

ENTRE LO SONORO, LO NUMÉRICO Y LO ALGEBRAICO: UNA EXPLORACIÓN CON GEOGEBRA

AMONG THE SOUND, THE NUMERICAL AND THE ALGEBRAIC: AN EXPLORATION WITH GEOGEBRA

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando, Noelia Londoño Millán,
José David Zaldívar Rojas

Universidad Autónoma de Coahuila, México

amaranta.jimenez@hotmail.com, noelialondono@uadec.edu.mx, _david.zaldivar@uadec.edu.mx

Resumen

El desarrollo del pensamiento algebraico juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas y las representaciones semióticas contribuyen en alto grado a que este se logre. El objetivo que se persiguió en esta investigación fue relacionar dos áreas del conocimiento (el álgebra y la música), estudiando de manera conjunta las variables algebraicas que están contenidas en una onda sonora. El estudio se realizó con alumnos de dos carreras universitarias, se diseñó una hoja de trabajo y un archivo en el software GeoGebra, para que el alumno pudiera manipular las cantidades físicas involucradas en la onda sinusoidal. Del estudio se pudo identificar que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, mientras que la debilidad de los estudiantes de matemáticas estuvo en identificar la *altura del sonido*

Palabras clave: numérico, algebraico, onda sonora, GeoGebra.

Abstract

The development of algebraic thinking plays a fundamental role in the teaching of mathematics, and semiotic representations contribute to a great extent to achieve it. The aim pursued in this research was to link two areas of knowledge (algebra and music), conjointly studying algebraic variables that are contained in a sound wave. The study was conducted with students of two different majors. It was possible to identify that the weak areas of music students were the algebraic ones, while the weakness of mathematics students was in identifying the height of the sound.

Key words: numerical, algebraic, sound wave, GeoGebra.

■ Introducción

Cuando de estudiar el cambio se trata, nada mejor que hacer uso de la rama de la matemática denominada álgebra, esta se constituye en una parte fundamental del conocimiento que deben tener todos los individuos y cualquier intento por insertar contextos cercanos durante su enseñanza será un buen pretexto para llamar la atención del estudiante.

Una tarea del docente es diseñar actividades que inciten al alumno a reconocer el cambio, analizar situaciones, identificar patrones, simbolizar con el uso de distintos registros de representación, Duval (2000). En ese sentido conviene hacernos la siguiente pregunta: es posible ¿resignificar el concepto de onda sinusoidal y sus variables utilizando la tecnología computacional?

Para el desarrollo del estudio fue preciso considerar por un lado los elementos teóricos que se encuentran presentes en las ondas mecánicas, en particular las ondas sonoras, las variables que intervienen y por otro, los elementos de la matemática educativa que fundamentan la investigación.

■ Marco teórico musical

Fueron los griegos, en especial los pitagóricos los que comenzaron a hacer física musical al estudiar las longitudes de las cuerdas al vibrar y su relación con la *altura* de las notas que éstas producían. El binomio física-música siempre ha estado apoyado por las matemáticas (De la Herrán, 2007).

Las notas musicales, como cualquier sonido o ruido se propagan en el aire a unos 330 metros por segundo o 1200 km/h aproximadamente (dependiendo de la densidad del aire, la humedad, temperatura entre otros factores) en forma de ondas longitudinales, esto es, ondas alternadas de compresión y expansión. El sonido es una onda mecánica, lo cual quiere decir que necesita un medio para propagarse, ver figura 1.

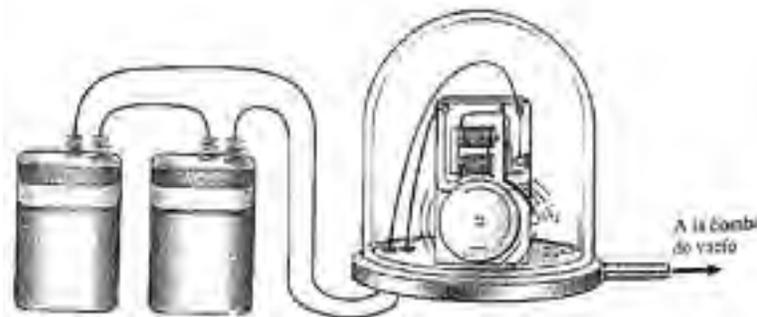


Figura 1. En el vacío no se puede escuchar un timbre. Se necesita un medio material para la producción del sonido. Tomado de Tippens (1992).

Las características físicas de las notas musicales son: *frecuencia* o altura (que tan aguda o grave es el sonido); *intensidad* o volumen (se mide en decibeles) y *timbre* o forma de la onda, es esta cualidad la que permite diferenciar entre el sonido de una flauta y la de un violín.

La ecuación de la onda sinusoidal es la siguiente:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

En esta ecuación trigonométrica intervienen variables como la amplitud A , la velocidad angular ω y la fase φ . Cuando se estudia esta ecuación no se asocia a ningún contexto particular y menos a la música.

El sonido emite perturbaciones que se identifican como propiedades físicas, pero en lo cotidiano las ondas audibles se relacionan de manera subjetiva con efectos sensoriales, para estar en el mismo canal los físicos han considerado pertinente diferenciarlos como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Relación entre los efectos sensoriales y las propiedades físicas de una onda audible. (Tippens, 1992).

Efectos sensoriales	Propiedad física
Fuerza (volumen)	Intensidad
Tono	Frecuencia
Timbre (calidad)	Forma de la onda

■ Referentes teóricos de la matemática educativa

Por si mismos los objetos matemáticos son intangibles, por lo cual se hace necesario usar distintas herramientas para acceder a ellos. Desde el punto de vista de Duval (1999) citado por Azcárate y Camacho (2003) al comparar las herramientas con las que cuenta las matemáticas frente a otras áreas como la biología, física etc. exponen:

Los objetos matemáticos no son objetos reales, como pueden ser los propios de la biología y la física que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría (Azcárate y Camacho, 2003, p.44).

En la enseñanza de las matemáticas es frecuente que se privilegie un registro de representación semiótico más que otros, bien sea porque se desconocen los demás, o porque algunos son más accesibles. También sucede que la mayor preocupación en muchos casos es concluir un programa prediseñado, y resulta más fácil, tratar de enseñar únicamente representaciones mentales. Lográndose con esto que se confunda el objeto que se quiere enseñar con su representación.

La relación de la matemática con otras ciencias como la música, puede ser un poderoso recurso pedagógico a la hora de comprender conceptos que generalmente se ven aislados, estas relaciones que emocionan y engrandecen a los docentes y estudiantes, ávidos de nuevas visiones de la matemática (Rodríguez, 2011). Entre más registros de representación se tengan sobre un concepto, este podrá ser asimilado de mejor manera.

En la propuesta que se presenta a continuación tiene como objetivos:

- Que el estudiante reconozca en primer lugar las variables físicas que componen una onda sinusoidal, la amplitud A , la cual está relacionada de manera directa con la intensidad del sonido, y en la parte gráfica está relacionada con el valor de los máximos y los mínimos de la onda.
- También se espera que el estudiante comprenda la relación entre la velocidad angular ω y la frecuencia f ;
- Hallar la relación de la frecuencia con la altura del sonido, y con el número de crestas que se encuentran en la gráfica.

- También el estudiante deberá encontrar la relación entre el periodo T y la frecuencia f . En relación con la fase ϕ , él debe elegir un intervalo para el cual los valores la onda se encuentra en fase, y que logre relacionarlos con el número π .
- Así mismo se esperaba que los alumnos logran descubrir que la fase no está relacionada con el sonido que se escucha.

■ Metodología

Por lo expuesto anteriormente deja claro que existe una relación directa entre algunos elementos de diferentes áreas del conocimiento como son la música, las matemáticas y la física, y es precisamente lo que perseguimos al diseñar y aplicar la actividad.

■ Diseño

Para llevar a cabo este proyecto se construyó inicialmente un archivo electrónico interactivo usando el software de GeoGebra®, con elementos de la ecuación sinusoidal, como se muestra en la figura 2. Cada alumno pudo manipular las variables presentes en una onda sinusoidal, como son la amplitud, la fase y la frecuencia, además de poder establecer mediante la visualización numérica las relaciones entre la *frecuencia* y el *periodo*, también la velocidad angular y la frecuencia. Como valor agregado se usó GeoGebra para reproducir sonidos, por lo que cada alumno debía tener audífonos para poder realizar la actividad y esta variable estuvo asociada también a la representación gráfica.

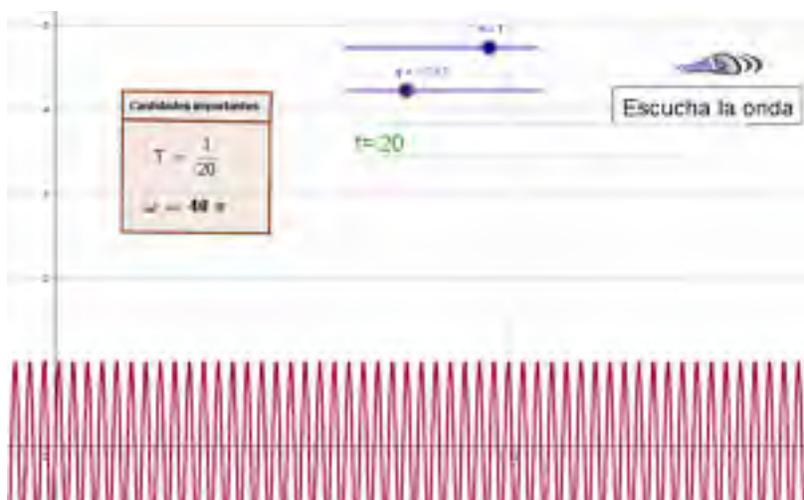


Figura 2. Imagen tomada del archivo dinámico diseñado en GeoGebra

También durante la interacción con el archivo de GeoGebra cada alumno utilizó una *hoja de trabajo* (véase figura 3), con las variables contempladas separadamente. Esta contuvo instrucciones para la manipulación y permitía recabar información respecto a seis variables que se analizan. La hoja de trabajo tiene como propósito también en proporcionar al estudiante una guía en el proceso de manipulación del archivo de GeoGebra, así como recabar las respuestas de los estudiantes.

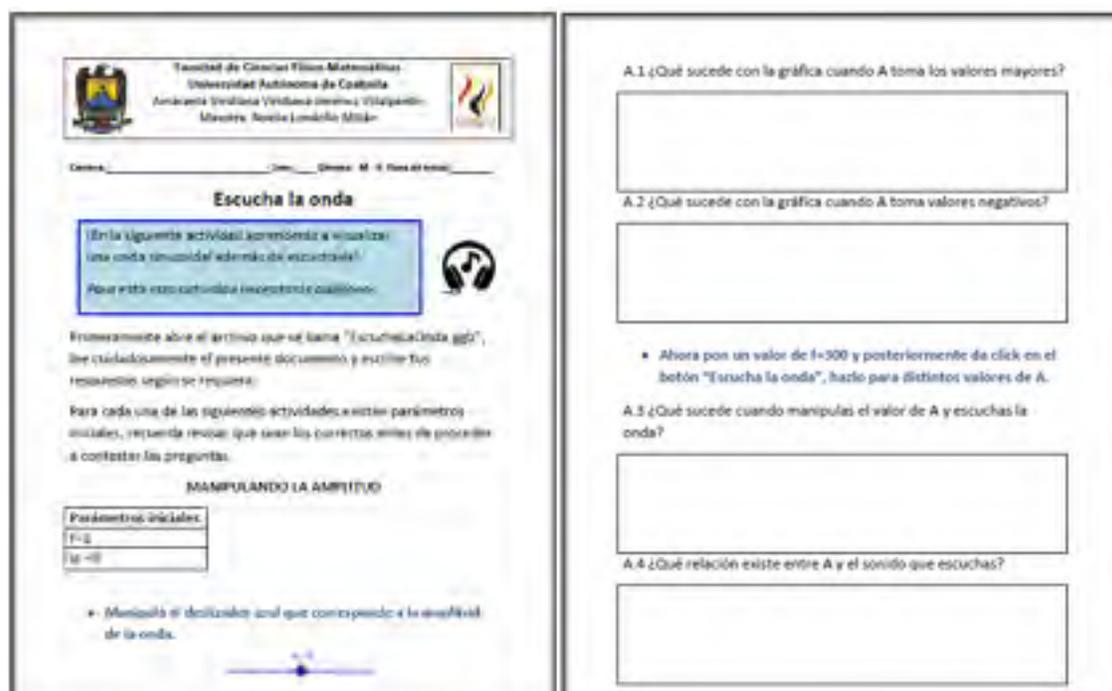


Figura 3. Fragmentos de la hoja de trabajo

En la primera parte los alumnos debían de manipular la amplitud de la onda en el archivo de GeoGebra por medio de un deslizador, con la finalidad de que se dieran cuenta que la amplitud está relacionada con la intensidad del sonido.

En la segunda parte los estudiantes realizan la manipulación de la fase mediante un deslizador y se pretendía que se dieran cuenta que la modificación de la fase no tiene una relación con la producción sonora, sino que tiene una consecuencia de índole visual, ya que desplaza la onda, (esto se puede visualizar en la gráfica).

En la tercera parte se le pidió al estudiante que ingresara distintos valores correspondientes a la frecuencia, esto para que asociara a la frecuencia con la altura del sonido.

Como actividad final complementaria cada alumno debía responder un conjunto de preguntas, las cuales fueron construidas con la finalidad que lograra integrar las variables y el concepto de onda sinusoidal, es decir, que el estudiante diera un significado en términos de cantidades físicas reales a las cantidades que integran la onda sinusoidal.

■ Población y entorno

En la investigación participaron estudiantes universitarios diferenciados así: 23 estudiantes del primer semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas (LMA), de la Universidad Autónoma de Coahuila, y cinco estudiantes de la licenciatura en Música (LM), de la misma universidad, esto con el fin de observar y comparar cómo es que asocian los parámetros físicos a su correspondiente expresión algebraica. Cabe señalar que los alumnos ya conocían

el software GeoGebra por lo que no fue necesario, enseñarlo con anticipación. Los alumnos de la LMA resolvieron la actividad en un laboratorio de cómputo y los alumnos de la LM la resolvieron usando computadoras portátiles.

El tiempo promedio en realizar la actividad fue de 25 minutos, y las edades de los alumnos están entre los 17 y 31 años. El tiempo promedio en realizar la actividad fue de 43 minutos.

Para el análisis, los datos se agruparon en seis categorías (Álvarez-Gayou, 2003). La *hoja de trabajo* fue seccionada en tópicos más generales, conformadas por doce preguntas que se hicieron a cada estudiante. Aunque se tomaron los tiempos en que fueron desarrolladas las actividades, esta variable no se contempló en el análisis, aunque los músicos tardaron casi la mitad del tiempo, las condiciones en el aula no fueron las mismas, ya que a todos los alumnos de matemáticas se les aplicó la actividad a todos a la vez, es decir, en el mismo horario y lugar, mientras que los músicos la realizaron de manera individual.

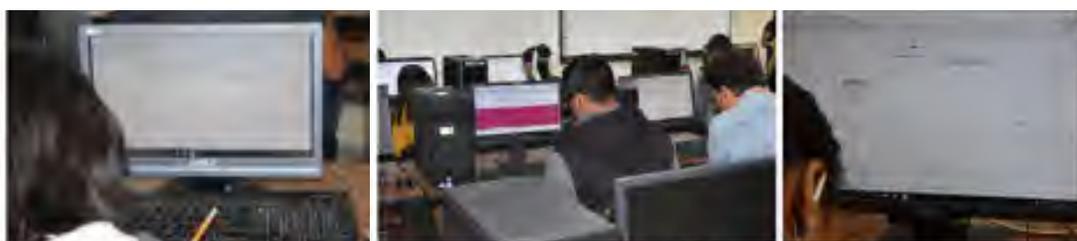


Figura 4. Estudiantes de matemáticas realizando la actividad

■ Resultados y discusión

En la figura 5 se presentan gráficamente los resultados obtenidos en las dos muestras que participaron en el estudio, categorizados en los seis tópicos estudiados (aparecen a la izquierda de la gráfica).

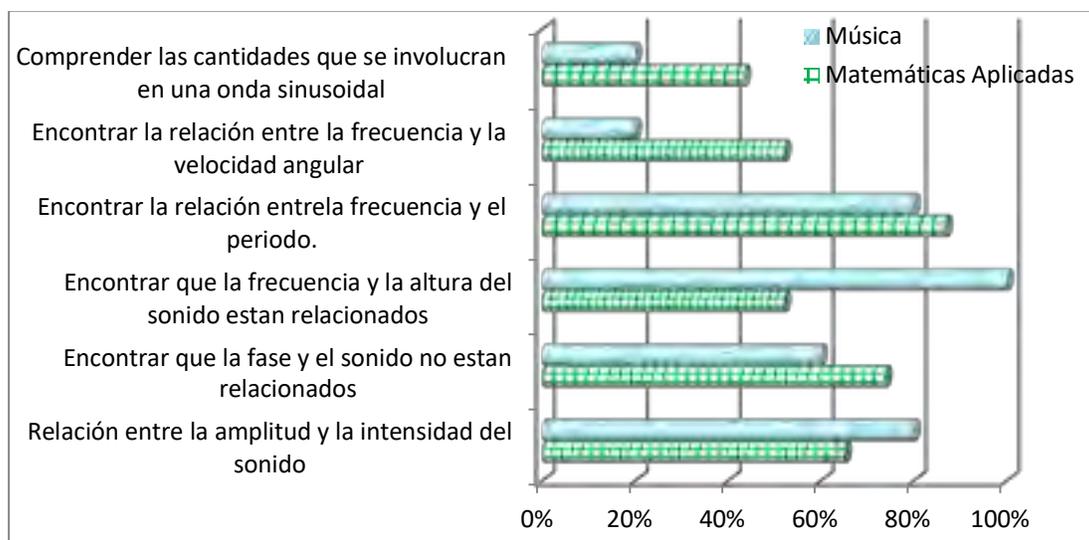


Figura 5. Resultados generales en porcentajes, de alumnos de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y alumnos de licenciatura en música

En términos generales se puede entresacar lo siguiente:

El 65% de los estudiantes de matemáticas encontró una relación entre la *amplitud* de onda sinusoidal y la *intensidad* del sonido, mientras que el 80% de los estudiantes de música encontró la misma relación, esta diferencia puede deberse a la constante utilización de la intensidad de sonido por parte de los músicos, al interpretar de manera recurrente matices variados.

El 74% de los estudiantes de matemáticas encontró la independencia de la fase respecto al sonido, mientras que el 60% de los estudiantes de música encontró la misma relación, la manipulación de los *registros gráficos*, por parte de los estudiantes de matemáticas salió a relucir.

Un resultado que resalta en esta actividad es que el 100% de los estudiantes de música tenía clara la relación entre la *frecuencia* y la *altura del sonido*, mientras que solo el 52% de los estudiantes de matemáticas encontró la relación. Cabe recalcar que algunos estudiantes de música ya conocían su rango de frecuencias audibles antes de realizar la actividad, lo cual les facilitó el proceso de resolución.

En la penúltima sección, presentamos cuestiones algebraicas, para encontrar la relación entre la frecuencia y el periodo así como la relación entre la velocidad angular y la frecuencia; en el archivo de GeoGebra® se presentaron dos recuadros, uno con el título “Cantidades importantes”, y otro identificado con la “f=” en color verde, para que el alumno ingresara el número que quisiera, con la finalidad de que observara y comparara cómo es que se modificaban simultáneamente los valores del periodo y la velocidad angular, invitándolo a que encontrara una relación o fórmula matemática (véase Figura 6).

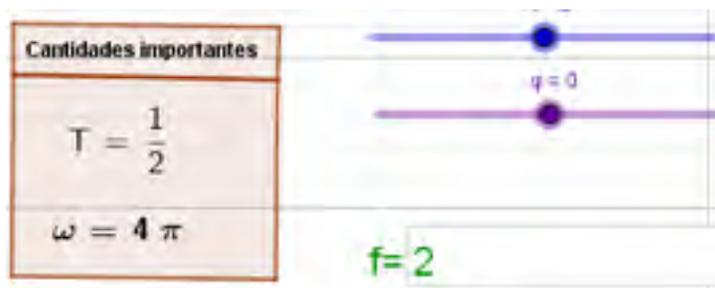


Figura 6. “Cantidades importantes” imagen obtenida del archivo construido con GeoGebra.

En la actividad donde la tarea era encontrar relaciones entre las variables los estudiantes de matemáticas tuvieron una ventaja mayor ya que, el 87% de ellos encontraron la relación $T=1/f$, frente al 80% de los estudiantes de Música. El porcentaje estudiantes que encontraron la relación entre la frecuencia y la velocidad angular, cambió de manera significativa, el 52% de los estudiantes de matemáticas encontraron la relación $\omega = 2\pi f$ mientras que solo el 20% de los estudiantes de Música lo logró. Cabe mencionar que muchos estudiantes asumían que ω era el doble de la frecuencia y se olvidaban por completo de π . Como se muestra en la figura 7.

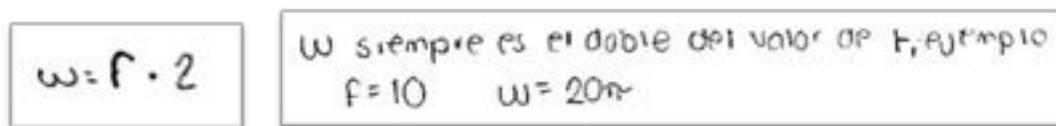


Figura 7. Errores comunes al encontrar la relación entre ω y f . (izquierda, olvido π , derecha, ejemplo bien escrito, pero mal redactada la relación).

El propósito de la última actividad fue introducir la ecuación de la onda sinusoidal de forma completa ($y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$) ya que en ella están todos los elementos que el alumno había manipulado en las actividades anteriores y debía escribir un resumen de lo aprendido con la actividad, asociando esos elementos. A algunos estudiantes les asustó ver esa ecuación, sobre todo estudiantes de música, de los cuales solo el 20% pudo hacer el resumen, contra un 44% de estudiantes de Matemáticas.

Fue notoria la falta de comprensión lectora por parte de los estudiantes, los cuales empezaban por tratar de escuchar la onda, sin leer las indicaciones de la hoja de trabajo, pensando en esto y muy a propósito se dieron unas condiciones iniciales que imposibilitaban la audición de la onda.

Algunos estudiantes tenían bien todas las actividades, pero no fueron capaces de realizar un resumen o de asociarle una magnitud física a la ecuación de la onda. Pudimos percibir que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, y las áreas débiles de los estudiantes de matemáticas fueron las relacionadas con la altura del sonido.

■ Conclusiones

Al comparar los resultados obtenidos entre alumnos de matemáticas y alumnos de música referente respecto a las variables de la onda sonora resaltan que los de música tuvieron mejor desempeño a la hora de obtener la relación entre la *altura del sonido* y la *frecuencia*.

Respecto a la *amplitud* de la onda puede decirse que la mayoría de los participantes en el estudio pudieron establecer su relación con la *intensidad* del sonido.

Coincidieron en las dos carreras en establecer la relación que existe entre la *frecuencia* y el *periodo*, cabe señalar que algunos estudiantes de música ya conocían su rango de frecuencias audibles antes de realizar la actividad, lo cual les dio una ventaja en el desarrollo de la actividad.

Se hallaron dificultades para asociar la *frecuencia* con la *velocidad angular* en ambas carreras al igual que en la integración de las variables con su forma algebraica.

La interacción de los alumnos con los diferentes registros de representación le permitió explorar y relacionar las características físicas y sensoriales de una onda sonora, aunque encontrar de manera completa la ecuación de la onda sinusoidal les significó gran dificultad.

El diseño de los materiales (hoja de trabajo y archivo electrónico en GeoGebra) y su aplicación posibilitó la interacción de los alumnos con variables musicales, físicas y matemáticas en la misma actividad.

Puede decirse que en general todos los estudiantes participantes en el estudio, independientemente de la carrera pudo relacionar apropiadamente la *frecuencia* y el *periodo*, o la *amplitud* y la *intensidad del sonido*, mientras que se pudo evidenciar las habilidades matemáticas y musicales presentes en los alumnos de las diferentes carreras, particularmente al indagar sobre la relación entre la *frecuencia* y la *altura del sonido*. Así mismo tuvieron dificultad para realizar una síntesis de los conocimientos adquiridos.

A través del desarrollo de la investigación pudo entrelazarse de manera simultánea los registros de representación gráfico, numérico, algebraico con el sonido. Esto representa en sí una oportunidad para estudiar variables de diversos contextos.

El estudio permitió que los alumnos visualizaran el cambio de variables de una onda sonora en diversos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico y sonoro). Del estudio se pudo identificar que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, mientras que la debilidad de los estudiantes de matemáticas estuvo en identificar la *altura del sonido*.

Aunque en la literatura no es reconocido como tal, estamos convencidos que el sonido debería formar parte de un nuevo registro de representación. Puesto que cumple las características de *identificable, conversión y tratamiento*.

Si alguien estuviera interesado en realizar una réplica del mismo estudio, los autores sugerimos hacer un rediseño, a la *hoja de trabajo*, para mejorar la redacción, más no el contenido. Así mismo pudiera no solo incluir alumnos de música y matemáticas sino explorar tanto los aspectos algebraicos como musicales con alumnos de carreras de física (licenciatura en física, ingeniería física, ciencias físicas, etc.)

■ Referencias bibliográficas

- Álvarez-Gayou, J. (2003). *Como hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Colección Paidós Educador. México: Paidós.
- Azcárate y Camacho, (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.
- De la Herrán, J. (2007). *Física y música*. México: Conaculta dirección de publicaciones y ADN.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Jeans, J. (1976). Matemáticas de la música. *Sigma el mundo de las matemáticas* 6, 214–244. México: Ediciones Grijalbo.
- NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.
- Rodríguez, M. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77:35.
- Sears, S. (2009). *Física Universitaria*. México: Pearson Education.
- Tippens, P. (1992). *Física conceptos y aplicaciones*. D.F.: McGraw- Hill.