Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PRINCIPALES ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN ESTUDIANTES DE FORMACIÓN INICIALEN LA EDUCACIÓN A DISTANCIA

MAIN ERRORS IN THE LEARNING OF CALCULUS IN INITIAL TRAINING STUDENTS IN DISTANCE LEARNING

Eric Padilla Mora, Cristian Quesada Fernández, Luis Andrés Ortiz Hernández
Universidad Estatal a Distancia (Costa Rica)
epadilla@uned.ac.cr, cquesadaf@uned.ac.cr, lortiz@uned.ac.cr

Resumen
Diversos estudios señalan los obstáculos, dificultades y errores que afrontan los estudiantes en el aprendizaje del cálculo; no obstante, hay una carencia de información en torno a esta temática en educación a distancia, en particular con estudiantes de carreras de formación docente. Este trabajo muestra una síntesis de un estudio realizado con el propósito de analizar los errores que cometen los estudiantes, de la asignatura Cálculo Diferencial de la Universidad Estatal a Distancia en Costa Rica. Se realizó una categorización de los errores tomando como referencia la propuesta de Saucedo, así como un análisis detallado de los mismos. Los resultados evidencian errores conceptuales, así como deficiencias en el cálculo de límites que requieren aplicar conocimientos previos y un uso incorrecto de simbología matemática. Se busca con el estudio mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y optimizar el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: errores, dificultades de aprendizaje, didáctica del cálculo, educación a distancia

Abstract
Several studies point out the obstacles, difficulties and errors that students face in learning calculus; however, there is a lack of information on this topic in distance education, in particular with students of teacher training careers. This work shows a synthesis of a study carried out with the purpose of analyzing the errors that students commit, of the subject Differential Calculus of the State University to Distance in Costa Rica. A categorization of the errors was made taking as reference the proposal of Saucedo as well as a detailed analysis of them. The results show conceptual errors as well as deficiencies in the calculation of limits that require applying previous knowledge and an incorrect use of mathematical symbology. This study seeks to improve both the teaching and learning processes of the contents mentioned above and to optimize students´ academic performance.

Key words: errors, learning difficulties, calculus didactics, distance education

Introducción

La enseñanza y sobre todo el aprendizaje de la teoría de límites de funciones, es un tema clave en el análisis matemático; y pilar sobre el cual se sostiene toda una estructura que da pie al desarrollo de contenidos como: continuidad, derivación e integración, entre otros. Sin embargo, diversas investigaciones como las realizadas por: Vrancken, Gregorini, Engler, Müllery Hecklein (2006), Claros (2010); García (2013) y Neira (2013), entre otras, por lo general realizadas con estudiantes de carreras universitarias no matemáticas, advierten que el aprendizaje de dicho contenido presenta diversas dificultades.

Al respecto,Vrancken et al (2006), señalan:

> La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración.
>
> A veces se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades no saben geometría, etc. Pero los alumnos pueden tener todos estos conocimientos y fracasar en el estudio del cálculo. (p.10)

Dichas dificultades pueden estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma de la enseñanza del cálculo a nivel universitario, la cual se lleva a cabo con métodos tradicionales que solo se exige del estudiante un dominio algorítmico repetitivo y algebraico; en otros quizá porque la aprehensión del concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: la abstracción, el análisis y la demostración.

Otro aspecto por considerar es que estas investigaciones se han realizado en procesos de enseñanza y de aprendizaje presenciales; pero ¿Qué sucede cuando dichos procesos se dan en una educación a distancia? Tal y como ocurre en la Universidad Estatal a Distancia (UNED), de Costa Rica, con la asignatura: Cálculo Diferencial, específicamente con estudiantes de la carrera enseñanza de la matemática.

Factores como la poca publicación de investigaciones en esta temática bajo un modelo de educación a distancia, aunado a los deficientes niveles de aprobación que se obtienen en los estudiantes, en dicha asignatura, los cuales se muestran en la tabla 1.

Tabla 1 Rendimiento académico de los estudiantes de cálculo diferencial 2015-2017

Año	Periodo	Aprobado	Perdido	Retirado
2015	II Cuatrimestre	16,6%	50,0%	33,4%
	III cuatrimestre	42,9%	37,1%	20,0%
2016	II Cuatrimestre	35,2%	53,0%	11,8%
	III Cuatrimestre	30,5%	56,5%	13,0%
2017	II Cuatrimestre	13,3%	80,0%	6,7%
	III Cuatrimestre	38,7%	41,9%	19,4%

Fuente: propia con datos de la cátedra.

Además conscientes que durante el proceso de calificación de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes, en los diferentes periodos, se ha notado que estos incurren en errores, que no han sido evidenciados ni documentados, los cuales están relacionados con conocimientos previos, el uso inapropiado de simbología y con la naturaleza del contenido (obstáculos epistemológicos), entre otros; propició el desarrollo de este proceso investigativo, cuyo objetivo principal fue analizar los errores que cometen los estudiantes, de la asignatura Cálculo Diferencial de la UNED, en las pruebas escritas.

Como etapa inicial el análisis se enfocó en el estudio de los ejercicios relacionados con el tema: límite de funciones, dado que es la base sobre la cual se sostiene la estructura del cálculo. Cabe señalar que en este artículo se enfatizará en el análisis los errores relacionados con aspectos de conocimientos previos y uso incorrecto de la simbología.

Con los resultados obtenidos se pretende que estos contribuyan con la toma de decisiones que permitan favorecer los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y así mejorar el rendimiento académico.

Marco referencial

Obstáculos epistemológicos, dificultades y errores en el aprendizaje del cálculo

Al analizar los errores en que incurren los estudiantes en el aprendizaje del cálculo, es posible detectar que los mismos no se producen de manera aleatoria; resulta factible detectar que estos se presentan al pedirle al estudiante realizar determinado procedimiento o llevar a cabo alguna acción específica. Para abordar esta temática, primero es pertinente hacer un repaso sobre las principales teorías propuestas sobre los obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de la matemática, y específicamente del cálculo.

En relación con los obstáculos, Brousseau (1983, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, sf) indica las siguientes características:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica. (p.2-3)

Además, señalan que Brousseau se refiere a tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. Sobre estos últimos, diversos autores, principalmente de la Escuela Francesa (Bachelard, Brousseau y Artigue) han realizado trabajos importantes, por ejemplo, Bachelard (1976) define los obstáculos epistemológicos como las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir su conocimiento. Según este autor, se dan cinco obstáculos principales: los conocimientos previos, el obstáculo verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el obstáculo animista.

En relación con las dificultades de los estudiantes al acceder al cálculo, Sierpinska (1994, citado por Neira, 2013) plantea cinco categorías:

- El rechazo al status operacional que permite el paso al límite,
- El referente al Principio de Continuidad,

- Los obstáculos relacionados con la noción de función,
- Los obstáculos geométricos,
- Los obstáculos lógicos, y los obstáculos simbólicos. (p. 46)

En el aprendizaje del cálculo, se requiere la comprensión de muchos conceptos los cuales son expresados mediante simbología matemática, por tal motivo, toma gran importancia que el estudiante realice un uso correcto de la notación empleada, por ejemplo: para representar límites infinitos y límites laterales, entre otros. En el caso de las demostraciones, se requiere emplear un formalismo para emplear la definición de límite al demostrar la existencia de los mismos.

A su vez, Neira (2013) menciona que Artigue (sf) reagrupa las dificultades en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico. (p. 46)

En relación propiamente al concepto de límite, los estudiantes deben saber determinarlo, reconocerlo tanto de forma gráfica como algebraica, mediante tablas, representación en el plano cartesiano, así como de manera verbal. Ante esto, son recurrentes la aparición de errores por parte de los estudiantes. Algunos de los obstáculos que pueden manifestar los estudiantes para Cornu (sf, citado por Vrancken et al, 2006) corresponden a:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas. (p.11).

En cuanto a las dificultades que presenta el concepto de límite Tall (sf, citado por Claros, 2010) señala: dificultades producidas por el lenguaje, la imposibilidad de transformar el cálculo de cualquier límite en una simple operación algebraica o aritmética y la idea de si el límite es alcanzado o no genera dificultades, así como el paso de lo finito a lo infinito tiende a confundir.

Por su parte Saucedo (2007) propone dos categorías de errores, adaptadas del trabajo de Pinchback. En este sentido, se mencionan los errores conceptuales y errores pre-requisito.

- En el error conceptual los estudiantes pretenden aplicar un procedimiento adecuado tal como es requerido por el concepto, pero produce errores al llevar a cabo los pasos necesarios.
- En el error pre-requisito los estudiantes aspiran resolver el problema, pero producen el primer error en una deficiencia de un concepto discutido anteriormente.

Cabe indicar que esta categorización fue la utilizada como referencia durante el desarrollo de esta investigación.

En suma, durante las últimas décadas, el estudio de obstáculos, dificultades y errores ha sido ampliamente abordado por diversos estudiosos. No obstante, todos ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. La bibliografía en torno a esta temática en el modelo a distancia es prácticamente nula. Por ello, resulta pertinente el estudio específico de los errores en que incurren los estudiantes en el aprendizaje del cálculo, específicamente en el estudio de límites, bajo la modalidad a distancia.

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo, y se tomó como referencia los estudiantes que aplicaron la primera prueba escrita ordinaria del III cuatrimestre del 2017. La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes con la misma cantidad de hombres que mujeres. La edad promedio de la muestra fue de 33 años con una desviación estándar de 7,68 años.

Para el estudio se consideraron las siguientes categorías de análisis.

1. *Errores de pre-requisito:* dentro de esta categoría están aquellos en los cuales los estudiantes intentan resolver el ejercicio, pero comenten errores relacionados con los conocimientos de asignaturas previas. Dentro de estos se consideró
    - Los errores de cálculo numérico.
    - Los errores algebraicos.
2. *Errores conceptuales:* en esta categoría se ubican aquellos en los que los estudiantes intentan aplicar el procedimiento apropiado tal como es requerido por el concepto, pero producen errores al llevar a cabo los pasos necesarios. Dentro de estos están
    - Los errores de definición.
    - Errores de formalismo al emplear la definición de límite al demostrar la existencia de estos.
    - Incorrecta aplicación de los teoremas.
    - No reconocer las formas indeterminadas.
    - El empleo de argumentos que conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.
    - No reconocer que por las condiciones se debe aplicar el teorema de intercalación.
3. *Errores de formalismo simbólico*: en esta categoría están aquellos en los cuales los estudiantes cometen errores al confundir el uso de la simbología correspondiente, la omite o bien tiene dificultades para estructurar las relaciones entre los objetos matemáticos. Dentro de estos están
    - Empleo incorrecto de la simbología.
    - Omite el uso de la simbología correspondiente.
    - Su estructura de trabajo no evidencia orden.

Por lo anterior y tomando como referencia la categorización propuesta por Saucedo (2007) para los errores, elaboramos una lista de tipos de errores y su definición, que son analizados en este estudio (ver tabla 2)

Tabla 2. Tipo de error y su definición

Error	Definición
Presencia de errores de tipo aritmético.	Cuando se presenta al menos un error de tipo aritmético.
Presencia de errores de tipo algebraico.	Cuando se presenta al menos un error de tipo algebraico.
Presencia de errores conceptuales.	Cuando se presenta al menos un error relacionado con el concepto de límite de una función.
En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	Cuando en el proceso de solución los argumentos empleados no son claros, el razonamiento no conlleva una secuencia lógica o la explicación carece de sentido.

Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	Cuando en el proceso de solución se omite o se emplea de forma incorrecta algún símbolo.
No estructura de manera lógica o argumentada la solución del ejercicio.	La forma de trabajo evidencia desorden, no es clara y es difícil comprende la secuencia y los pasos realizados por el estudiante.
No hace uso de racionalización para resolver el ejercicio o lo hace de manera incorrecta.	No reconoce o se evidencia que no sabe qué se debe aplicar racionalización en el proceso de solución del ejercicio.

Fuente: elaboración propia.

Al trabajar con los objetivos relacionados con el cálculo de límites; se consideraron las soluciones dadas a los ejercicios relacionados con dicho tema, tanto en la parte de respuesta breve como en la de desarrollo. En la tabla 3 se muestra la relación entre objetivo e ítem. En total se analizaron 6 ejercicios.

Tabla 3. Relación objetivo-ítem respecto a los instrumentos

Objetivo	Ítem en la prueba
Calcular límites tales como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ en donde $f(x)$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ usando los procesos de simplificación o racionalización.	RB (1a)
Aplicar los teoremas básicos de límites en la resolución de ejercicios y problemas.	RB (1b)
Calcular límites trigonométricos especiales: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$	RB (1c)
Utilizar el teorema de intercalación para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.	RB3
Demostrar, usando la definición formal, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ existe.	D1
Aplicar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.	D2
Simbología RB: corresponde a los ítems de respuesta breve de la prueba escrita. D: corresponde a los ítems de desarrollo.	

Fuente: instrumento de evaluación aplicado a estudiantes y diseño curricular de curso.

Análisis y discusión de resultados

El trabajo se enfocó en el estudio de los errores de prerrequisito y los de simbología. De acuerdo con los datos obtenidos, se puede inferir que:

a) Los estudiantes intentaron resolver los ejercicios, no obstante, aunque realizan diversos pasos en el proceso de resolución, la respuesta no es correcta. Esto permite concluir que, aunque no tengan noción de lo que se debe hacer intentan hacer un "algo" aunque no sea correcto. En su mayoría, el resultado es correcto para menos del 50%.

b) Aunque en el enunciado del ejercicio RB3, se les indica que se debe resolver aplicando el teorema de intercalación, la mayoría de los estudiantes no lo aplican, además, aunque pudieron resolverlos por otros métodos lo realizado era incorrecto. Esto permite forzar la idea anterior, de realizar cualquier cálculo, aunque no les lleve a resolver el problema.

c) En los diversos ejercicios, los estudiantes no incurren en errores de tipo aritmético.

En la tabla 4, se muestra la frecuencia relativa relacionada con diversos aspectos para cada uno de los ejercicios por analizar.

Tabla 4. Frecuencia relativa de los ítems analizados respecto a los criterios

Criterio	RB(1a)	RB(1b)	RB(1c)	RB3	D1	D2
1. Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	1,00	1,00	0,85	0,80	1,00	0,95
2. Resuelve solo algunos pasos del ejercicio.	0,15	0,05	0,25	0,00	0,30	0,10
3. Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	0,85	0,95	0,30	0,55	0,65	0,50
4. El resultado final es correcto.	0,45	0,35	0,30	0,25	0,60	0,35
5. Utiliza el teorema de intercalación.	na	na	na	0,30	na	na
6. En la resolución se evidencia la presencia de errores de tipo aritmético.	0,05	0,00	0,00	0,05	0,00	0,10
7. En la resolución se evidencia la presencia de errores de tipo algebraico.	0,60	0,50	na	0,45	0,15	na
8. En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	0,65	0,50	0,35	0,70	0,25	0,35
9. Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	0,40	0,30	0,25	0,35	0,00	0,50
10. Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	0,80	0,80	0,25	0,45	0,70	0,20
11. No hace uso de racionalización para resolver el ejercicio.	na	0,45	na	na	na	na
12. Plantea las condiciones iniciales de la definición de límite.	na	na	na	na	0,80	na
13. Encuentra el delta y es correcto.	na	na	na	na	0,60	na

14. Prueba que el delta obtenido funciona.	na	na	na	na	0,60	na
Simbología RB: corresponde a los ítems de respuesta breve en la prueba escrita. D: corresponde a los ítems de desarrollo en la prueba escita. na: no aplica.						

Fuente: solución brindada por los estudiantes en el instrumento de evaluación. III cuatrimestre 2017.

d) Los errores de tipo algebraico se dan cuando al resolver el límite se debe aplicar algún conocimiento previo.

A continuación, se muestran algunos de los errores de tipo algebraico más frecuentes; se muestra el procedimiento empleado por el estudiante y a la derecha un análisis del mismo:

- Al aplicar las fórmulas notables

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

Pese a que identifica que debe racionalizar, confunde la expresión $(a+b)(a-b)$ con $(a+b)^2$.

- Al factorizar

Al factorizar la expresión $16x^2-16x+4$ algunas de las propuestas los estudiantes corresponde a • $(2x-1)(2x-1)$ • $(2x-1)^2$ • $(16x-8)(2x-1)$ • $x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{1}{2}$ $(2x-1)(2x-1)=0$	En este caso las factorizaciones dadas por los estudiantes no son correctas. Desde nuestra perspectiva consideramos que es probable que para factorizar se utilizara los cero del polinomio que brinda la calculadora.
Al factorizar la expresión $8x^3-1$ algunas de las propuestas de los estudiantes corresponden a • $[(8x-1)(8x-1)](8x-1)$ • $(2x-1)^3$ • $(2x-1)\left((2x)^3-3\cdot 2^2\cdot x+3\cdot 2x^2-1^3\right)$	En este caso las factorizaciones dadas por los estudiantes no son correctas. Nótese que además existen errores en el uso las fórmulas notables.

$\sqrt{x^2+3x}+x$ $=\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x}\right)}+x$	Factoriza incorrectamente, omite el símbolo de la suma.
$\lvert x^2+3x-54\rvert<\varepsilon$ $\lvert 3\left(x^2+x-18\right)\rvert<\varepsilon$	Extrae un factor común de manera errónea.

- Al racionalizar

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\sqrt{x^2+3x}+x$ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2$ $\lim_{x\to\infty}x^2+3x-x^2$	Racionalización incorrecta.

- Otros errores algebraicos detectados

$x\sqrt{3x}+x=2x\sqrt{3x}$	Suma incorrecta de monomios.
$-1\le senx\le 1$ $\Rightarrow -\sqrt[3]{x}\le\sqrt[3]{x}\lvert senx\rvert\le\sqrt[3]{x}$	El multiplicar por $\sqrt[3]{x}$ en la desigualdad no es un procedimiento correcto.

e) Respecto al empleo de la simbología, los estudiantes aún tienen dificultad para utilizarla de forma correcta, dentro de los principales problemas se encontraron

- Olvidan escribir la expresión $\lim_{x\to a}$ cuando era necesario.
- Utilizar de forma incorrecta el símbolo de igualdad.

Algunos ejemplos de lo realizado por los estudiantes se muestran a continuación.

$-1<senx<1$ $-1<\lvert senx\rvert<1$ $\lvert senx\rvert=1$	Se omite el símbolo correspondiente entre cada relación, además la última conclusión no es correcta.
$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\sqrt{x^2+3x}+x$ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2$ $\lim_{x\to\infty}x^2+3x-x^2$	Comete un error de simbología y sintaxis al colocar el signo "=" entre expresiones que no son equivalentes. Además, omite la expresión $\lim_{x\to\infty}$ y el signo de igualdad entre expresiones que sí deben llevarlo.

$f(x)=x^2+3x+1$ $\lim_{x\to 6}=x^2+3x+1=\lim_{x\to 6}=6^2+3\cdot 6+1=55$ $f(x)=x^2+3x+1$ $x^2+3x+1-55=0$ $f(x)=x^2+3x-54$ $\underset{x\to 6}{f(x)}=6^2+3\cdot 6-54=0$	Error algebraico, conceptual, simbólico. El estudiante no hace lo que se le solicita en el ejercicio. Comete errores simbólicos escribiendo igualdades equivocadas. Primero evalúa en la función. Posteriormente divaga en la solución al realizar procedimientosin sentido.
$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{16\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\cdot\frac{1}{2}+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{4\left(4x^2-4x+1\right)}$	Hace uso incorrecto de la simbología. La igualdad que propone, además de no tener sentido no es correcta.
$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{16x^2-16x+4}=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{16\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\left(\frac{1}{2}\right)+4}=\frac{0}{0}$	Uso erróneo de simbología y además propone una igualdad donde no corresponde.
$=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}=\frac{1+1+1}{1-1}=\frac{3}{0}$ $\Rightarrow\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{16x^2-16x+4}$ no existe	Propone igualdades de no tienen sentido, además hace un uso erróneo de la simbología. Nótese que coloca un implica concatenando algo que no tiene relación.

f) Cuando en la solución de los ejercicios se requiere aplicarlas propiedades de los límites, factorizar o bien racionalizar los estudiantes son ordenados; sin embargo, si el ejercicio requiere análisis, por ejemplo, alguna sustitución o en el caso de demostración de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$) no son tan ordenados.

g) El cálculo de límites como $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$, 65% de los estudiantes no lo resolvió correctamente y 45% de este no considera la racionalización como una alternativa para resolver el ejercicio.

h) Respecto al cálculo de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$), parece que al ser un ejercicio que se incluye en la mayoría de las pruebas escritas de la asignatura, es probable que los estudiantes le den cierta prioridad a resolver este tipo de ejercicios, nótese que de acuerdo con los resultados en la tabla, la mayoría plantea bien las condiciones iniciales para la demostración y 60% resuelve el ejercicio de forma correcta. Los errores frecuentes encontrados están relacionados con aspectos algebraicos y de justificaciones inadecuadas.

Conclusiones y recomendaciones

Los objetivos planteados para esta primera etapa de la investigación fueron alcanzados. En primer lugar, fue posible realizar una categorización de los errores detectados, así como un análisis minucioso de los mismos e inferir sus posibles causas. Los resultados evidencian que los estudiantes incurren en errores de tipo algebraico en el cálculo de límites que requieren aplicar conocimientos previos como factorizar, racionalizar o emplear productos notables. Además, se presenta uso incorrecto de simbología matemática en los diversos ejercicios, excepto en aquellos de naturaleza demostrativa. Cabe destacar que, a lo largo del análisis, la aparición de errores de tipo aritmético fue casi nula.

Al tomar en cuenta las concusiones obtenidas en esta investigación, se hace pertinente hacer una revisión de la metodología que se está siguiendo en los cursos de formación inicial de la carrera, de manera que la misma sea más activa y permita al estudiante el dominio de habilidades instrumentales requeridas en el aprendizaje del cálculo, las cuales conlleven a que el estudiante sea capaz de identificar las principales estrategias a emplear al calcular un límite. Además, es oportuno en los cursos iniciales establecer mecanismos para reconocer los errores en que están incurriendo los estudiantes, detectar las posibles causas y se logre además crear estrategias de solución a los mismos, de manera que las dificultades presentadas sean subsanadas y no se arrastren a cursos de corte superior.

Con los resultados obtenidos en el presente estudio se busca mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y mejorar su rendimiento académico.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo Veintiuno.

Batanero, C., Godino, J., Green, R., Holmes, P., Vallecillos, A. (sf). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*.
Recuperado de www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/erroresestadis.doc

Claros, F. (2010). *Límite Finito de una Sucesión: Fenómeno que organiza*. Tesis Doctoral. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/5663/18909772.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Del Puerto, S, Minnaard, C y Seminara, S. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas*. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1704266

García, J. (2013*). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002

Neira, G. (2013). *Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación Matemática*. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817228

Saucedo, G. (2007). *Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. Itinerarios educativos 2*. Recuperado de http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Itinerarios/article/view/3898/5909

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D y Hecklein, M. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf