VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES: UMA ANÁLISE COM OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

PROBLEM SOLVING INVOLVING EQUATIONS: AN ANALYSIS CONSIDERING THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS

Rosana Nogueira de Lima; Marlene Rosa Sena; Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (Brasil). Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
rosananlima@gmail.com, marlenejanaina@yahoo.com.br, lgxbarros@hotmail.com

Resumo
Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que teve como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas que envolve as fases de Entrada, Ataque e Revisão propostas por Mason, Burton e Stacey. Os dados coletados foram analisados à luz dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Os resultados evidenciam que a Ficha colaborou para que os participantes compreendessem melhor os problemas e encontrassem soluções satisfatórias. Por outro lado, eles ainda utilizaram representação algébrica de maneira inadequada.

Palavras-chave: resolução de problemas, equações, três Mundos da matemática, ensino médio

Abstract
In this paper, we present results from a study aiming at analysing the procedures used by second grade high school students when solving problems related to linear equations with the use of a Problem-Solving Sheet that entails Mason, Burton and Stacey's phases of Entry, Attack and Review. Collected data were analysed in the light of David Tall's Three Worlds of Mathematics. Results evidenced that the Sheet was useful to students to better understand the problems and to find satisfactory solutions. On the other hand, they were still using algebraic representation in incorrect ways.

Key words: problem solving, equations, three worlds of mathematics, high school

Resumo

Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que teve como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas que envolve as fases de Entrada, Ataque e Revisão propostas por Mason, Burton e Stacey. Os dados coletados foram analisados à luz dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Os resultados evidenciam que a Ficha colaborou para que os participantes compreendessem melhor os problemas e encontrassem soluções satisfatórias. Por outro lado, eles ainda utilizaram representação algébrica de maneira inadequada.

Introdução

Pesquisas em Educação Matemática, tais como a de Araújo Segundo (2012), há muito discutem problemas enfrentados por alunos ao resolverem equações. Em nossas próprias pesquisas relacionadas a esse conteúdo (por exemplo, Lima (2007), Koch (2011) e Santos (2011)), observamos dificuldades de alunos de Ensino Médio em compreender as "regras" que usam para resolver equações, sejam elas lineares ou quadráticas. Esse uso indiscriminado de procedimentos acaba por impedir que eles compreendam os princípios algébricos envolvidos na resolução.

Ao se trabalhar equações a partir da resolução de problemas, Weber (2012) e Lopes (2007), dentre outros, apontam dificuldades que alunos de diferentes faixas etárias apresentam na interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Nessa interpretação, entendemos que há, também, uma dificuldade em representar problemas com o uso de símbolos matemáticos para resolvê-los.

Para minimizar essas e outras dificuldades relacionadas à resolução de problemas, temos realizado pesquisas envolvendo o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas, idealizada na pesquisa de Cybis (2014), e reformulada em outras pesquisas, tais como a de Pita (2016) e de Sena (2017). Tal Ficha é baseada nas ideias de Mason, Burton e Stacey (1982) de que, para se resolver um problema, é preciso passar pelas etapas de Entrada, Ataque e Revisão.

Considerando as dificuldades envolvendo a resolução de equações e a interpretação e representação de problemas identificadas, nesta pesquisa, tivemos por objetivo analisar os processos de resolução de problemas envolvendo equações lineares realizados por alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo. Para isso, propusemos alguns problemas a um grupo de alunos para utilizarem a Ficha de Resolução de Problemas, e observamos se ela colaboraria para que eles os representassem matematicamente e os resolvessem.

Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013), que pressupõe a existência de três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática, que habitam três diferentes mundos. Tal quadro teórico nos ajudou a observar o desenvolvimento dos alunos ao resolverem problemas, considerando as características de cada mundo matemático usadas por eles. Além disso, observamos que a Ficha de Resolução de Problemas pode ser um instrumento colaborativo para o entendimento da resolução de problemas.

Entrar, atacar e revisar: uma abordagem para a resolução de problemas

De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982), a resolução de problemas é uma atividade que pode ser realizada por qualquer pessoa, desde que algumas fases sejam seguidas.

A primeira delas é chamada por eles de "*Entrada*". Nela, deve-se ler cuidadosamente o problema, analisar o enunciado e verificar quais informações são dadas. Essas informações devem ser anotadas, para que se possa iniciar a próxima fase, chamada pelos autores de "*Ataque*". Ao *atacar* um problema, um aluno deve utilizar o que obteve na *Entrada* para definir quais conceitos matemáticos podem ser usados para resolver o problema, e deve se pôr em ação para resolvê-lo. Tendo obtido o resultado solicitado no problema, o aluno passa, então, à próxima fase, a "*Revisão*". Nela, deve-se voltar ao enunciado do problema, analisar se o resultado encontrado é adequado à pergunta do problema e porque os conceitos matemáticos utilizados guiaram à resolução correta. Os autores ainda mencionam a necessidade de convencer um amigo ou um inimigo da validade da resposta apresentada.

Tendo essas ideias em mente, elaboramos uma Ficha de Resolução de Problemas. Ela contém algumas etapas para possibilitar que o aluno passe pelas fases de *Entrada*, *Ataque* e *Revisão*. Nas pesquisas por nós desenvolvidas, essas etapas foram reformuladas no sentido de contribuir com o desenvolvimento do aluno para compreender como *atacar* um problema, e para melhor esclarecer ao aluno o que ele deveria fazer em cada etapa.

A primeira etapa da Ficha de Resolução de Problemas é a apresentação do enunciado do *Problema*. Em seguida, há a etapa das *Anotações*, em que os alunos devem anotar as informações que extraírem do enunciado do problema, a pergunta nele contida e conceitos matemáticos que podem colaborar para a resolução, completando, assim, a fase de *Entrada* sugerida por Mason, Burton e Stacey (1982).

Tendo essas informações na Ficha, os alunos passam para a etapa de *Estratégias*, na qual efetivamente resolvem o problema, isto é, encaram a fase de *Ataque* ao problema.

A próxima etapa da Ficha é a *Resposta*, na qual devem escrever a resposta do problema. Para isso, é necessário voltar ao enunciado para verificar se a solução encontrada está de acordo com a pergunta nele contida. Este é o início da fase de *Revisão*. Finalmente, a última etapa da Ficha de Resolução de Problemas é o *Convencimento*, na qual os alunos devem explicar o porquê de a solução encontrada ser correta. Entendemos que a etapa do *Convencimento* poderia ser usada pelos alunos como um momento de reflexão sobre as etapas e fases percorridas para chegar à solução do problema, pois, nela, é necessário que eles retomem todo o trabalho realizado para que possam refletir sobre as ações e cálculos efetuados, esclarecendo suas conjecturas e a validade da resposta encontrada. Essa reflexão finaliza a fase de *Revisão* de Mason, Burton e Stacey (1982).

No que se refere à nossa pesquisa, entendemos que esta Ficha de Resolução de Problemas seria adequada para alunos de 2º ano de Ensino Médio ao trabalharem com problemas envolvendo equações lineares, pois as etapas nela contidas poderiam colaborar para que os alunos participantes compreendessem como representar problemas com símbolos matemáticos, já que eles deveriam analisar o enunciado, retirar dele elementos e representá-los. Além disso, a reflexão que ela proporciona, ao solicitar que os alunos escrevam passo a passo o que pensam, o que extraem do problema, como resolvê-lo, também colaboraria para que eles tivessem melhor compreensão de como resolver um problema, isto é, além de ensinar *via* resolução e problemas, também poderíamos discutir o ensinar *sobre* a resolução de problemas (Schroeder & Lester, 1989), proporcionando a alunos uma visão mais ampla dos meios de se resolver problemas, e a professores uma reflexão sobre o uso dessa metodologia em sala de aula.

■ Os três mundos da matemática

Para analisar os dados coletados, utilizamos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013). Ele foi desenvolvido a partir de críticas às teorias de cognição corporificada e de processo-objeto. Tall (2013) analisa que essas teorias consideram somente um aspecto do desenvolvimento cognitivo em Matemática (respectivamente a corporificação e a utilização de símbolos matemáticos), e conjectura a existência de pelo menos três tipos de desenvolvimento cognitivo que devem ser considerados, e que habitam Três Mundos da Matemática: o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático.

O Mundo Conceitual Corporificado envolve percepções e ações efetuadas em objetos matemáticos. No Mundo Operacional Simbólico, essas ações são representadas por símbolos matemáticos que podem ser vistos como processos e como conceitos. Finalmente, o Mundo Formal Axiomático é o mundo de definições, postulados e teoremas que formam o corpo axiomático da Matemática.

Entendemos que este quadro teórico é adequado para nossa pesquisa pois, com ele, podemos analisar como os alunos utilizam os símbolos matemáticos que habitam o mundo simbólico: de forma proceitual, como processo e conceito (Gray & Tall, 1994), ou de forma procedimental, isto é, somente fazendo manipulações simbólicas sem compreendê-las, com o que chamamos de corporificações procedimentais (Lima, 2007). Além disso, também podemos buscar características corporificadas e a relação delas com as simbólicas, que colaboram para a relação entre dados do enunciado e equação. Finalmente, é de extrema importância analisarmos como características formais estão presentes no trabalho desses alunos com equações lineares.

O uso da ficha de resolução de problemas

Nesta pesquisa, trabalhamos com 25 alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo/SP (Brasil). Apresentamos a eles a Ficha de Resolução de Problemas, e explicamos que informações eles deveriam explicitar em cada etapa dela. Os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro integrantes num total de cinco grupos, chamados de G1, ..., G5. Foram propostos seis problemas aos alunos, um em cada encontro de 45 minutos. Para resolvê-los, os alunos deveriam utilizar a Ficha apresentada a eles. Assim, tivemos seis encontros com esses alunos. Na Figura 1 apresentamos uma Ficha como utilizada pelo aluno Jonas para resolver o Problema 1 (os nomes dos participantes foram modificados para garantir confidencialidade).

Os problemas apresentados foram extraídos do Caderno do Aluno fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, dos Relatórios Pedagógicos do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e da Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP). Todos foram resolvidos com o uso da Ficha de Resolução de Problemas.


FICHA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ANOTAÇÕES

ESTRATÉGIAS

RESPOSTA

CONVENCIMENTO

Figura 1: Ficha de Resolução de Problemas com a resolução de Jonas ao Problema 1
Fonte: Sena (2017)

O primeiro problema apresentado solicitava que eles representassem matematicamente uma situação que recai em um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, sem a necessidade de resolvê-lo. Isso foi feito para que pudéssemos compreender as dificuldades que os alunos participantes teriam para fazer tal representação. Além disso, nosso intuito inicial era o de apresentar problemas que envolvessem conteúdos de álgebra, e não somente equações lineares.

A partir dos resultados obtidos, decidimos utilizar somente problemas relacionados a equações, e buscar colaborar para amenizar as dificuldades que eles tiveram ao passar de um enunciado escrito para uma representação simbólica matemática.

■ "Entrada, ataque e revisão" dos resultados à luz dos três mundos da matemática

O primeiro problema que apresentamos aos alunos participantes solicitava especificamente "Qual sistema de equações que permite descobrir as quantidades de peças triangulares e pentagonais contidas na caixa?", isto é, a resposta ao problema deveria ser um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas. Tal problema permitiria que entendêssemos como os alunos participantes analisavam sentenças e as representavam matematicamente.

As respostas que obtivemos, entretanto, foram numéricas, isto é, a quantidade de peças triangulares e a quantidade de peças pentagonais contidas na caixa. Um exemplo é apresentado na Figura 2 em que Jonas especifica com desenhos o tipo de peça e a quantidade de peças de cada tipo.

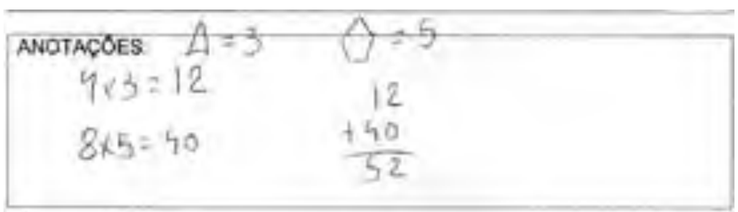

Figura 2: Anotações de Jonas para o Problema 1
Fonte: Sena (2017)

De fato, Jonas apresenta alguns cálculos, no mundo simbólico, e uma representação corporificada para se referir à quantidade de peças de cada tipo, não apresentando equações que representem o problema.

A resposta de Jonas e outras respostas similares à dele podem dar a entender uma dificuldade dos alunos não somente de representar matematicamente uma situação, mas também de compreender o que se pede nesse enunciado. Por outro lado, ao analisarmos a fala de Jonas para resolver este problema, observamos que a dificuldade dele pode ser de representar o enunciado do problema com símbolos matemáticos, mas não de compreender o raciocínio algébrico envolvido nele.

> Então, pra fazer este probleminha eu tive como base que o triângulo são três vértices e o pentágono são cinco vértices, então você precisa de dois pra você fazer chegar no 52 porque seria fácil você pegar e fazer direto nos pentágonos mas faltaria dois, e pra você conseguir este dois você vai ter que usar estes triângulos. Se três mais três é seis, então se você somar seis mais seis é 12, já tem um dois, já tem um 10, então você só precisa dos 40 que faltava e oito vezes cinco é igual a 40 e você junta 12 mais 40 igual a 52, que já tem a quantidade de vértices totais, então x=4 e y=8. E caso o cara duvide, é só pegar quatro triângulos e cinco pentágonos, fazê-lo (sic) contar um por um, que ele vai chegar no 52 certinho, e só o cara ter paciência pra fazer isso né. (Trecho de áudio do aluno Jonas, Grupo G5)

A fala de Jonas apresenta características do mundo formal ao evidenciar que a quantidade de vértices de um ou mais pentágonos só apresentaria múltiplos de 5, e que ele busca um número com duas unidades, logo não pode ser um múltiplo de 5, mas sim de 3, o que o faz iniciar com a quantidade de vértices de um triângulo. Ele também analisa as informações do enunciado simultaneamente, isto é, a quantidade de peças de cada tipo e a quantidade de vértices de cada peça, o que representa o sistema de equações. Tais ideias relacionam-se também ao pensamento algébrico, com características do mundo simbólico de utilização de símbolos para a resolução do problema.

Ao analisarmos como os alunos participantes trabalharam com as etapas de nossa Ficha, observamos que, na etapa de *Anotações*, eles apresentaram elementos do enunciado que são essenciais para a resolução dos problemas propostos, mas nem sempre todos os elementos necessários. Apresentaram também informações relevantes que foram utilizadas durante a resolução, dificuldades com os problemas e, em alguns momentos, esboçaram resoluções nessa etapa da Ficha.

Na Figura 3 apresentamos um exemplo em que os alunos do Grupo G3 identificaram as informações necessárias para a resolução de um problema em que se solicitava a quantidade de questões que se deveria acertar em um concurso com 20 questões para se obter ao menos 28 pontos, dado que, para cada questão correta o candidato ganharia 3 pontos e cada questão incorreta o candidato perderia um ponto. Os alunos ainda sugeriram um conteúdo matemático pertinente para a resolução.

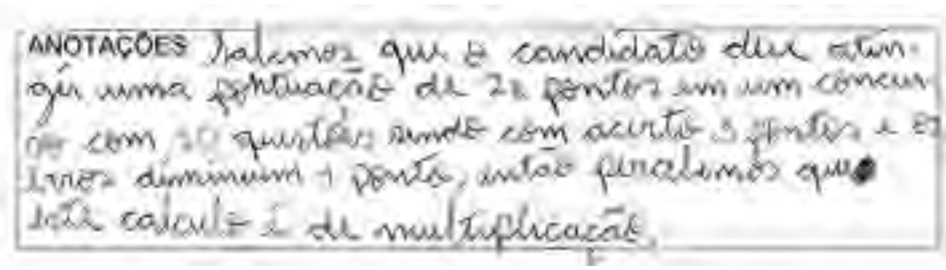
ANOTAÇÕES

Figura 3: *Anotações do Grupo G3 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

Na etapa da *Estratégia*, os alunos buscaram resolver o problema ou explicar qual estratégia usariam para resolvê-lo, como pode ser visto na Figura 4 em sobre o problema do concurso.

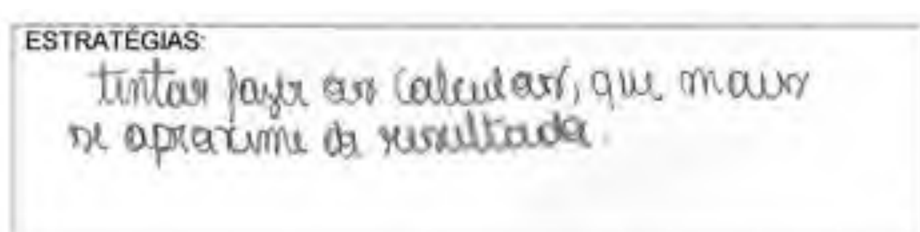
ESTRATÉGIAS:

Figura 4: *Estratégia do Grupo G2 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

É possível que, ao dizer “Tentar fazer os cálculos, que mais se aproxime do resultado”, eles se refiram a uma estratégia de tentativa e erro. Na análise do áudio do Grupo G1, percebemos que eles discutem formas de resolver esse problema, e que subjacente a essa discussão há um pensamento aritmético, por meio do qual conseguem chegar a um resultado correto.

Carina: Posso fazer?
Alexandre: Pode.
Carina: x.
Alexandre: Tá fazendo igual.
Alexandre: 9, 12, 18, 27, 28, 29, 30.
Alexandre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Carina: Quanto tem?
Alexandre: Quem acertou 10 questões ganhou 30, ainda sobra 9. Falei que dá 28. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tem que tirar mais ainda. Vou fazer os quadradinhos se não vou me perder [veja os "quadradinhos" na Figura 5. A gente já fez essa. 30, 29. 32, 31, 30, 29, 28.
Alexandre: tá certo é isso mesmo.

Na resolução deste problema, o Grupo G1 buscou valores para a resolução do problema. Ao constatar que o candidato precisa somar 28 pontos para obter aprovação no concurso, os alunos desse Grupo buscaram valores para chegar a este resultado. Primeiro realizaram uma tentativa com intervalos de 3 em 3, ou seja, para cada questão respondida corretamente o candidato ganharia 3 pontos, até obter 30. Quando perceberam que obtiveram um valor aproximado, ao apontar "quem acertou 10 questões ganhou 30", decidiram fazer "os quadradinhos" para melhor visualização da resolução (Figura 5), chegando assim à solução correta, o que evidencia características do mundo corporificado, mas também características do mundo simbólico quando perceberam a necessidade de calcular a quantidade de pontos ganhos e pontos perdidos.

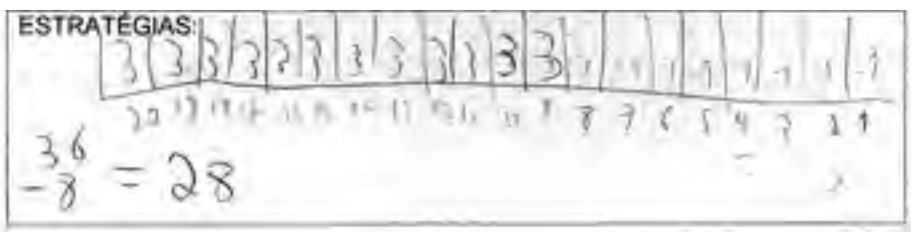

Figura 5: *Estratégia de resolução do Grupo G1 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

Na etapa da *Resposta*, os alunos, em geral, apresentaram respostas aos problemas, mas em alguns protocolos também apresentaram o desenvolvimento de suas resoluções, como observado na Figura 6. O problema envolvido nessa Resposta se refere à quantidade de páginas que se pode enviar via fax dado o preço do envio de cada página e um valor máximo a ser gasto.

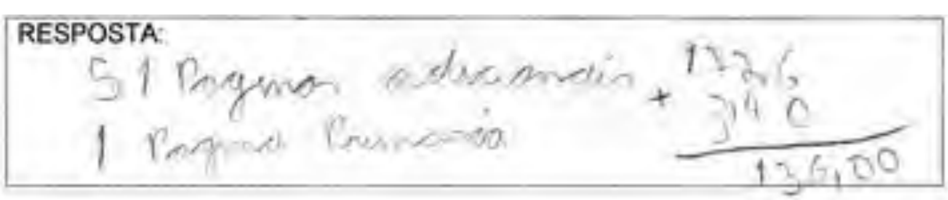

Figura 6: *Resposta do Grupo G1 para o Problema 3*
Fonte: Sena (2017)

Nesta resposta, os alunos apresentaram características simbólicas ao efetuar uma operação com o uso do algoritmo.

Na etapa do *Convencimento*, observamos que os alunos expuseram algumas de suas ideias, explicando o que foi feito na etapa das *Estratégias* ou o que entenderam ter concluído com a resolução do problema. Exemplo disso é apresentado na Figura 7.

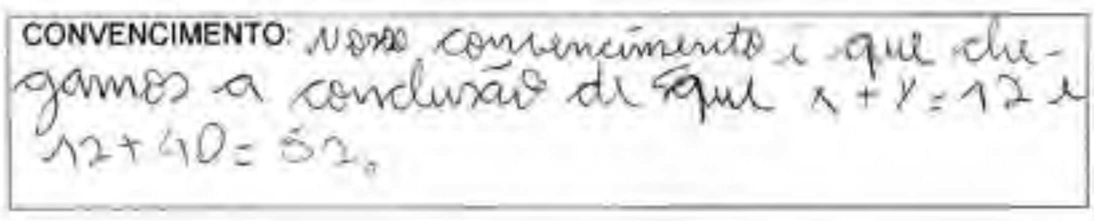
CONVENCIMENTO: Nosso convencimento é que chegamos a conclusão de que x + y = 12 e 12 + 40 = 52.

Figura 7: *Convencimento do Grupo G3 para o Problema 1*
Fonte: Sena (2017)

Na Figura 7 destacamos que os alunos do Grupo G3 iniciaram o *Convencimento* como uma característica simbólica para representar o problema, ao observarem que $x + y = 12$ e que $12 + 40 = 52$. Mesmo não tendo explicado que 12 se refere à quantidade de vértices das figuras triangulares e 40 a quantidade de vértices das figuras pentagonais, e essa igualdade não ter sido expressa em função de x e y, esses alunos chegaram perto da solução solicitada no Problema 1. Assim, aparentemente, para convencer alguém, eles buscaram expressões algébricas.

Entretanto, observamos que esses alunos tiveram certa dificuldade em redigir a etapa do *Convencimento*, e não apresentaram argumentos que fossem suficientes para convencer alguém de que as respostas apresentadas eram matematicamente válidas e corretas, mas explicaram seu raciocínio, como na Figura 8.

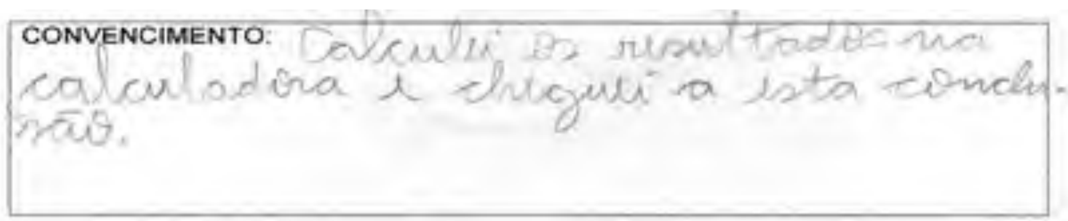
CONVENCIMENTO: Calculei os resultados na calculadora e cheguei a esta conclusão.

Figura 8: *Convencimento do Grupo G2 para o Problema 6*
Fonte: Sena (2017)

Nossas conjecturas são as de que esses alunos não estão habituados a explicarem o raciocínio usado para a resolução de um problema ou de um cálculo. Essa falta de hábito acabou por se revelar em dificuldade para tecer comentários no *Convencimento*, e não compreender quais elementos deveriam explicitar nessa etapa da Ficha.

Ao trabalharmos esses problemas com a Ficha de Resolução de Problemas, observamos que esta colaborou para que os alunos participantes compreendessem melhor como resolver problemas, como podem desenvolver as soluções, entre outros elementos. Por outro lado, eles ainda tiveram dificuldades em etapas algumas etapas da Ficha, como, por exemplo, em explicitar um Convencimento, uma justificativa para a validade da resolução apresentada.

Conclusões

Neste artigo, tivemos como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas. Para isso, trabalhamos com uma turma de 25 alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo/SP (Brasil), que resolveram seis problemas, cada um em um encontro de 45 minutos. Ao resolverem os problemas, esses alunos utilizaram nossa Ficha de Resolução de Problemas, a partir da qual é possível passar pelas fases de Entrada, Ataque e Revisão de Mason, Burton e Stacey (1982). Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013). Buscamos, com esse quadro teórico, entender como os alunos participantes utilizavam equações, característica do mundo simbólico, para representar problemas, com elementos do mundo corporificado, buscando entender se a relação entre esses elementos é feita a partir de características formais.

Ao analisarmos o uso da Ficha de Resolução de Problemas, observamos como os alunos trabalharam com cada uma das etapas nela contida, se fazem a passagem de *Entrada* para *Ataque* e finalmente para *Revisão*.

Verificamos que, ao preencherem as *Anotações* da Ficha, a maioria dos alunos trouxe elementos do enunciado, como esperado, mas, aparentemente, não extraíram todos os elementos necessários para a resolução do problema. Além disso, muitas vezes eles esboçaram resoluções e respostas nesta etapa da Ficha. Weber (2012) aponta as dificuldades que os alunos possuem na leitura do problema e a interpretação dos dados matemáticos. Isso também foi evidenciado em nossa pesquisa, e entendemos que a etapa das *Anotações* colaborou para amenizar essa dificuldade.

Na etapa das *Estratégias,* o aluno deve registrar um método para alcançar um objetivo ou resultado específico, isto é, a forma pela qual ele resolveria aquele problema. Em nossos dados, observamos que os alunos participantes de nossa pesquisa apresentaram possíveis meios de resolver o problema apresentado e extraíram desta etapa dados necessários para chegar ao resultado do problema. Evidenciamos também que eles encontraram dificuldades especialmente em representar algebricamente o problema proposto. Por outro lado, evidenciamos que as tentativas de utilização de equações, mesmo que nem sempre bem-sucedidas, envolviam características do mundo formal.

A etapa da *Resposta* permitiu que o aluno apresentasse a solução do problema a partir das ideias presentes nas *Anotações* e nas *Estratégias*. Não observamos, entretanto, uma volta ao problema para analisar a pergunta e escrever uma resposta adequada. Isso foi evidente particularmente no Problema 1, em que eles deveriam apresentar como resposta um sistema de equações lineares, e apresentaram o resultado desse sistema. Nos outros problemas, as respostas foram coerentes com a pergunta.

A maior dificuldade que observamos nesses alunos foi na etapa do *Convencimento*, tendo em vista que ela envolve diretamente o ato de refletir sobre a resolução apresentada, e buscar uma justificativa para ela. Outra dificuldade evidenciada foi a de escreverem seu raciocínio. Observamos que o uso da Ficha de Resolução de Problemas propiciou uma análise mais detalhada do enunciado do problema, e consequentemente a obtenção de informações relevantes para a resolução, o que favoreceu a descoberta e a reflexão, por parte dos alunos, sobre diversas formas de resolver os problemas propostos. Assim, eles apresentaram resoluções criativas e interessantes. Entretanto, não foi possível sanar todas as dificuldades deles em representar simbolicamente as ideias envoltas nos problemas.

Relatamos ainda que o trabalho em grupo, aliado a essa Ficha, foi importante para que os alunos raciocinassem, discutissem e argumentassem sobre a resolução dos problemas. A discussão, reflexão e cooperação dos alunos entre si foi de fundamental importância para que eles pudessem compreender os problemas, chegar a conclusões acertadas. Ao descrever o raciocínio realizado, os alunos desenvolveram representações simbólicas para os problemas; discutiram aspectos formais ao observarem a validade dos conceitos utilizados; e trabalharam com ideias corporificadas, que guiaram o trabalho deles à solução correta.

No que se refere à análise à luz dos Três Mundos da Matemática, observamos que as características do mundo corporificado foram evidenciadas ao buscarem meios de representar o raciocínio que estavam seguindo. Os alunos tinham pensamento algébrico, utilizavam estratégias de resolução subjacente a uma equação, porém nem sempre escreveram tal equação. Nesse trabalho, surgiram características do mundo formal, quando os alunos utilizaram os conceitos matemáticos.

Mesmo com os avanços observados com esses alunos, eles tiveram apenas seis problemas para se adaptar a essa nova forma de trabalho e aprendizagem matemática. Dessa forma, as mudanças de postura e desenvolvimento algébrico ainda foram tímidas. Entendemos que é necessária a continuação desse trabalho, de forma a obter resultados mais duradouros. Além disso, sugerimos que a continuação de pesquisas com o uso dessa Ficha para a resolução de problemas permitirá que compreendamos como ela pode colaborar ainda mais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e do entendimento da representação algébrica por alunos de diversos níveis de escolaridade.

Referências bibliográficas

Araújo Segundo, S. I. (2012). *Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1o grau: representações múltiplas.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande/PB.

Cybis, A. C. (2014). *Resolução de Problemas Multiplicativos: análise de processos heurísticos de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Gray, E., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), pp. 115-141.

Koch, R. M. (2011). *Uma Introdução ao Estudo de Equações Quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Lopes, S. E. (2007). *Alunos do ensino fundamental e problemas escolares: leitura e interpretação de enunciados e procedimentos de resolução.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically* (1a ed.). London: Addison-Wesley.

Pita, A. P. (2016). *A ideia de função por meio da resolução de problemas: narrativas da educação de jovens e adultos.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Santos, R. P. (2011). *O papel do software Aplusix na transição de equações de avaliação para equações de manipulação: o caso das equações quadráticas.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Schroeder, L. T., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. Em P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Sena, M. R. (2017). *Resolução de Problemas Algébricos: Uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (1a ed.). New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Weber, R. G. (2012). *Estudos das dificuldades de leitura e interpretação de textos matemáticos em enunciados de problemas por alunos do ensino médio.* Dissertação de Mestrado , Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente.