

ERRORES RECURRENTE AL RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS APLICADOS A LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

COMMON ERRORS INVOLVING MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING APPLIED TO ECONOMIC SCIENCES

Kenner Ordoñez Lacayo
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
kenner.ordonez@ucr.ac.cr

Resumen

Se estudian los errores frecuentes de estudiantes en problemas de matemáticas aplicadas a las ciencias económicas, con el fin de buscar medidas correctivas. Para esto se seleccionó una muestra de 41 exámenes resueltos por estudiantes de cursos ExMa, un proyecto con 10 años de experiencia en evaluaciones de aprendizajes matemáticos, en cuyo período se han archivado soluciones de exámenes de dos cursos de matemáticas para futuros profesionales en ciencias económicas. Se determinan errores recurrentes de los estudiantes en sus soluciones, se hace una clasificación de estos y se establecen posibles causas para terminar con algunas recomendaciones a los docentes. Uno de los principales resultados es que los estudiantes no tratan de resolver los ítems que se refieren a aplicaciones.

Palabras clave: matemáticas, ciencias económicas, evaluación, errores

Abstract

Students frequent errors in mathematics problems applied to economic sciences are studied in order to look for corrective measures. So, we chose a sample of 41 exams solved by students of ExMa courses; a project with 10 years of experience in evaluations of mathematical learning, in which period exam-solutions of two mathematics courses have been filed for future professionals in economic sciences. We determined students' common errors in their solutions; and classified them, establishing the possible causes and providing some recommendations to teachers. One of the main results is that students do not try to solve the items that refer to applications.

Key words: mathematics, economic sciences, evaluation, errors

■ Introducción

Para el año 2016 en Costa Rica se reportó una tasa de cobertura en secundaria del 95,9%, sin embargo, para este mismo año, solamente el 50,4% de los jóvenes entre los 18 y 22 años tenían la secundaria finalizada (Programa Estado de la Nación, 2017, p. 49). Esto significa que en Costa Rica se procura que todos los jóvenes se inscriban en la secundaria, esto mediante estrategias que buscan la permanencia de los jóvenes en los sistemas educativos de secundaria.

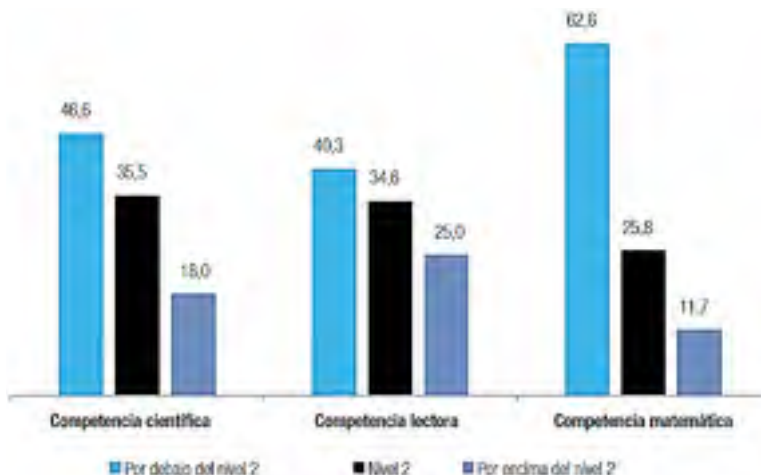


Ilustración 1. Distribución de los estudiantes costarricenses según nivel de desempeño en las pruebas PISA 2015.

Fuente: Programa Estado de la Nación (2017, p. 52).

Lo anterior sería muy bueno si se lograra mantener altos niveles en la calidad de la educación que reciben los jóvenes, pero, al analizar algunos indicadores que permitan comparar la calidad respecto a otros países, los resultados no son tan alentadores. Por ejemplo, en las Pruebas PISA aplicadas en el 2015, tal y como se aprecia en la Ilustración 1, un alto porcentaje de los jóvenes están por debajo del nivel 2 en las competencias evaluadas (Científica, Lectora y Matemática), siendo que en la matemática es donde poseen mayores dificultades, de hecho, en la Competencia matemática más del 60% no alcanza el nivel 2.

Además de no alcanzar los niveles aceptables en la Competencia matemática, tal y como se observa en la Ilustración 2, también la nota promedio que obtienen los jóvenes costarricenses está muy por debajo de la media de los resultados en PISA.

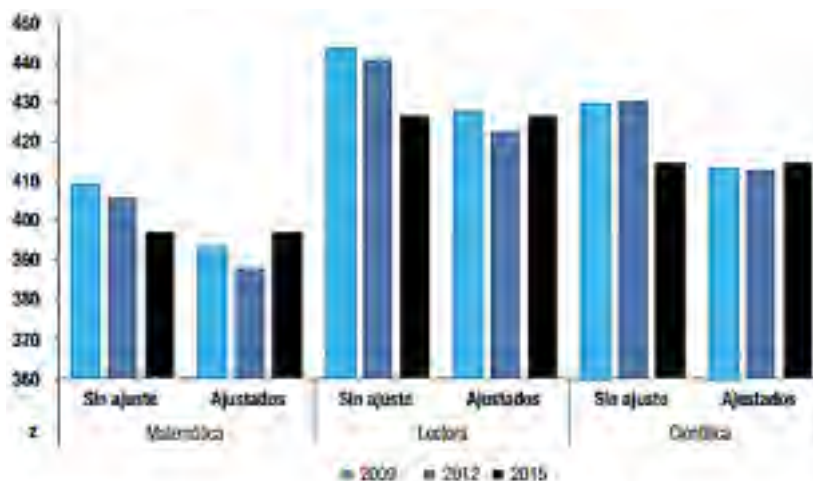


Ilustración 2. Comparación de los puntajes promedio de PISA con los ajustados por cobertura y modo de aplicación.

Fuente: Programa Estado de la Nación (2017, p. 195).

En general, con estos resultados, tal como se observa en la Tabla 1, en la Competencia matemática, Costa Rica está en la posición 59 de 70 zonas que participaron en las pruebas PISA 2015. En general, en todas las competencias, las zonas latinoamericanas participantes están por debajo de la mitad de las 70 zonas.

Tabla 1. Notas promedio de Latinoamérica en las pruebas PISA 2015

(70 zonas)	Matemáticas	Ciencias	Lectura
Media OECD	490	493	493
Argentina	456 (42)	475 (38)	475 (38)
Chile	423 (48)	447 (44)	447 (42)
Uruguay	418 (51)	435 (47)	437 (46)
México	408 (56)	416 (58)	423 (55)
Costa Rica	400 (59)	420 (55)	427 (52)
Colombia	390 (61)	416 (57)	425 (54)
Perú	387 (62)	397 (64)	398 (63)
Brasil	377 (65)	401 (63)	407 (59)

Fuente: basado en datos de la OECD (2016).

Lo anterior es una muestra del nivel matemático de la población estudiantil que reciben las universidades de Costa Rica. En el caso de la Universidad de Costa Rica, aunque esta posee un sistema de admisión que incluye una prueba de ingreso con altos estándares internacionales (Programa Permanente de la Prueba de Aptitud Académica, 2014), lo cierto es que el sistema no está diseñado para verificar las habilidades específicas para cada una de las carreras que la componen.

Ante las situaciones expuestas anteriormente, la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica ha procurado brindar oportunidades a los estudiantes para que alcancen los niveles necesarios para desempeñarse adecuadamente en los cursos que imparte. Algunas de estas medidas son el Diagnóstico de Matemática (Vicerrectoría de Docencia, 2009a) y el Proyecto Exámenes de Matemáticas (Vicerrectoría de Docencia, 2009b).

Según la Escuela de Matemáticas (2017), el Proyecto Exámenes de Matemáticas (ExMa) consiste en una modalidad de algunos cursos de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, en la que los estudiantes deciden prepararse a distancia para realizar pruebas parciales que le certifiquen la aprobación del curso respectivo. Esta modalidad está dirigida a estudiantes aventajados o que han reprobado en varias ocasiones el mismo curso. Los estudiantes deben aprobar (obtener una nota de 67,5 o superior en la escala 0-100) el primer parcial para poder inscribirse en el segundo parcial y haber aprobado este último para poder inscribirse en el tercer parcial. Una vez que aprueban el tercer parcial, se les da por aprobado el curso con una nota equivalente al promedio de las notas con que aprobó cada examen parcial. Una de las diferencias, además de ser preparación a distancia, es que el estudiante no debe, necesariamente, realizar los tres exámenes parciales en el mismo ciclo lectivo, sino, que puede, por ejemplo, matricular un parcial cada año.

Como en el proyecto ExMa la evaluación únicamente depende de los exámenes que realizan los estudiantes, es muy importante que los instrumentos de medición estén muy bien diseñados y acordes a los objetivos y contenidos de los grupos regulares de cada curso. Por tal motivo, cada uno de los instrumentos sigue un proceso riguroso de diseño.

El diseño de los instrumentos sigue 3 etapas: diseño de la tabla de especificaciones, diseño de los ítems y validación del instrumento por la coordinación del curso y del proyecto ExMa. El diseño general de la tabla de especificaciones es semejante a la propuesta por Tecnológico de Monterrey (2016), solo que está orientada por los objetivos específicos de cada curso y el número de horas que se le dedica a cada objetivo en los grupos regulares. Para el

diseño de cada ítem se considera la distribución de puntos que se obtuvo en la tabla de especificaciones y procurando que sean al menos dos tipos de reactivos. Adicionalmente, cada ítem es sometido a revisiones que garanticen que mida el objetivo específico y que esté perfectamente redactado. Para garantizar la asignación de puntos se deben realizar las soluciones que realizarían los estudiantes. Una vez que se finaliza con estas dos etapas, la propuesta de examen se envía a la validación de las coordinaciones para verificar que cumpla a cabalidad con las dos primeras etapas.

Una vez que el instrumento ha sido corregido, como es de esperar, se aplica a los examinados. Una vez aplicado cada instrumento, este es enviado para que se archive y forme parte de una batería de reactivos. Paralelamente, a los estudiantes se les facilita la nota que obtuvo, así como una lista de objetivos y contenidos que debe reforzar, los cuales están asociados a las tareas cognitivas que eran necesarios para resolver los ítems. Adicionalmente, se le permite consultar la solución de cada ítem para que compare lo que el examinado realizó, respecto a la solución esperada. De esta forma se espera que el examinado compare su calificación respecto a la solución que realizó en el instrumento.

En los cursos del área de Ciencias Económicas correspondientes al proyecto ExMa, durante los tres ciclos lectivos del 2017 (marzo de 2017 a febrero de 2018) se realizaron 41 exámenes (combinación de 3 parciales y 25 estudiantes). En la

Ilustración 3 se observa que la mayoría de los estudiantes realiza cada parcial solamente una vez, pero el nivel de deserción de estos cursos del proyecto es muy alto.

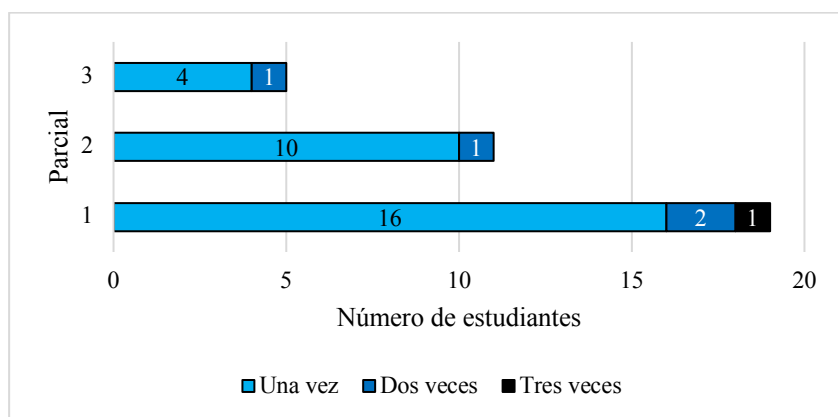


Ilustración 3. Frecuencia del número de veces que cada estudiante matriculó alguno de los 3 parciales.

Adicionalmente, en la Ilustración 4 se observa que, de los 25 estudiantes, 11 no lograron aprobar ninguno de los parciales y que solamente 2 aprobaron el curso.

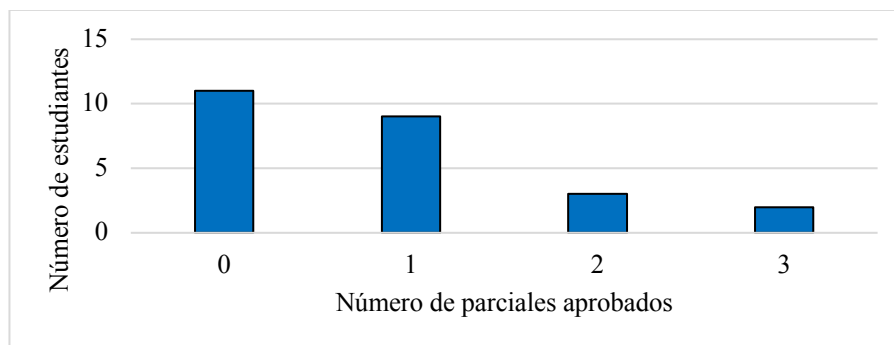


Ilustración 4. Número de parciales que aprobaron los estudiantes.

Con los datos expuestos en la

Ilustración 3 y la Ilustración 4, con los resultados de Costa Rica en PISA y con las listas de objetivos que debían reforzar los examinados es que se decide analizar errores para así poder realizar recomendaciones de cómo abordar estas temáticas, tanto para los estudiantes que estudian a distancia como los docentes de los grupos regulares de cada curso de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica.

Considerando lo anterior y que los estudiantes de Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica no presentan una buena actitud hacia los cursos de Matemáticas, que estos estudiantes presentan hábitos de estudio deficientes y considerando que los cursos (y sus materiales didácticos) están diseñados para lecciones presenciales, esta primera etapa de la investigación se orienta mediante el siguiente objetivo:

Determinar los errores recurrentes que cometen los estudiantes al resolver problemas de matemáticas aplicados a las ciencias económicas, con el fin de buscar medidas correctivas que permitan superarlos, tanto por los alumnos autodidactas como por los docentes que enseñan estas temáticas.

■ Marco referencial

Para esta investigación se opta por analizar los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de matemáticas aplicados a las ciencias económicas, por tal motivo se debe considerar cómo los estudiantes abordan la resolución de problemas, para lo cual se decide considerar uno de los métodos más difundidos, el de Pólya.

Como describe Alfaro (2006), el método de Pólya para resolver problemas se puede dividir en cuatro etapas: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución. Para esta investigación, como solo se cuenta con las soluciones plasmadas por los estudiantes en sus exámenes, la clasificación de los errores se realizó en las etapas 2, 3 y 4 del método de Pólya. Estas etapas no son desarrolladas en este artículo pues son muy conocidas y están muy claras en el artículo del señor Alfaro.

Existen múltiples clasificaciones de los errores, de la revisión de literatura y considerando que algunas de ellas son semejantes, para esta investigación se opta por la clasificación basada en las de Davis (1984, citado en Rico, 1998, p. 88) y Radatz (1980, citado en Rico, 1998, pp. 88-90). De esta forma se obtienen los siguientes tipos de errores:

1. Inducidos por el lenguaje o la notación.
Se muestra dificultades al comprender la simbología matemática y su significado. Este tipo de errores suele afectar las 4 etapas del método de Pólya.
2. Inferencias erróneas por asociaciones incorrectas.
Se considera que el recíproco de un resultado siempre es verdadero. Este suele producirse en la etapa 3 del método de Pólya.
3. Recuperación de esquema previo.
No recuerda todos los detalles de conocimientos o procesos que aprendió previamente. Este se da con mayor frecuencia en las etapas 2 y 3 del método de Pólya, sin embargo, es posible que dé en las etapas 1 y 4.
4. Datos mal utilizados.
La información proporcionada en el problema se consigna o se utiliza erróneamente. Este se da en la etapa 2 del método de Pólya.
5. Reversiones binarias (efectuar mal una operación).
El resultado de alguna operación no es el correcto, pues se confunde con otra. Este se da principalmente en la etapa 3 del método de Pólya.
6. Representaciones inadecuadas.
Se escoge una representación o notación que es confusa o propensa a omitir resultados de operadores o conceptos matemáticos.

Este se da con mayor frecuencia en la etapa 2 del método de Pólya, sin embargo, se pueden encontrar algunos casos en la etapa 3 y otros, en la etapa 4.

7. Verificación de la solución.

Al tratarse de aplicaciones, es decir, donde se aplica la resolución de problemas, se confunde el resultado válido en términos de esquemas matemáticos con los de la situación real de la situación-problema. Este se da en la etapa 4 del método de Pólya.

8. Atención o ansiedad.

Se muestra un descuido y poca atención en el procedimiento desarrollado. Muchas veces se da por la ansiedad a ser evaluados o por crisis no necesariamente académicas. Este se puede presentar de forma transversal en el método de Pólya.

■ Metodología

Según Durán (2012, p. 121):

El Estudio de Caso (EC) es una forma de abordar un hecho, fenómeno, acontecimiento o situación particular de manera profunda y en su contexto, lo que permite una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, el mayor aprendizaje del caso en estudio. Utiliza múltiples fuentes de datos y métodos, es transparadigmático y transdisciplinario.

Este estudio se cataloga como un “Estudio de Caso”, por lo que, la metodología se basa en los puntos indicados por Stake (2005, citado por Durán, 2012, pp. 130-131). Entre las distintas subclasificaciones de los EC, en este se selecciona el EC desde su perspectiva Instrumental, en el sentido de Stake (2005, citado por Durán, 2012, p. 130).

Como primer punto, se decide escoger las temáticas clasificadas como “Aplicaciones de las matemáticas a las ciencias económicas”, esto porque es lo que, en esencia, diferencia los cursos de otros del proyecto ExMa.

En segundo lugar, con las tareas de los objetivos específicos, combinadas con las clasificaciones de los errores, planteadas en el marco teórico, se obtiene la triangulación requerida en los EC.

Respecto a los tipos de errores, Mulhern (1989, citado por Rico, 1998, pp. 99-100) indica las diferentes metodologías que existen para clasificar los errores. Para este estudio, considerando la información disponible y los plazos de la investigación, se decide optar por las estrategias “Contar el número de errores” y “Analizar los tipos de errores”.

Como tercer punto, el análisis de los resultados permitirá informar algunos de los errores que cometen los estudiantes en los cursos y temáticas seleccionadas. También, es posible obtener resultados que relacionen el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

En el cuarto punto, se retoma lo indicado en la justificación de este estudio y bajo los cuales se aplica este EC.

La última etapa, en este EC, se diseña y organiza este informe, especialmente, con el referido a las conclusiones.

La población está compuesta por 25 estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas (exceptuando Estadística y Economía) de la Universidad de Costa Rica, los cuales se inscribieron en los cursos Matemática para Ciencias Económicas I o Cálculo para Ciencias Económicas I, en la modalidad ExMa.

Los instrumentos utilizados solamente son sometidos a validez de contenidos, en función de dos jueces expertos. Los instrumentos están clasificados como tres exámenes parciales, los cuales son distintos en las cuatro convocatorias del proyecto ExMa, y que fueron aplicados durante tres ciclos lectivos.

■ Resultados

Como primer resultado se recopilan las 30 tareas que se requieren para responder distintos ítems, que, a su vez, miden un objetivo específico del curso (ver Tabla 2).

Tabla 2. Ejemplos de las tareas requeridas para responder los ítems

ID	Tarea
1	Reconocer el costo fijo, dada la función de costo total
2	Determinar el costo medio, dado el costo total y el número de artículos
3	Determinar los pares ordenados para cada recta
4	Aplicar la fórmula para determinar la pendiente
5	Estimar el intercepto de una recta
...	...
26	Determinar la diferencia común de una progresión aritmética
27	Determinar el término general de una progresión
28	Estimar el término de una progresión
29	Estimar la suma de términos de una progresión aritmética
30	Resolver ecuaciones exponenciales

Después de identificar las tareas requeridas, se identifican en cuáles de estas tareas se cometieron errores (Error), en cuáles se resolvió correctamente (Obtenidos) y en cuáles no se consignó una solución o respuesta (NR). Los resultados se pueden apreciar en la Ilustración 5.

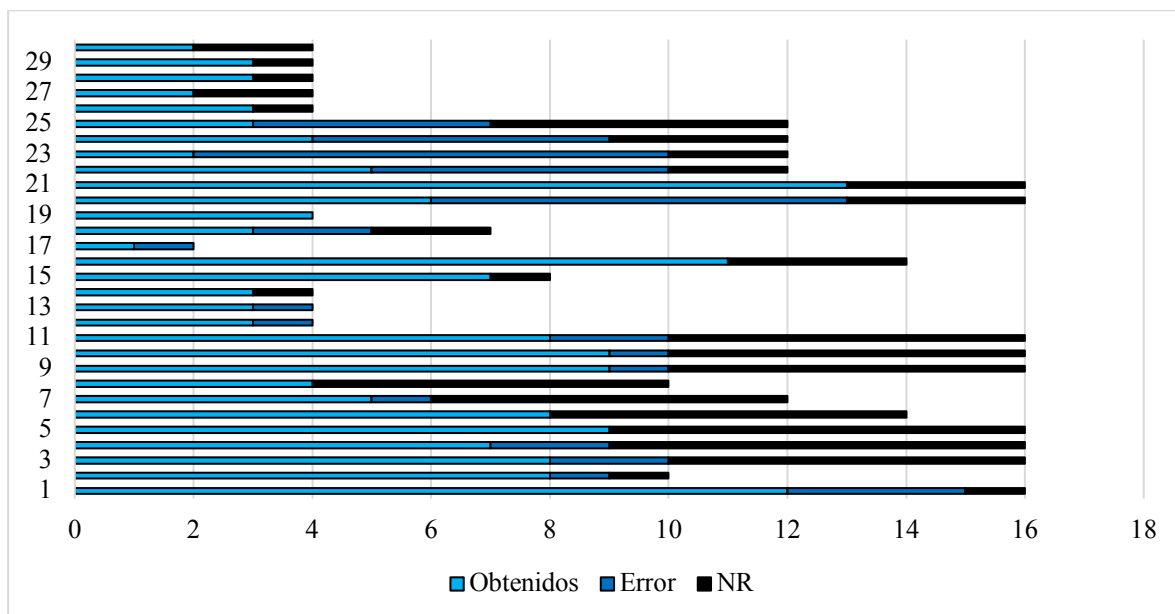


Ilustración 5. Distribución de puntos por tarea

Uno de los principales resultados de la Ilustración 5 es que una buena parte de los estudiantes ni siquiera intentan responder los ejercicios de matemáticas aplicadas.

Además, para el caso de la clasificación de los errores tipo 3 y 4 son los que cometen un mayor número de ocasiones (ver Ilustración 6).

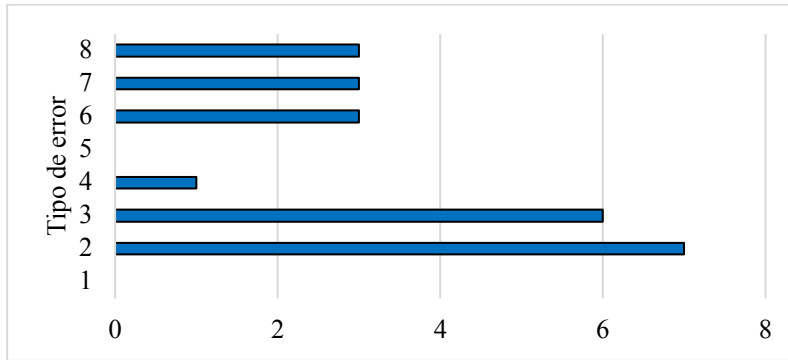


Ilustración 6. Frecuencia de los errores según el tipo

A continuación, se presentan algunos de los errores que se detectaron:

El costo, en dólares, que tiene Elvis por llevar a vender x unidades de su único producto está dado por $C(x) = 109x + 346$. ¿Cuáles son los costos fijos de Elvis?

~~\$495~~ \$346

Ilustración 7. Ejemplo de error tipo 2 y 3

a) Sumatoria de datos

Pares $(963, \frac{31}{10})$ ✓
 $(428, \frac{9}{10})$ ✓

$m = \frac{963 - 428}{\frac{31}{10} - \frac{9}{10}} = \frac{535}{\frac{22}{10}} = \frac{5350}{22} = 243.18$ ✗ $\frac{288}{10} = 18.93 = 5$

$963 = \frac{(288)}{10} \cdot 31 + b$ 78// La opción de la correcta función es

$963 = \frac{22248}{10} + b$

$-2224.8 = b$ ✓

-2224.8 ✓

$\frac{16 \cdot 288}{10} = \frac{4608}{10}$

Ilustración 8. Ejemplo de error tipo 2 y 3

$I = P \times q$

$I = 844$

$m \times b = y$

$m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \frac{2400 - 2000}{450 - 500} = \frac{400}{-50} =$

$(500, 2000)$ $(450, 2400)$

Ilustración 9. Ejemplo de error tipo 6

c. Equilibrio

$$\frac{28x}{16} + \frac{-339}{16} = \frac{-25x}{16} + \frac{2814E}{16}$$

$$\frac{28x}{16} = \frac{-25x}{16} + \frac{-339}{16} + \frac{2814E}{16}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{507E}{4}$$

$$x = \frac{507E}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{507E}{2}$$

R// x debe ser 507E

Precio?

Ilustración 10. Ejemplo de error tipo 6

■ Conclusiones

Para este estudio solamente se cuenta con datos de 25 estudiantes ya que para esta modalidad de estos cursos no se inscriben suficientes estudiantes como para realizar inferencias sólidas. Por tal motivo, es necesario buscar muestras mayores de los cursos estudiados. Una forma de lograr esto es extendiendo el estudio a una muestra que incluya a estudiantes de la modalidad regular de los cursos.

Otra forma de lograr una mayor muestra sería divulgando las ventajas de la modalidad ExMa, para que así se inscriban más estudiantes en esta modalidad. Con esto, además de que los estudiantes tienen otra forma de poder aprobar los cursos, también permitirá comparar los tipos de errores que cometen los estudiantes de la modalidad ExMa, esto con el fin de verificar si los estudiantes que se preparan a distancia cometen los mismos errores que los estudiantes que asisten a las lecciones presenciales.

Uno de los resultados más interesantes es que en realidad la mayoría de los estudiantes ni siquiera tratan de resolver los ítems de aplicación de las matemáticas. Los datos presentados en este informe sugieren que se requiere un cambio significativo en la preparación que se les da a los jóvenes en lo que respecta a la resolución de problemas.

Adicionalmente, muchos de los errores que comenten los estudiantes están vinculados con los esquemas (en el sentido de la teoría Acciones-Procesos-Objetos-Esquemas, APOE) previos, pues no logran aplicarlos adecuadamente o no reconocen cuándo son necesarios para poder resolver el problema.

Aumentar el interés de los estudiantes por las aplicaciones de la matemática a sus carreras.

■ Referencias bibliográficas

- Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la Resolución de Problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (1), 1-13. Recuperado a partir de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6967>
- Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, 3(1), 121-134. Recuperado a partir de <http://investiga.uned.ac.cr/revistas/index.php/rna/article/view/477>
- Escuela de Matemáticas. (2017). Examen de Matemáticas. Recuperado a partir de <http://www.exma.emate.ucr.ac.cr/>

- OECD. (2016). *PISA 2015 Resultados Clave*. OECD Publishing. Recuperado a partir de <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf>
- Programa Estado de la Nación. (2017). *Sexto Informe Estado de la Educación Costarricense* (1 ed.). San José, Costa Rica: Servicios Gráficos, A. C. Recuperado a partir de <https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/assets/ee6-informe-completo.pdf>
- Programa Permanente de la Prueba de Aptitud Académica. (2014). Prueba de Aptitud Académica. *Compendio de Instrumentos de Medición IIP - 2014*, Cuadernos Metodológicos (pp 286-293). Recuperado a partir de <http://iip.ucr.ac.cr/sites/default/files/contenido/cuamet6.PDF>
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, Educación Matemática (pp 69-108). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. Recuperado a partir de <https://www.researchgate.net/>
- Tecnológico de Monterrey. (2016). Tabla de Especificaciones. Recuperado a partir de <http://sitios.itesm.mx/va/calidadacademica/files/especificaciones.pdf>
- Vicerrectoría de Docencia. (2009a). VD-R-8428-2009. *Proyecto Diagnóstico de Matemáticas*. Recuperado a partir de <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-8428-2009-pdf/>
- Vicerrectoría de Docencia. (2009b). VD-R-8375-2009. *Proyecto Exámenes de Matemáticas*. Recuperado a partir de <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-8375-2009-pdf/>