EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO COMO HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA RECTA Y SUS PROPIEDADES

THE GEOMETRIC THINKING AS A TOOL FOR CONSTRUCTING THE ANALYTICAL EXPRESSION OF THE STRAIGHT LINE AND ITS PROPERTIES

Ana Cecilia Otero Rodríguez, Jorge Ruperto Vargas Castro, María Mercedes Chacara Montes
Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Exactas y naturales, Universidad de Sonora (México)
anaoteroro@gmail.com, rvargas@mat.uson.mx , meche@mat.uson.mx.

Resumen
Esta investigación busca evaluar los efectos de dar un tratamiento alternativo a la enseñanza del concepto de línea recta y sus expresiones analíticas en bachillerato, utilizando la teoría de Van Hiele. Esta inquietud surge al observar la privilegiación del uso de herramientas algebraicas sobre el aspecto geométrico, provocando dificultades al aprendizaje de la geometría analítica; por lo que se propone una estrategia didáctica en la que se propicien los medios para que el estudiante reflexione y desarrolle su razonamiento geométrico, para que logre así apropiarse del objeto con una percepción que le permita manipularlo y comprenderlo, y no solo utilizar la geometría como un "dibujo" de representación de sus expresiones analíticas.

Palabras clave: línea recta, pensamiento geométrico, razonamiento geométrico, Van Hiele

Abstract
This research seeks to evaluate the effects of giving an alternative approach to the teaching of the concept of straight line and its analytical expressions in high school, using Van Hiele's theory. This concern arises when observing the privilege of using algebraic tools on the geometrical aspect, what hinders the learning of the analytical geometry. So, we propose a didactic strategy which provides the student with the aids to reflect and develop his geometric reasoning , so that he be able to get at the object with a perception that allows him to manipulate and understand it, and not only use geometry as a "drawing" of representation of their analytical expressions.

Key words: straight line, geometric thinking, geometric reasoning, Van Hiele

Introducción

Ante la preocupación por reconocer el trasfondo del tratamiento que se le da al tema de la recta en el nivel medio superior; así como las repercusiones que puede marcar el enfoque bajo el cual se guía el aprendizaje, nos hemos propuesto la realización de este proyecto de investigación, en el cual intentamos destacar la diferencia entre la construcción del objeto matemático(tanto en sus representaciones geométricas como analíticas) y la simple mecanización de algoritmos y fórmulas establecidas, ya que según nuestra hipótesis esta última acción por sí misma no permite desarrollar en el estudiante una comprensión del objeto y lo limita tanto para la manipulación de dicho objeto como para el aprendizaje de tópicos posteriores.

Esta investigación parte del hecho de la observación sistemática acerca de las dificultades de aprendizaje que de estos conceptos han presentado los estudiantes del nivel medio superior, para abordar el tema de la recta y sus expresiones analíticas de una manera más adecuada para su comprensión, destacando la importancia de propiciar los medios que lleven al alumno a reflexionar y desarrollar su razonamiento geométrico, para que pueda apropiarse del objeto matemático como un objeto de naturaleza geométrica, como punto de partida para propiciar la comprensión y manejo de sus representaciones analíticas; y que no solo use la geometría como "dibujo" de dichas representaciones.

Problemática

La recta es un tema con múltiples aplicaciones en diversas ramas del saber y forma parte del plan de estudio desde el nivel básico, es en sexto grado de primaria bajo el eje "número, álgebra y variación", donde aparece por primera vez este objeto matemático, y se le sigue dando continuidad en primer y segundo grado de secundaria, bajo el nombre de su correspondiente "ecuación lineal" (SEP, 2017, págs. 321-323).

Para adentrarnos en la problemática, es necesario hacer una distinción entre la forma en la que se percibe a la recta dentro de dos áreas de la matemática: La geometría sintética y la geometría analítica. Con relación a la enseñanza de la Geometría desde estos dos enfoques, Mora, Gutiérrez, & Herrera (2013) hacen referencia a una afirmación de un artículo de Gascón (2001b); en el que explican que : "Por un lado está la geometría sintética, propia del modelo euclidiano basada en una axiomática explícita y por otro lado una geometría analítica del modelo cartesiano cuya práctica se sustenta en técnicas del álgebra lineal y dejando implícita la axiomatización".

Aunque la Geometría Sintética está implícita en la Geometría Analítica, en muchos de los libros de texto, los ejercicios y las propias clases están comúnmente basadas en una utilización mecánica de reglas, fórmulas, etc. dados al alumno como una serie de pasos mecánicos a seguir, con los cuales se pretende que el estudiante domine un lenguaje algebraico abstracto sin darle la oportunidad de previamente descubrir propiedades y hacer razonamientos en los objetos geométricos en sí, para a partir de ellos establecer sus expresiones analíticas. Dicho de otra manera, como encontramos en un grupo de discusión: "Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas. Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos a estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos". (PMME-UNISON, 2001)

Es aquí donde radica el problema a estudiar, pues, con el paso de los años, en la escuela se ha minimizado la importancia de la geometría sintética, que va estrechamente relacionada con el uso del pensamiento geométrico.

Marco conceptual

Debido a la necesidad de mejorar la calidad educativa en México, se implementó la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), que busca mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante un enfoque basado en competencias.

En el artículo segundo del acuerdo número 442 se establece el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), donde se reconoce al Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias, como uno de los ejes de la RIEMS (SEP, 2008). Bajo este contexto es que en 2017 se diseñó el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3 (Geometría Analítica) (Morales, Cárdenas, Conde, Palafox, & Amavisca, 2017) que actualmente se utiliza como libro de texto para los estudiantes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (Cobach-Son), institución en la que se realiza este estudio; cuyo eje articulador del aprendizaje es: "Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico" (SEP, 2017). Este libro aborda el tema de la recta en sus secuencias didácticas 2.1 Pendiente y Angulo de inclinación, 2.2 Definición y distintas formas de la recta y 2.3 Rectas Paralelas y Perpendiculares.

Atendiendo a las competencias disciplinares mencionadas en el artículo 444 (SEP, 2008), a continuación, se muestran los siguientes puntos, que ilustran lo que el alumno ha de desarrollar durante las 3 secuencias didácticas antes mencionadas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Las cuales son citadas por el módulo de matemáticas 3.

Dentro de toda esta panorámica que engloba la RIEMS y su concreción en el COBACH, lo que abordaremos será el tema matemático de la línea recta atendiendo las dificultades antes mencionadas, así como sus expresiones analíticas. Un punto clave para este estudio es definir a lo que llamamos pensamiento geométrico y razonamiento geométrico.

Por pensamiento geométrico entenderemos a aquel en donde "se evidencia la importancia de la visualización de relaciones entre objetos geométricos y posterior modelación de éstas, así como la elaboración y comparación de algunos procedimientos propios de la geometría y de otros, que posibilitan la transición de una representación concreta de objetos geométricos a un análisis de propiedades de estos." (Jaime, Sánchez Robayo, & Fonseca González, 2008).

Por razonamiento geométrico entenderemos a aquella red que permite la adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos mediante la geometría, y que después posibilita al estudiante para que a través de los espacios logre explicar, conjeturar y/o justificar alguna propiedad. (Samper, Leguizamón , & Camargo, 2001)

Cuando hablamos de un enfoque tradicional, nos referimos a la praxis habitual dominante en la que prevalece un enfoque formalista, es decir: "que la actividad matemática se restringe a la manipulación de símbolos carentes de todo significado intuitivo por medio de reglas de transformación explícita y formal" (Serna, 2013)

Justificación

Para evidenciar la situación arriba mencionada, encontramos que algunos de los textos clásicos más importantes y reconocidos en geometría analítica como el de Lehmann, están delegando el tratamiento gráfico al lector (Mendoza, Ojeda, & Chavez, 2013), minimizando la importancia del uso del tratamiento geométrico dentro del mismo texto. En particular en este libro, en algunas de sus secciones podemos observar el tratamiento marcadamente algebraico y abstracto, a veces un tanto desligado de las ideas geométricas que prevalecen en el problema a resolver (Lehmann, 2004, págs. 106-108).

Por otro lado, en nuestro país existen algunas pruebas estandarizadas que se aplican a nivel nacional y que pretenden medir los niveles de logro alcanzados por los estudiantes, en primera instancia tenemos la prueba **planea** que se aplica en el nivel medio superior. Según las resultas revisadas de la sep en el año 2017 (SEP, pág. 7), esta prueba deja en evidencia el poco dominio que poseen los alumnos sobre el tema de la recta, pues más del 95% son incapaces de hacer deducciones y/o interpretar sus diferentes representaciones.

Imagen 1, Nivel de logro. Fuente: Planea (2017, pág. 7)

Aunado esto, tenemos los resultados del exhcoba (examen de admisión para la Universidad de Sonora), en este caso se analizaron los exámenes tipos 3 (división de ciencias biológicas y de la salud), y 4 (división de ingenierías, y ciencias exactas y naturales); correspondientes a los años 2015, 2016 y 2017, de los alumnos provenientes del colegio de bachilleres del estado de sonora. Se tomaron en cuenta únicamente los aciertos de conocimientos básicos de matemáticas y con base en estos resultados podemos observar que, aunque se supone que la educación que reciben en el nivel medio superior los debería de capacitar para su educación futura, existen estudiantes que no obtienen siquiera la mitad de las respuestas correctas, o son incapaces de tener un solo acierto, lo que evidencia las dificultades de las que hemos venido hablando.

Adicionalmente, la coordinación institucional de tutorías de la división de ciencias exactas y naturales de la misma universidad, nos proporcionó algunos datos específicos referentes a la situación que se refleja con respecto a los resultados semestrales de los estudiantes inscritos en las licenciaturas pertenecientes a esta división.

Según la información proporcionada, la materia de geometría analítica es la de más alto índice de reprobación en toda la división de ciencias exactas y naturales, según los reportes correspondientes a los años 2015-2016.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

Esto deja claro que el problema que empezó en el nivel básico sigue teniendo consecuencias tangibles en el nivel superior; y de ahí que nos concentramos en esta área de las matemáticas, en particular en el objeto matemático protagonista de esta investigación: la recta.

Según nuestra hipótesis esto lo atribuimos al deficiente manejo del pensamiento geométrico, que consideramos debe ser previo al manejo de las expresiones analíticas, para poder así generar una verdadera comprensión del objeto, y con ello una mejor manipulación.

CLAVE	MATERIA	Alumnos Inscritos	Alumnos Aprobados	Alumnos Reprobados	Índice de Reprobación %	Índice de Aprobación %	Licenciatura en...
SEMESTRE 2015-1							
6886	Geometría Analítica (23)	5	0	5	100	0	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica (23)	9	2	7	77.77	22.23	FÍSICA
8149	Geom. Analítica Descriptiva	14	3	11	78.57	21.43	GEOLOGÍA
6886	Geometría Analítica (23)	10	6	4	40	60	MATEMÁTICAS
	Totales	38	11	27	74.09	25.92	
SEMESTRE 2015-2							
8149	Geometría Analítica Descriptiva	75	61	14	18.66	81.34	GEOLOGÍA
6886	Geometría Analítica	29	13	16	55.17	44.83	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica	31	18	13	41.93	58.07	FÍSICA
6886	Geometría Analítica (08)	19	8	11	57.89	42.11	MATEMÁTICAS
	Totales	154	100	54	43.41	56.59	
SEMESTRE 2016-1							
6886	Geometría Analítica (23)	6	1	5	83.33	16.67	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica (23)	3	2	1	33.33	66.67	FÍSICA
6886	Geometría Analítica (23)	6	3	3	50	50	MATEMÁTICAS
	Totales	15	6	9	55.55	44.45	
SEMESTRE 2016-2							
6886	GEOMETRIA ANALÍTICA 13	36	23	13	36.11	63.88	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	GEOMETRIA ANALÍTICA 14	39	30	9	23.08	76.92	FÍSICA
6886	GEOMETRIA ANALÍTICA 15	20	8	12	60	40	FÍSICA
8149	GEOMETRIA ANALÍTICA DESCRIPTIVA 01	36	35	1	2.78	97.22	GEOLOGÍA
8149	GEOMETRIA ANALÍTICA DESCRIPTIVA 02	33	32	1	3.03	96.96	GEOLOGÍA
6886	GEOMETRIA ANALÍTICA 12	33	16	17	51.52	48.48	MATEMÁTICAS
	Totales	197	144	19	29.42	70.58	

Imagen 2: Concentrado de resultados semestrales de los alumnos de la División de Ciencia Exactas y Naturales de la UniSon.

Ante la problemática planteada, en nuestro proyecto se aborda el análisis de dos propuestas para la enseñanza del concepto de recta, una que parte de privilegiar el pensamiento geométrico para construir y manipular más adecuadamente su tratamiento analítico y por otro lado el tratamiento que tradicionalmente se le ha dado, en el que se hace énfasis en el manejo algebraico muchas veces desligado de las ideas geométricas que lo motivaron, lo cual nos lleva a plantear la pregunta de investigación a la que buscamos responder.

Pregunta de investigación

¿Qué diferencias se pueden detectar en el aprendizaje significativo del concepto de recta, en un curso de geometría analítica de bachillerato, al contrastar un diseño en el que prevalece el pensamiento geométrico contra el enfoque tradicional?

Objetivo

El objetivo general de esta investigación es determinar si el uso de un enfoque en el que predomina el pensamiento geométrico en la enseñanza de la geometría analítica facilita la comprensión del concepto de recta y sus respectivas expresiones analíticas, en estudiantes de tercer semestre de bachillerato. Para lograrlo nos hemos planteado una hipótesis.

Hipótesis

Los estudiantes que participan en la construcción del significado del concepto de recta y sus respectivas expresiones analíticas, bajo un enfoque en el que prevalece el pensamiento geométrico, logran una mejor comprensión con respecto a los que participan bajo el enfoque tradicional.

Marco teórico

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

El marco teórico que asumiremos será el modelo de van hiele, diseñado para propiciar el desarrollo del pensamiento geométrico. Este modelo data del año 1957 de los trabajos doctorales presentados por los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geoldof, en la universidad de Utrecht (Holanda), dirigidos por su director de tesis prof. Dr. H. Freudenthal (Hiele, 1957, pág. 1) presentaron un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Está formado por dos partes: la primera es descriptiva, pues identifica los tipos de razonamientos por los que el estudiante va pasando a lo largo de su formación matemática, desde que inician su aprendizaje hasta que logran alcanzar su grado máximo de desarrollo; estos son llamados *"niveles de razonamiento geométrico*". La segunda se enfoca en darle al profesor las "directrices" o pautas sobre cómo organizar las actividades, materiales y clases (entre otras cosas) para ayudar al estudiante a alcanzar el siguiente nivel de desarrollo, a estas directrices se les conoce como *"fases de aprendizaje"*. (Gutierrez , A.; Jaime, A.;, 1990).

Niveles de razonamiento geométrico: para ordenar los niveles de razonamientos por los que van atravesando los estudiantes, los Van Hiele los ordenaron de manera secuencial.

Nivel 1 reconocimiento o visualización.
Nivel 2 análisis.
Nivel 3 deducción informal u orden.
Nivel 4 deducción.
Nivel 5 rigor.

Fases de aprendizaje: los van hiele también organizaron una serie de fases que pretenden guiar al docente en el diseño y la organización de las experiencias de aprendizaje que irán llevando al estudiante a evolucionar de un nivel al siguiente. A continuación, una breve explicación de cada una de ellas, de acuerdo con los mismos autores (Vargas & Gamboa A., 2013, págs. 83-85).

> *Fase 1: información.* El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este.
> *Fase 2: orientación dirigida.* Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar.

Fase 3: explicitación. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.
Fase 4: orientación libre. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
Fase 5: integración. Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

Propiedades de los niveles: por último, para comprender este modelo es necesario analizar las siguientes características, que son propias de los niveles antes mencionados.

- *Recursividad*: los elementos que se vieron en el nivel n, aun cuando no sea de manera consiente, se hacen explícitos en el nivel n+1.
- *Secuencialidad*: no es posible brincarse alguno de los niveles, es decir, es necesario pasar de manera ordenada cada uno de ellos (n1, n2, n3, n4 y n5).
- *Especificidad del lenguaje*: para cada nivel existe un lenguaje que le corresponde.
- *Continuidad*: el tránsito entre cada nivel se produce de una manera pausada y continua, por lo que en ocasiones puede llevar varios años el atravesar por los niveles 3 y 4.
- *Localidad*: un mismo estudiante puede manejar distintos niveles dependiendo del área de la geometría en la que se le evalué.

Metodología

El estudio es *exploratorio de tipo cualitativo*, se pretende realizar *una investigación cuasi-experimental*, en la que entrarán en juego dos grupos de nivel bachillerato, ambos serán elegidos bajo los mismos criterios y les serán aplicados un instrumento diagnóstico inicial y un instrumento de evaluación final, que nos permitirán evaluar el contraste entre los enfoques de enseñanza con que serán tratados. Para ello se observará y valorará la *experiencia en aula* de dos grupos del tercer semestre de preparatoria mientras aborden el tema de la recta; el primer grupo recibirá un tratamiento alternativo en el que prevalezca un enfoque de enseñanza basado en el pensamiento geométrico, y lo llamaremos *grupo piloto;* mientras que el segundo recibirá un tratamiento de enseñanza tradicional y será utilizado como *grupo de control*.

Para lograr todo esto, nos hemos fijado *tareas específicas* que irán guiando el proceso de la investigación, que a continuación serán mencionadas:

#	Grupo piloto Grupo de control
1	Seleccionar a dos grupos, estableciendo algunos criterios que nos permitan hacer un acercamiento de la equivalencia de los mismos; entre ellos: que pertenezcan al mismo plantel educativo, que pertenezcan al mismo turno, que tengan un promedio general suficientemente cercano, entre otros posibles.
2	Diseñar e implementar un instrumento diagnóstico que nos permita situar el nivel inicial de los estudiantes de ambos grupos.
3	Seleccionar casos específicos, en ambos grupos, con los que se trabajara el estudio a detalle de la investigación. Serán seleccionados aquellos estudiantes que al menos hayan satisfecho el nivel 1 del modelo de razonamiento de van hiele.

4	Presentar materiales adecuados para trabajar los contenidos referentes a la recta, bajo un enfoque en el que prevalezca el pensamiento geométrico, para trabajar con el grupo piloto.
5	Definir el protocolo de observación.
6	Crear el instrumento de evaluación que nos permita determinar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico alcanzado en los estudiantes seleccionados, con respecto a la recta, en ambos grupos.
7	Implementar de manera preliminar el instrumento de evaluación, en ambos grupos.
8	Realizar adecuaciones al instrumento de evaluación, si se considera pertinente a partir de la implementación preliminar.
9	Implementa el instrumento de evaluación, posiblemente modificado, en ambos grupos.
10	Analizar la información obtenida.
11	Conclusiones y comentarios finales.
12	Elaborar la escritura final del documento.

Tabla 1: tareas metodológicas para la implementación y desarrollo de la investigación. Fuente: propia.

Parte importante de nuestra metodología es plasmar de manera muy clara los objetivos que queremos alcanzar en cada nivel por lo que hay que definir el trabajo en cada una de sus fases, para lograrlo presentamos unas tablas que serán la guía de las actividades y los instrumentos necesarios para la realización de esta investigación. Se tomó como referencia el trabajo de (Vargas & Gamboa A., 2013) para reconocer de manera general lo que va exigiendo cada nivel, después se adecuo a nuestro tema particular y se estipulo que es lo que se pretende desarrollar en cada una de sus fases correspondientes.
A continuación, se presenta el nivel 1 con sus respectivas fases:

Nivel 1: RECONOCIMIENTO		
Según (Vargas & Gamboa A.).	APLICADO A LA LINEA RECTA	FASES
El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son	El estudiante es capaz de: - Reconocer visualmente lo que es una recta y lo que no lo es. - Identificar el objeto (“la recta”) mediante el tacto. Haciendo uso de objetos manipulables o propios de su entorno. - Trazar rectas valiéndose de	**1. Información.** El profesor deberá informarse sobre los conocimientos previos sobre la circunferencia y la recta. En especial los elementos asociados a ella, como punto, segmento y dirección. **2. Orientación dirigida.** El profesor diseñará: a) actividades orientadas a que el alumno reconozca, a través de ellas, de manera visual, un segmento de recta en contraste con otras figuras planas, de tal forma que en otro momento le permita reproducirla utilizando otros recursos manipulables. b) actividades encaminadas a que logren identificar por medio de los sentidos un segmento de recta, un plano y un punto. **3. Explicitación.** Los estudiantes comentan entre sí lo observado.

principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.	instrumentos geométricos concretos. - Reconocer por medio de los sentidos un segmento y un punto.	**4. Orientación libre.** El profesor pide ejemplos de planos, segmentos y puntos en su entorno directo y propicia que el estudiante descubra cualidades de un segmento de recta; por ejemplo, al colocar una regla a lo largo de la escalinata y observar si los filos de los escalones. **5. Integración** El profesor induce a que el estudiante resuma lo que ha observado acerca de planos, segmentos de recta y puntos.

Tabla 2: nivel 1: reconocimiento. Fuente: propia.

Resultados

Se diseñó un cuestionario tipo examen, en el que los reactivos tienen la intención de problematizar al estudiante y de ubicarlo en los 3 primeros niveles de Van Hiele.
Por ejemplo:
Si tomamos *el reactivo numero 10:*

10. ¿Cuantas rectas pasan?
a) Por un punto dado

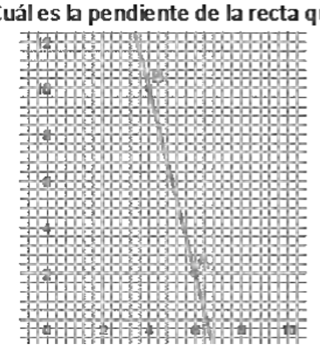
b) Por dos puntos dados

c) Paralelas a una recta dada

d) Paralelas a una recta dada y por un punto dado

Al estudiante se le está pidiendo que diga para cada caso cuantas posibles rectas se corresponden, es decir, se le está pidiendo lo expresado en la tabla de nivel 3 cuando dice: *El estudiante es capaz de identificar las condiciones necesarias y suficientes para determinar de forma única una recta;*
Si tomamos *el reactivo numero 3:*

3. **¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B?**



a) $m=\frac{1}{4}$

b) $m=-\frac{1}{4}$

c) $m=4$

d) $m=-4$

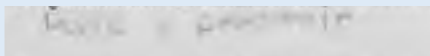
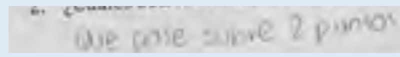
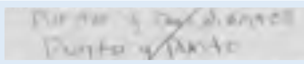
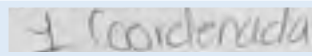
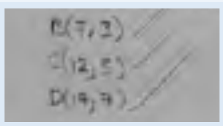
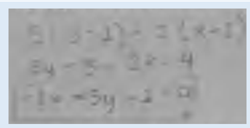
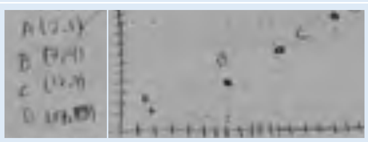
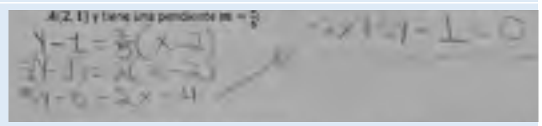
Vemos que se le está pidiendo al estudiante que ubique las coordenadas de los dos puntos marcados y que a partir de ellos logre deducir la pendiente de la recta en cuestión, como esto hace alusión a una propiedad especifica de la recta, el hecho de que la resuelva de manera correcta lo situaría en el nivel 2 de razonamiento, porque se corresponde con que: *Es capaz de percibir propiedades de la recta (como la dirección o inclinación).*

Si tomamos el reactivo no. 5

5. Si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares y sabemos que la pendiente de L_1 es $m_1=\frac{5}{3}$, entonces la pendiente de L_2 es:
a) $m_2=-\frac{5}{3}$ b) $m_2=\frac{3}{5}$ c) $m_2=-\frac{3}{5}$ d) $m_2=\frac{5}{3}$

En este caso se le está pidiendo al estudiante que Identifique la relación que hay entre las pendientes de rectas perpendiculares, de tal manera que al conocer la pendiente de una de ellas logre calcular la de la otra en cuestión. Como vemos entran en juegos más términos y con ello mayor complejidad pues ahora no sólo se trata de una propiedad específica sino de una interrelación que está conectando a ambas, por lo que si logra hacerlo bien se situaría en el nivel 3 de razonamiento, en las tablas se corresponde con lo siguiente: *El estudiante logra entender que algunas propiedades de la recta se deducen de otras vistas previamente.*

De la misma manera que fue diseñado el instrumento diagnóstico, se diseñó un instrumento de evaluación que se aplicó al finalizar el tema en ambos grupos. A continuación, se muestran dos de los reactivos con las respuestas de 2 casos estudiados de ambos grupos:

	Grupo piloto	**Grupo de control**
	Reactivo 2: ¿Cuáles son las condiciones para determinar una recta única	
Caso 1		
Caso 2		
	Reactivo 6: escribe las coordenadas de 3 puntos que correspondan a la recta que pasa por el punto A(2,1), y tiene una pendiente $m = \frac{2}{5}$	
Caso 1		
Caso 2		

El reactivo mostrado corresponde con el nivel 2 según nuestras tablas; el reactivo 6 corresponde al nivel 3. Como podemos observar en los casos específicos que aquí se muestran, la diferencia en el avance del pensamiento geométrico es evidente. En el reactivo 2 en el grupo de control vemos que no tienen clara la idea geométrica de la recta, en cambio en el grupo piloto, podemos observar como logran dar de manera más natural las condiciones para que una recta sea única.

En cuanto al reactivo 6 en el grupo de control los estudiantes se limitaron a querer encontrar la fórmula de la recta en cuestión, lo que nos muestra que no solo siguen de manera mecánica los pasos que aprendieron; en contraste, en el grupo piloto en este reactivo podemos observar cómo o no necesitan realizar operaciones algebraicas, es decir lo hacen mental por medio dela razón de avance, o muestran con la gráfica dicha razón de avance, y aun cuando pudieran equivocarse en las operaciones, nos da indicios de un cambio de pensamiento y una mejor comprensión del objeto matemático estudiado.
Por lo antes mencionado, aunque continuamos con el análisis de resultados, podemos decir que hasta este punto nuestra hipótesis parece ser verdadera.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de. *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, 215-236.

Camargo, Á. P. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. *Actas del VII CIBEM*, 1841-1849.

desconocido. (s.f.). Capıtulo 7 Sistemas de ecuaciones lineales. Recuperado el 14 de mayo de 2018, de http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T07.pdf

Gascón, J. (2001b). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. *Seminario de Matemáticas Fundamentales (28).Universidad Nacional de Educación a Distancia.*

Gutierrez , A.; Jaime, A.;. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En L. S. , & M. Sanchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla:Alfar. Obtenido de <www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.

Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en.* Universidad Real de Utrecht.

Jaime, A. G. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática (colección "Ciencias de la Educación" n° 4)*, 295-384.

Jaime, O. J., Sánchez Robayo, B. J., & Fonseca González, J. (2008). Desarrollo del pensamiento geométrico: algunas actividades de matemática recreativa. *Encuentro Colombiano de Matematica Educativa*. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/940/1/1Taller.pdf

Lehmann, C. H. (2004). *Geometría Analítica.* México: limusa.

Linares, A. R. (2008). Desarrollo Cognitivo: Las Teorías. *Master en Paidopsiquiatría.*

Mendoza, F., Ojeda, A. M., & Chavez, H. (2013). Enseñanza y comprensión de la recta como lugar geómetrico en el Bachillerato Tecnológico. *ALME*, 845-854.

Mora, M., Gutiérrez, F., & Herrera, F. (6-8 de noviembre de 2013). Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el. *Congreso de educación matemática de América Central y El Caribe*.

Morales, E., Cárdenas, L., Conde, M., Palafox, M., & Amavisca, R. (2017). *Matemáticas 3.* Hermosillo, Sonora, Mexico: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

PMME-UNISON. (2001). Perspectivas para la enseñanza de la geometría en el siglo XXI. Documento de discusión para un estudio ICMI. Obtenido de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Samper, C., Leguizamón , C., & Camargo, L. (2001). Razonamiento en geometría. *EMA*, 141-158.

SEP. (2008). Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de Diversidad. *Diario Oficial de la federación*, 2-4. Obtenido de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_numero_442_establece_SNB.pdf

SEP. (2008). Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. *Diario oficial de la federación.*

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México.

SEP. (2017). *Nuevo Currículo de la Educación Media Superior.* Obtenido de http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/campos_disciplinares

SEP. (2017). *Planea Resultados nacionales 2017 Educación Media Superior.* Obtenido de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF

Serna, L. R. (2013). Corrientes de Pensamiento Matemático del siglo XX. *Revista científica "general José María Córdova"*, 284-288. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/ recig/v11n12/v11n12a15.pdf

Vargas, G. V., & Gamboa A., R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia 27* (1), 74-94. Obtenido de www.revistas.una.ac.cr/uniciencia