

ESTUDIO SOBRE EL PAPEL DE LA CONFRONTACIÓN EN EL TRATAMIENTO DE LA FÍSICA CLÁSICA DE NEWTON AL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

STUDY ON THE ROLE OF COMPARISON IN THE APPROACH OF NEWTON'S CLASSICAL PHYSICS TO SCHOOL MATHEMATICAL DISCOURSE

Roger Pérez García, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
roger.perez@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

El propósito de nuestra investigación es vislumbrar el papel prioritario que desempeñan los libros de textos y así destacar la presencia de ideas variacionales en libros de naturaleza distinta. Para ello, con base en la caracterización de los elementos que conforman el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) realizamos un estudio de difusión institucional del conocimiento mediante la confrontación entre la obra original *Principia* (Newton, 1726) y el libro de texto *Cálculo Diferencial e Integral* (Granville, 1980). El estudio se enmarca en una fase *documental, estructural y confrontación* de situaciones variacionales homólogas en las obras que reportamos. Una vez, realizado este tipo de estudio da cuenta que los usos y significados que se dan en condiciones socioculturales configuran la construcción del conocimiento matemático y a su vez generan las explicaciones a los fenómenos a luz del PyLV.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, confrontación, ideas variacionales

Abstract

The purpose of our research is to glimpse the priority role played by textbooks and thus highlight the presence of variational ideas in books of a different nature. To do this, based on the characterization of the elements that make up the Thought and Variational Language (PyLV) we conducted a study of the institutional dissemination of knowledge through the comparison between the original work *Principia* (Newton, 1726) and the textbook *Differential Calculus and Integral* (Granville, 1980). The study is framed in a documentary, structural phase and is currently deepened in the confrontation of homologous variational situations in the works we report. Once, this type of study realized that the uses and meanings that are given in sociocultural conditions configure the construction of mathematical knowledge and in turn generate explanations to the phenomena in light of the PyLV.

Key words: variational thinking and language, comparison, variational ideas

■ Introducción

Muchos han sido los colegas que han forjado los andamios de una línea de investigación, que hoy brinda sentido a diversas actividades y acciones en nuestro quehacer cotidiano: Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). Dada la intencionalidad de significar a los objetos matemáticos a partir de las prácticas propias de la cuantificación de un fenómeno, esta línea promueve un carácter transversal.

Sería muy notorio establecer vínculo entre temas puramente físicos con teoremas o algoritmos matemáticos, sin embargo, hablar de variación y cambio en esta dupla, podría fomentar una concepción mucho más rica en significados dentro del actual discurso Matemático Escolar (dME). En nuestro caso, centraremos la atención en el análisis del dME desde el libro mismo. Y es que, como principal herramienta didáctica empleada por los docentes, constituye uno de los recursos primordiales en la actividad educativa y a su vez en ellos se materializa la visión que fundamenta a la Matemática Escolar.

A lo largo de nuestra investigación se utilizará indistintamente los términos de textos, libros escolares y manuales referido a aquellos libros utilizados por estudiantes y profesores a lo largo del proceso de aprendizaje y diferenciando a su vez a la obra histórica dada su intencionalidad.

Según nos reporta Cantoral (2013), el Cálculo es un producto cultural y no sólo una colección de teoremas y algoritmo. Es fruto de la actividad humana. En este sentido ubicaremos a la figura del texto de Cálculo en el proceso de aprendizaje.

Trataremos la construcción social del conocimiento matemático, en el sentido que éste se produce a través de las prácticas, es decir no es preexistente a la experiencia. Además de su difusión institucional a la vez que se pretende democratizar el aprendizaje de la matemática, señalando de esta forma el objeto de estudio que persigue esta teoría.

Es decir, modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso atendiendo al aporte fundamental que nos brinda con la transición de un conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso (Cantoral, 2016).

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, ha sido la fuente de inspiración del programa socioepistemológico, la cual subyace a nuestro interés para el tratamiento del cambio y la variación en libros de diferentes contextos.

Si bien es cierto que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar ideas y conceptos del Cálculo (Caballero, 2012), las investigaciones en Matemática Educativa han documentado que el actual dME no propicia estas ideas variacionales. A partir de entonces sirve como motivación para los autores de la investigación preguntarse: ¿cómo *viven* las ideas variacionales en libros de naturaleza distinta? Para evidenciarlo elegimos la obra *Principia* (Newton, 1687) y el libro de texto *Cálculo Diferencial e Integral* (Granville, 1980).

Nuestra hipótesis de investigación sostiene que el Pensamiento y Lenguaje Variacional se encuentra en diversos escenarios de la vida diaria, y aun así en libros de naturaleza distinta. Empero, la posibilidad de que se manifieste implícitamente; el tratamiento centrado en las prácticas alrededor del objeto permitirá entender qué cambia, cómo cambia y cuanto cambia eso que está cambiando.

Por ello, en este trabajo nos propusimos como objetivo realizar un estudio de difusión institucional del conocimiento mediante la confrontación entre la obra original y el libro de texto, relativo a las nociones del Cálculo.

■ Marco teórico

Cadavid (2015) señala que “desde la Grecia antigua, la inquietud del ser humano por encontrar métodos para *identificar* y *cuantificar* los fenómenos de la naturaleza (óptica, mecánica, astronomía, economía, ingeniería, etc.), lo han motivado a realizar esfuerzos, que le permitiesen cuantificar dichos cambios” (p. 1). Como resultado de lo anterior, para estudiar y resolver los problemas de la variación se crearon los conceptos de variable y función. Así, mientras las variables y las funciones dan cuenta de la variación concreta y de las relaciones que se dan entre ellas, y la razón promedio de cambio da una aproximación sobre la rapidez de la variación; la derivada proporciona la cuantificación exacta de la rapidez con que cambia una variable respecto de otra en cualquier instante.

Partiremos por asumir una postura convencional acerca de la variación en nuestra investigación soslayando interpretaciones desde otras visiones. Es entonces, que entenderemos la variación como una cuantificación del cambio. La caracterizamos como una inferencia de estados, a partir de acciones que nos permiten identificarlos, predecirlos, medirlos, estudiarlos y compararlos (Sánchez y Molina, 2006); y a su vez describe las cualidades del cambio proporcionando elementos para saber cómo cambia eso que cambia (Cabrera, 2009).

Por otra parte, en Caballero (2016) se relacionan los órdenes de variación dada su naturaleza dependiendo qué cambio se cuantifica; viéndose así en las magnitudes de velocidad y aceleración en el estudio del movimiento en Física.

Y es que es cierto, que existe una estrecha relación entre la variación y el cambio. La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación requerirá ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema dado.

Por otra parte, dentro de la estructura curricular de la matemática, que ofrecen Tall (1991) y Cantoral (2004) se hace alusión directa al Pensamiento y Lenguaje Variacional y se propone como uno de los logros para alcanzar en la educación universitaria. Su estudio se inicia en el intento de cuantificarla por medio de las cantidades y las magnitudes y se reconoce la necesidad de estudiar con detalle los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos.

Se sitúa en Caballero (2012), al Pensamiento y Lenguaje Variacional como una línea de investigación dentro del enfoque socioepistemológico y forma de pensamiento que se caracteriza en proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio. Se caracterizan elementos que conforman este estudio tales como: estrategias variacionales (EV), estructuras variacionales (EstV), argumentos variacionales (AV), códigos variacionales (CV), situación variacional (SV) y tarea variacional (TV). Nosotros centramos la atención en las estrategias variacionales que definen hasta la fecha (González, 1999; Salinas, 2003; Caballero, 2012), lo cual no exime para nuestro estudio la posibilidad que resulte interesante y valioso la presencia de algunos de los otros elementos, para la cual llamamos en su conjunto más amplio *ideas variacionales*.

Actualmente existen diferentes teorías, enfoques, perspectivas o paradigmas en Matemática Educativa (Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas) definidos con base en cómo conciben los procesos de aprendizaje. En algunas de estas se habla desde una perspectiva platónica, centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, en donde la relación con el conocimiento matemático estaba sustentada en la matemática escolar, con su carácter lógico y estructural.

El enfoque socioepistemológico nace a fines de los años 80 (Cantoral, 2011) y estudia la naturaleza conceptual de los objetos matemáticos, entendiendo a éste desde el posicionamiento del ser humano como actor de la construcción de sus sistemas conceptuales. Este enfoque descentraliza al objeto matemático y su epistemología como prerrequisitos para la acción didáctica y pone en su lugar a las prácticas sociales asociadas a su construcción, para

entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional (Montiel y Buendía, 2012). En este sentido, procura entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción (en nuestro caso evidenciado con la obra de Newton) y la transmisión de conocimiento matemático (visto en el texto escolar).

En Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) se señaló que los libros de textos son portadores de discurso Matemático Escolar, además de una forma particular de validez epistemológica que induce al docente a reproducir en el aula lo que debe y evitar lo que no debe ser comunicado. Por ende, estos discursos validan la introducción del saber matemático en el sistema educativo y legitiman un nuevo sistema de razonamiento (Cantoral, Moreno-Durazno & Caballero-Pérez, 2018).

Asimismo, Soto (2010) afirma que aquel discurso que considera a la Matemática como preexistente a la actividad humana, se convierte a su vez en un sistema de razón que excluye. Dentro de esto están los contenidos sociales y culturales de los cuales emergen los conceptos matemáticos, así como las argumentaciones posibles al considerar su carácter hegemónico (puesto de manifiesto, por ejemplo, en los libros de texto utilizados).

La Matemática Educativa se define, como una disciplina del conocimiento que se ocupa de estudiar los fenómenos que ocurren cuando los saberes matemáticos se introducen al sistema de enseñanza (Salinas y Alanís, 2009), y dentro de ella la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional permite desarrollar su problemática en cuatro momentos que definen Cantoral y Farfán (2003): didáctica sin estudiantes, didáctica sin escuela, didáctica sin escenarios, y didáctica sin escenarios socioculturales. Es en esta última etapa, donde se introduce la componente social: vertebrando la construcción social del conocimiento matemático. En este sentido, nos centraremos en el papel de las prácticas que reportan las investigaciones de corte socioepistemológico en dos escenarios diferentes, el histórico y el institucional.

■ Metodología

Siguiendo la postura de Schubring (citado en Rodríguez, 2010), el hecho de que la práctica de la enseñanza no está regida por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de textos para enseñar, es que se hace necesario el análisis de estos.

Para organizar el trabajo, con base en el método documental sugerido en Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini (2015), se consideraron las dos fases en que desarrollan su metodología, además se requiere incorporar una tercera fase como vértebra en nuestro análisis documental: *conceptual*, *estructural* y *confrontación*. A continuación, realizaremos una breve descripción de la intencionalidad que se procura en cada una de estas fases.

Fase conceptual

En esta fase, se describen las obras en función de contextualizar y situar los temas específicos que se abordan en los ejemplos analizados. Es importante tener en consideración las circunstancias socioculturales que rodean la construcción del conocimiento, dado que condicionan el uso y significado que las personas dan al saber (Montiel y Buendía, 2012). Además, se realiza un tratamiento lingüístico a partir de identificar categorías en aquellas ideas que aluden a la variación en ambas obras, apoyadas en las estrategias variacionales definidas por Caballero & Cantoral (2013). Para el análisis conceptual también se tomaron en cuenta dos de las categorías propuestas por Rodríguez (2010) para el análisis de textos históricos y contemporáneos: ficha de referencia de la obra y contextos, y propósitos de la obra y del autor.

Fase estructural

En esta fase, se hace uso del modelo de anidación de prácticas que define Cantoral (2013) en la TSME, a partir del cual se identificaron las acciones y actividades que podrían generarse en el análisis desarrollado. Dado el tipo de investigación, comenzamos a identificar las conductas en un primer nivel de acción y a partir de allí, deducir las posibles actividades en el caso de llevarse a cabo éstas en una situación escolar. Siguiendo la propuesta desarrollada en un estudio similar por Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini (2015), nos planteamos en cada problema o ejemplo, las preguntas *¿qué debe hacer?*, *¿cómo lo debe hacer?* y *¿para qué lo hace?* con el propósito de entender las herramientas usadas por el sujeto, la intencionalidad y fines didácticos. Además de formular una explicación acerca de nuestra problemática educativa en cuestión.

Fase de confrontación

En esta fase, se contrastan las obras, mostrando la presencia de ideas variacionales independientemente del tipo de obra en cuestión. En este caso se considerarán aquellas condiciones transversales en las obras relativas a la variación y el cambio, evidenciando así la presencia de éstas, sin hacer distinción de su naturaleza.

■ Análisis de resultados

Hemos seleccionado seis ejemplos para el análisis, de *Principia* fueron fuerza centrípeta, razones de cantidades y, razones de arcos cuerda y tangente; de Granville fueron longitud de una curva, optimización y demostración del límite fundamental trigonométrico. La selección de estos ejemplos se debe a que están estrechamente relacionados independientemente de las obras, es decir, su trasfondo requiere de un análisis muy parecido, aunque se trata de diferentes contextos.

Resulta interesante para desarrollar esta fase, comprender primero un poco la metodología de trabajo que consideraron los autores de las obras en sus épocas.

Dado que por parte de Newton trabajaremos con ejemplos seleccionados de su Libro I, podemos constatar que las proposiciones que emplea como argumentos para sus posteriores demostraciones en los libros que prosiguen, muestra el carácter matemático su estudio sobre la naturaleza. Sus proposiciones matemáticas fundamentan el proceso de matematización de la naturaleza en el modelo argumentativo al que se refiere al emplear frases como: “si-entonces”. Es decir, obtener características matemáticas del fenómeno a partir de condiciones establecidas.

Otro aspecto interesante que encontramos es que la separación entre Matemáticas y filosofía natural (como se le conocía a la Física en aquel entonces) permite a Newton explorar las consecuencias matemáticas relativas a posibles condiciones físicas sin tener obligación de entrar en análisis de la realidad física de los supuestos, lo cual le permite evadir las posibles críticas a sus conclusiones. Este tipo de metodología lo podemos resumir en el esquema que se muestra en la Figura 1:



Figura 1. Metodología de trabajo de Isaac Newton. Adaptado de (Marquina, 2003)

Por su parte, Granville, ha intentado escribir un libro de texto que es moderno y enseñable; y las capacidades y necesidades que persiguen los estudiantes en el primer curso de Cálculo, tal y como refiere en el prefacio de su libro. En este sentido, contiene problemas prácticos sencillos que ilustran la teoría y al mismo tiempo son de interés para el estudiante. Sus problemas no presuponen un conocimiento extendido en una rama particular de la ciencia, sino se basa en el conocimiento que todos los estudiantes de Cálculo suponen en común. Relacionado con esto, su variedad en temas permite su empleo ya sea para el trabajo elemental en ciencias aplicadas o para trabajos más avanzados en matemática pura.

Muestra en sus ejemplos resueltos una forma peculiar de trabajo, donde refiere tres momentos identificados en nuestro análisis. Estos son *teorización*, *tránsito* y *explicitación*; los cuales abordaremos en los resultados finales de nuestra investigación.

Para llevar a cabo esta fase, haremos uso del modelo de anidación de prácticas, el cual mencionamos en la fase estructural de la metodología.

La siguiente tabla muestra uno de los análisis realizados con uno de los ejemplos seleccionados en la obra de Newton: Fuerza centrípeta.

Tabla 1. Análisis del ejemplo ENI

<i>Momento</i>	<i>Intencionalidad</i>	<i>Acción</i>	<i>Actividad</i>
<i>Planteamiento de la situación de un fenómeno real.</i>	Describir momento inicial para que posteriormente sirva como referente a otros momentos.	Supone el tiempo partido en partes iguales. Compara el área de triángulos, para llegar a una razón de igualdad.	Establece una relación proporcional entre las áreas descritas y los tiempos en que se describen. Establece que el área barrida por el segmento que une un planeta al sol es directamente proporcional al tiempo invertido en el recorrido.
<i>Alternativa a la situación en condiciones específicas.</i>	Generar una nueva situación bajo el supuesto de la acción de una fuerza externa.	Modifica la trayectoria y traza nuevas rectas generando un segundo momento (hace uso de la 1ra y 2da Ley del Movimiento).	
<i>Generalización e interpretación de los resultados.</i>	Buscar nuevos resultados que permitan una comparación entre momentos.	Compara área entre triángulo buscando relaciones entre los momentos anteriores (hace uso del Corolario I).	
	Introducir nuevo objeto matemático (infinito).	Suponer momentos infinitos donde ocurran situaciones similares para llegar a su demostración.	

Fuente: elaboración propia (2018).

Tomando ya los resultados de las dos fases anteriores, se contrastan en un estudio transversal de elementos comunes y relevantes para promover el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Podemos constatar desde la descripción que se obtuvo en los análisis de las tablas mostradas en el epígrafe anterior, una forma muy distinta en la que se dan los desarrollos de los ejemplos. Por parte de Newton los momentos descritos visualizan una organización de ideas primarias que en el transcurso se formula en una hipótesis a demostrar, para lo cual emplea la geometría. Acuña la idea de momento para utilizarlo en el análisis de la predicción de los fenómenos de cambio, tal como señala Cantoral (2016); como ejemplo de esto observamos en el análisis infinitesimal de curvas. Para Newton su método de análisis y síntesis, le permite descubrir el concepto de la fuerza en la naturaleza y una vez descubierta, se considera para explicar el movimiento de los cuerpos. A partir de este momento su demostración permite eliminar todo el proceso analítico, heurístico y complejo.

Aunado muestra conductas o ideas donde inferimos la presencia del estudio de la variación en niveles muy distintos, dígase: dividir, comparar, “moviéndose hasta encontrarse”, disminuir distancias, entre otras. Cada una de ellas, desde su contexto funcional con base en constructos idealizados, de tal forma que eventualmente puedan ser trasladadas al mundo de los fenómenos.

Por otra parte, y un tanto no tan distinto; los ejemplos que se estudiaron de Granville, formalizan un modelo matemático que bajo los principios newtonianos presenta lo variacional en tres momentos: *Teorización*, *Tránsito* y *Explicitación*. Cada uno con formas y herramientas diferentes, en la *Teorización* a través de leyes y propiedades, en el *Tránsito* a través de desarrollos analíticos, y en la *Explicitación* en forma de gráficas o tablas de valores. Resulta esto indispensable para Granville en el sentido, que requiere la forma precisa para explicitar sus contenidos a un público principiante en el estudio del Cálculo. Y es aquí en donde juega su rol el texto como instrumento de poder, sin perder de vista las raíces socioculturales que dieron su origen en la obra del *Principia*.

Como práctica social que norman y regulan al conjunto de prácticas identificadas en los ejemplos que se seleccionaron de las obras estudiadas, pudimos inferir que permea el Praedicciere como práctica social (Figura 2), y dando surgimiento así a objetos matemáticos a partir del estudio del cambio y el movimiento en fenómenos ya bien sean físicos u otros contextos escolares. En este proceso se distingue el análisis y búsqueda avanzada de influencias socioculturales y orientan el pensamiento en cada una de las épocas estudiadas; lo cual estructura al Praedicciere como práctica social (Cantoral, 2016).



Figura 2. Esquema de articulación de prácticas en la confrontación de las obras

Los pares de ejemplos que seleccionamos para desarrollar nuestro estudio, permite encontrar como elemento diferente, la interacción del objeto en su entorno social, es decir sus prácticas socialmente compartida. Newton por su parte, manifiesta la *Predicción* a luz de su estudio de los fenómenos naturales, mientras que Granville centrado

más en el análisis de tablas, gráficas y así construir modelos analíticos con el propósito de emplear en diversas esferas.

Esto se puede argumentar retomando la dupla de problemas estudiados: Fuerza centrípeta y Longitud de un arco de curva. La interpretación que realiza Newton a cada segmento de recta en su modelo geométrico lo infiere como movimiento, mientras que Granville en su modelo los observa como segmentos de curva. Es decir, cada una de estas ideas, así como el resto de las conductas que se tipificaron, desde su contexto funcionan con base en constructos idealizados. Empero, sus estudios convergen en una linealización local, donde cada uno en su contexto, observa la curva como una recta a partir del estudio de las pequeñas variaciones. En el primer contexto la mirada del *tiempo* como infinitesimal, mientras que en el segundo la *longitud* infinitesimal.

A la luz nuestro estudio postulamos que, el papel desempeñado por los libros en su contexto social, histórico y cultural; guía el proceso de formación y desarrollo de las ideas variaciones que se constatan en los objetos matemáticos. Los *Principia*, como objeto cultural promueve la *Predicción* en tanto la necesidad de estudiar los fenómenos naturales, mientras que la obra de Granville, institucionaliza estos saberes. De allí lo valioso de realizar investigaciones documentales tomando como referente los lentes del autor en su tiempo.

■ Conclusiones

El análisis de las fuentes primarias y de los textos históricos nos sumergen en el mundo del matemático que vivió en una determinada época, nos da cuenta de las concepciones y la forma de pensamiento imperante en el momento, nos indica el tipo de problemas y las formas de solución que se gestaron según los instrumentos de los que se disponía, lo cual puede proporcionar una formación matemática más global y comprensiva que la que se ha practicado en los últimos años.

A su vez, las circunstancias socioculturales que rodean la construcción del conocimiento condicionan el uso y significado que las personas dan al saber. Esto favoreció el generar explicaciones a los fenómenos: los cuales no contradicen; sino que complementan los resultados de investigaciones previas.

De las consideraciones anteriores también podemos concluir que el tipo de orientación de los libros no depende de planes de estudios que los encuadre, sino que son ellos mismos quienes establecen el tipo de tarea que se debe ejercer en el proceso de formación de los estudiantes, esto a partir de la forma en que estructuran los conceptos matemáticos.

En términos generales la investigación nos brinda los referentes para comprender que el uso y significado de las ideas variacionales que permean en libros de naturaleza distintas, apreciados en la obra de Newton y Granville, exige reflexionar sobre epistemologías que hasta ahora se han trabajado en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, y a su vez es un indicativo para robustecer metodológicamente investigaciones de corte documental.

■ Referencias bibliográficas

- Caballero, M. (2012). *Uso de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.
- Caballero, M. & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción*. Memoria predoctoral no publicada. México: Cinvestav.
- Cabrera, L. (2009). El pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 121-156). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA Investigación e innovación en Educación Matemática. Colombia: Universidad de los Andes, 2(2)*, 115-131.
- Cantoral, R. (2011). Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. Simposio en Matemática Educativa, 22 – 26 agosto 2011. D. F., México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: Cantoral, R. (ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, Sevilla.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53(3)*, 255 – 270.
- Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socioepistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 50(1-2)*, 77-89. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8>
- Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28.
- Chopin, A. (2001). Pasado y presente de los manuales escolares. *Revista Educación y Pedagogía, 13 (29-30)*, 209-229.
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and direction. *ZDM, 45(5)*, 663-646.
- González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN, México.
- González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 21*, 177-198.
- Granville, W. A. (1980). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.
- López-Acosta. (2016). Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.
- Lowe, E. y Pimm, D. (1996). “This is so”: A text on texts. En: A. Boshop, K. Clments, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Marquina, J. (2003). La metodología de Newton. *Ciencias 70*, abril-junio, 4-15. [En línea]
- Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 55-82), México: Lectorum.
- Negrin, M. (2009) “Los manuales escolares como objeto de investigación”. *Educación, Lenguaje y Sociedad, 6(16)*, 187- 208.

- Newton, I. (1987). Principios matemáticos de la filosofía natural (E. Rada, Trad.). Madrid, España: Alianza. (Trabajo original publicado en 1687 bajo el título *Philosophiæ naturalis principia mathematica*).
- Reséndiz, E. (2004). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.
- Reyes-Gasperini, D. (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.
- Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, un enfoque didáctico*. Tesis de doctorado no publicada, Salamanca, España.
- Romero, F. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.
- Salinas, P. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.
- Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.
- Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 19, pp. 739–744). México: Clame.
- Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1525-1544.
- Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher.