(0)$ .
- Realizar una representación gráfica del sistema estableciendo un eje horizontal o vertical (dependiendo si la masa está suspendida de un resorte o sobre un plano horizontal) ubicando el cero en el punto de equilibrio y los valores positivos y negativos a derecha e izquierda o abajo y arriba.

Además, un estudiante que ha interiorizado las acciones asociadas a las condiciones iniciales del sistema puede ejecutar procesos como los que se presentan a modo de ejemplo:

- Traspasa del lenguaje natural (descripción del problema) al algebraico comprendiendo el significado de las expresiones en el sistema.
- Puede trabajar en sistemas de referencia diferentes (ubicar los valores positivos por arriba o por debajo de la posición de equilibrio) sin que esto altere su interpretación de los elementos de la ecuación diferencial o de la función solución.
- Identifica cuando es necesario unificar las unidades de medida, considerando cuales variables o constantes son relevantes en las magnitudes del sistema.

Finalmente, en el tercer componente, la solución de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte movimiento libre amortiguado, se rige bajo la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, de tal forma que encontrar las raíces de la ecuación es un proceso algorítmico relacionado con las raíces de la ecuación auxiliar (polinomio de grado 2), de la misma forma, escribir la solución dependiendo de si las soluciones son reales diferentes, reales repetidas o imaginarias es solo un proceso de asociación con la forma de escribir la función solución. En relación con lo anterior, se describen algunos ejemplos de las acciones relacionadas con la comprensión de la ecuación diferencial:

- Plantear la ecuación característica de la ecuación diferencial, y resolverla mediante los conocimientos de solución de ecuaciones de segundo grado.
- Relacionar el discriminante de la ecuación característica con los tipos de movimiento (sobreamortiguado, subamortiguado y críticamente amortiguado).
- Relacionar el tipo raíces de la ecuación característica con el tipo de solución de la ecuación diferencial.

La interiorización de acciones como las presentadas anteriormente están dirigidas a crear el proceso de:

- Comprensión de la relación entre la función solución y el tipo de movimiento que describe.

Finalmente, la coordinación de los procesos presentados anteriormente en cada uno de los tres componentes, convergen en la comprensión de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado.

## ■ Conclusiones

La comprensión de las leyes físicas implícitas en la ecuación diferencial (Ley Hooke, Ley Stokes y segunda ley de Newton) es fundamental en dos momentos para comprender el sistema; al plantear la ecuación diferencial y al plantear su solución. Por ejemplo, desconocer la naturaleza de las funciones que describen este fenómeno puede llevar a que funciones planteadas como si las raíces de la ecuación característica fueran positivas en su parte Real, sean consideradas en la solución del sistema, lo que contradice el comportamiento de este fenómeno, dado la que la amplitud de las oscilaciones tiende a cero (0) cuanto  $t \rightarrow \infty$ , en lugar de crecer indefinidamente.

Solucionar de forma correcta un problema de aquellos que aparecen con frecuencia en algunos libros de texto, no garantiza la comprensión del objeto matemático; fue suficiente con cambiar un ejercicio propuesto en lenguaje natural que se resolvía pasando al registro algebraico, por una expresión algebraica que se podía asociar a un sistema masa resorte, para evidenciar que algunos estudiantes que tuvieron éxito en el primer registro no lograron mayor avance cuando estos se invirtieron.

La identificación de ciertas dificultades de los estudiantes, observadas por los docentes durante la clase, no es suficiente para identificar el nivel de comprensión de un concepto u objeto matemático, por el contrario, es necesario diseñar instrumentos de recolección de información con el objetivo de identificar las diferentes formas de comprenderlo.

El refinamiento de la hipótesis planteada en la descomposición genética preliminar no solo enriquece la identificación de las construcciones mentales y los mecanismos de construcción, también favorece la elaboración de actividades que pueden utilizarse como estrategia de enseñanza para el objeto de estudio.

La descomposición genética presentada en este trabajo proporciona construcciones mentales y mecanismos de construcción, según el trabajo realizado por los investigadores y la población correspondiente a los estudiantes de la escuela colombiana de ingeniería. Sin embargo, es necesario recordar que está no es única y que pueden plantearse otras descomposiciones genéticas que consideren otros elementos, construcciones mentales y mecanismos de construcción diferentes a los encontradas.

## ■ Referencias bibliográficas

- Aly, A. A., & Salem, F. A. (2013). Vehicle suspension systems control: a review. *International journal of control, automation and systems*, 2(2), 46-54.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1 – 32.
- Bermúdez, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario*. (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.
- Clark, J., Cordero, F., Com-ill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolia, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal for Mathematical Behavior*, 16(4), 345 - 364.

- Chaves, R. y Jaimes, L. (2014). *Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.
- Fragoso, L. B., Magalhães, M. D. C., Las Casas, E. B. D., Santos, J. N., Rabelo, A. T. V., & Oliveira, R. C. (2014). A mass-spring model of the auditory system in otosclerosis. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, 30(3), 281-288.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221 - 271.
- Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación matemática*, 17, (1), 5-31.
- Vargas, H. Chaves, R. Jaimes, L. y Monserrat, F. (2017). Informe final de investigación (sin publicar). *Características propias de la ecuación logística y su comprensión en estudiantes universitarios*. Universidad colegio mayor de Cundinamarca. Bogotá-Colombia.
- Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicos*, 63-85.
- Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180.
- Zill, D. & Cullen, M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.