

Posibles relaciones entre el razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función

Yenny Rocio Gaviria Fuentes

IED Técnico Comercial Mariano Ospina Rodríguez

Foro EMAD 2019
Investigación e innovación en Educación Matemática
4 de octubre de 2019

Contenido

- Introducción
- Marco referencial.
- Diseño metodológico
- Resultados
- Conclusiones

Universidad de los Andes
Colombia

Facultad de Educación

Introducción

Problema de investigación

En el componente variacional uno de los conceptos asociados es la función (MEN, 2006)

Desarrollo de competencias asociadas al ser matemáticamente competente; formular, resolver y modelar información (MEN, 2006)

Desarticulación entre lo enseñado en la escuela y los referentes legales sobre el concepto de función

Bajos resultados en pruebas ICFES para este componente (ICFES, 2017)

Énfasis en el desarrollo de algoritmos, sin establecer conexiones con otras áreas del conocimiento. (Villa, 2012)

4

Pregunta de Investigación

¿Qué relaciones hay entre el razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función cuando estudiantes de grado once desarrollan situaciones de tipo variacional?

5

Objetivos

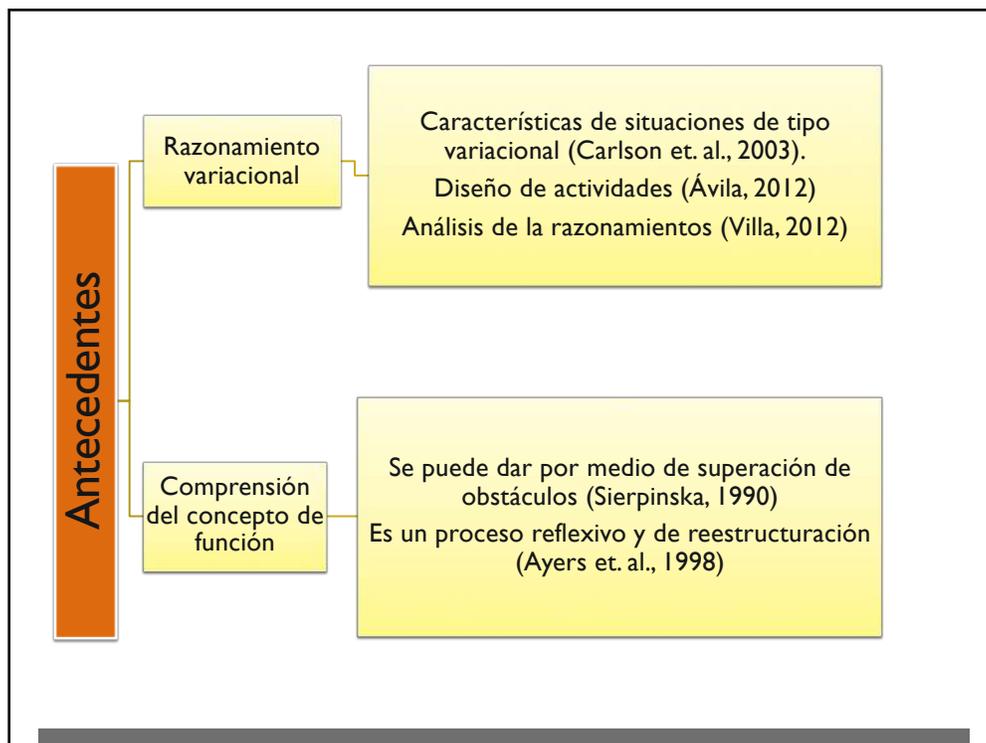
General

Identificar las relaciones que pueden surgir entre el razonamiento covariacional y la comprensión del concepto de función en estudiantes de grado once, al desarrollar situaciones de tipo variacional

Objetivos

Específicos

- Diagnosticar el nivel de razonamiento covariacional y comprensión del concepto de función de los estudiantes de grado once.
- Diseñar y aplicar una secuencia que medida por los niveles de razonamiento, permita observar la comprensión del concepto de función (lineal y cuadrática) y los niveles de razonamiento covariacionales de los estudiantes.
- Tipificar los razonamientos covariacionales y de comprensión del concepto de función de los estudiantes en la solución de una situación de variacional.
- Examinar relaciones entre los niveles de razonamientos de los estudiantes y el nivel de comprensión del concepto de función.



Universidad de los Andes
Colombia Facultad de Educación

Marco referencial



Universidad de los Andes
Colombia Facultad de Educación

Diseño metodológico



Categorías de análisis y matriz categorial

PREGUNTA PROBLEMA	OBJETIVO GENERAL	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	UNIDAD DE ANALISIS	CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS	INDICADORES
¿Cómo los procesos de razonamiento variacional de los estudiantes de grado once de la I.E. Ciudadela Sucre incide en la comprensión del concepto de función (afín y cuadrática)?	Caracterizar los procesos de razonamiento variacional con estudiantes de grado once y su incidencia en la comprensión del concepto de función (afín y cuadrática)	► Diagnosticar al nivel de comprensión del concepto de función de los estudiantes de grado once.	Pensamiento Variacional	Comprensión en Matemáticas	Actos de comprensión de la función	Para el análisis de las actividades de la propuesta de investigación se tomará los actos de comprensión C(1) hasta el C(12) propuestos por Sierpinski (1992)
		► Diseñar y aplicar una estrategia que medida por los niveles de razonamiento, mejore la comprensión de del concepto de función (afín y cuadrática)		Razonamiento covariacional.	Niveles de razonamiento covariacional	Nivel 1 (N1). Coordinación Nivel 2 (N2). Dirección Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa. Nivel 4 (N4). Razón promedio. Nivel 5 (N5). Razón instantánea.
		► Tipificar los razonamientos de los estudiantes en la solución de una situación de movimiento, a partir de la propuesta de Carlson (2003)				
		► Comparar los niveles de razonamientos de los estudiantes y el nivel de comprensión del concepto de función.				

Diagnóstico

DISEÑO DE EVALUACIÓN

Fernita vive en Guaya, es empleada del comercio en la zona 2, al norte de la ciudad de Bogotá. Para ir de su casa al trabajo y viceversa debe tomar una foto tipo como es de \$5000 por cada trayecto. Simplemente tiene derecho a un descuento, la empresa hace el pago mensualmente cada treinta días.

Responda las preguntas de acuerdo con la información anterior:

- Para realizar un presupuesto del costo del transporte al mes, ¿Qué valores del enunciado se deben tener en cuenta? Justifique su respuesta.

- Fernita quiere hacer un presupuesto que le ayude a determinar el dinero que debe guardar para sus gastos de transporte durante el mes. Tenga en cuenta que Fernita descuenta un día a la semana, para completar la información solicitada en la siguiente tabla:

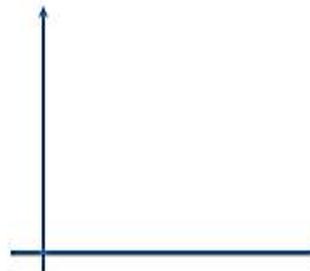
Puntos de referencia	¿Cuál operación se debe realizar? ¿Por qué?	Proceso de cálculo del costo de transporte.
Día		
Semana		
Mes		

- Según las operaciones realizadas para el presupuesto responda las siguientes preguntas:
 - ¿Algun valor se mantiene constante al calcular el costo de transporte? Explique de qué manera puede encontrar ese valor.
 - ¿Qué valor(es) variable(s) al momento de hallar el costo del transporte de cada punto de referencia? Aparte de un ejemplo explique su respuesta.
 - ¿Cómo cambian los valores al comparar dos puntos de referencia diferentes?

- En la siguiente tabla se registran los minutos que los trabajadores, tenga como referencia los procesos realizados en el numeral dos:

Días	1	6	12	20	28	32
Costo						

- Represente gráficamente el costo de transporte en los siguientes momentos: Claro, amara, al mes, mes y medio, a los dos meses. Indique las variables asociadas a cada uno de los ejes.

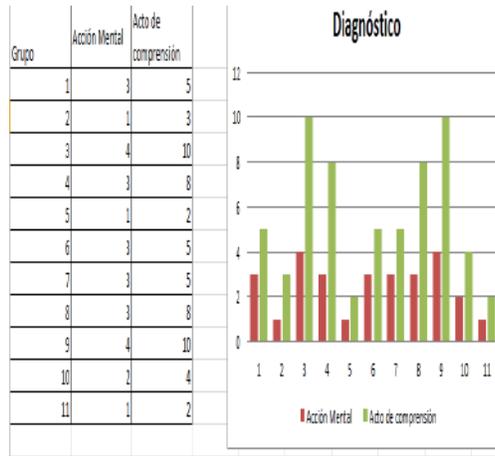


- Realice un registro gráfico a Fernita donde le muestre cómo determinar el presupuesto durante el mes y cómo debe guardar en los puntos de referencia tomados en el numeral cinco.

Resultados - Diagnóstico

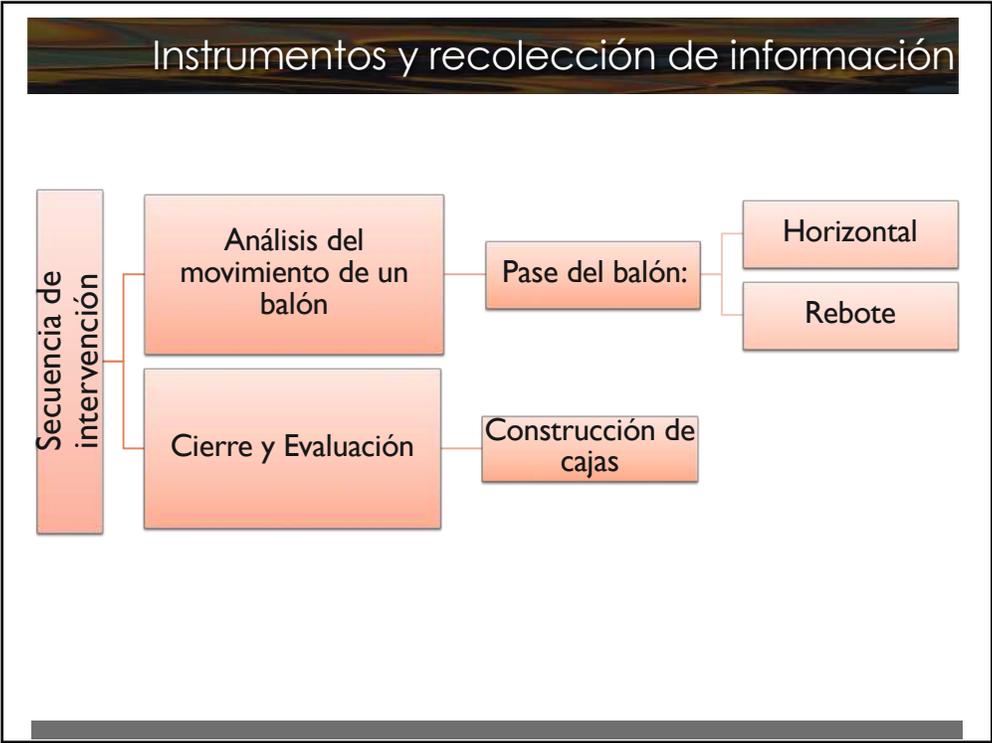
PRODUCTO															
1	Para realizar un presupuesto del costo del transporte al mes, ¿qué valores del enunciado se deben tener en cuenta? Justifique su respuesta.														
2	Patricia quiere hacer un presupuesto que le ayude a determinar el dinero que debe guardar por sus gastos de transporte durante el mes. Tiene en cuenta que Patricia descansa un día a la semana, para completar la información solicitada en la siguiente tabla.														
3	Según las operaciones realizadas para el presupuesto, responda las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> • ¿Algun valor se mantiene constante al calcular el costo de transporte? Explique de qué manera puede mantenerse ese valor. • ¿Qué valor(es) varía(n) al momento de hallar el costo del transporte en cada punto de referencia? A partir de un ejemplo explique su respuesta. • ¿Cómo cambian los valores al comparar dos puntos de referencia diferentes? 														
4	En la siguiente tabla se registran exactamente los días trabajados, tenga como referencia los procesos realizados en el numeral 3o.														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Día</th> <th>1</th> <th>6</th> <th>12</th> <th>24</th> <th>36</th> <th>52</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Costo</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Día	1	6	12	24	36	52	Costo						
Día	1	6	12	24	36	52									
Costo															
5	Argumente gráficamente el costo de transporte en los siguientes momentos: Domingo, semana, día mes y medio, a los dos meses, indique las variables asignadas a cada uno de los días.														
6	Realice un reporte dirigido a Patricia donde le manifeste como disminuir el presupuesto durante el mes y cuánto dinero debe guardar en los puntos de referencia tomados en el numeral cinco.														

Grupo	1	2	3	4	5	6
Grupo 1	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM2 C (6)
Grupo 2	AM1 C (1)	AM1 C (1)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)
Grupo 3	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM4 C (10)
Grupo 4	AM1 C (1)	AM1 C (1)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM2 C (6)
Grupo 5	AM1 C (1)	AM1 C (1)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)
Grupo 6	AM1 C (1)	AM1 C (1)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM2 C (6)
Grupo 7	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM2 C (6)
Grupo 8	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM2 C (6)
Grupo 9	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM2 C (4)	AM2 C (6)	AM2 C (6)	AM4 C (10)
Grupo 10	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM2 C (4)
Grupo 11	AM1 C (3)	AM1 C (3)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)	AM1 C (2)



Hipótesis de intervención

Las actividades de intervención permitirán tipificar los niveles de razonamiento y actos de comprensión ejecutados por los estudiantes al enfrentarse a situaciones problema, de manera que se lleguen a establecer posibles relaciones entre ellos.



Desplazamiento del balón

t	x	y
0	0	0
0.0001	0.0001	0.0001
0.0002	0.0002	0.0002
0.0003	0.0003	0.0003
0.0004	0.0004	0.0004
0.0005	0.0005	0.0005
0.0006	0.0006	0.0006
0.0007	0.0007	0.0007
0.0008	0.0008	0.0008
0.0009	0.0009	0.0009
0.001	0.001	0.001

t	x	y
0	0	0
0.0001	0.0001	0.0001
0.0002	0.0002	0.0002
0.0003	0.0003	0.0003
0.0004	0.0004	0.0004
0.0005	0.0005	0.0005
0.0006	0.0006	0.0006
0.0007	0.0007	0.0007
0.0008	0.0008	0.0008
0.0009	0.0009	0.0009
0.001	0.001	0.001

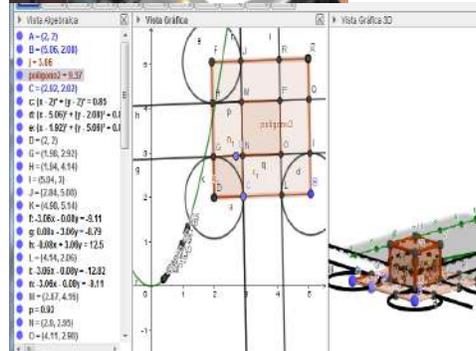
←

Construcción de cajas



Protocolo de construcción:

1. Insertar polígono regular.
2. Trazar circunferencia en uno de los vértices.
3. Con la herramienta compas, trasladar el radio de la circunferencia a cada vértice.
4. Con la opción puntos de intersección encontrar las intersecciones entre circunferencia y cada lado del cuadrado.
5. Trazar perpendicular.
6. Seleccionar el vértice la primera circunferencia y trazar el cuadrilátero formado por perpendiculares.
7. Ir a vista, hoja de cálculo.
8. Seleccionar uno de los lados del cuadrilátero en la vista algebraica, clic derecho y dar opción registró hoja de cálculo.
9. Seleccionar en la vista algebraica el cuadrilátero y registrar en la hoja de cálculo.
10. En la Hoja de Cálculo, en la columna C en la fila 2, ingresar: =(A2,B2)
11. Arrastrar para copiar.
12. Seleccionar coordenadas y luego, Clic derecho-crear, listo.
13. En entrada: Ajustepolinómico(1,2)



Análisis de la intervención

Resultados - guía uno

• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?

El balón se desplaza 750 cm en cada uno de los intervalos de tiempo.

• Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativa?

Cuantitativa: El balón se desplaza en total 25 pies (cm=650)

Cualitativa: La velocidad con la que se desplaza el balón depende de la fuerza con la que se impulsa.

• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?

Se desplaza cada 0.5 segundos a una distancia de 0.5 segundos aproximadamente.

• Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativa?

Que el movimiento del balón es constante hasta a los minutos 1 hora los como $-40.4 - 10.15$

• ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?

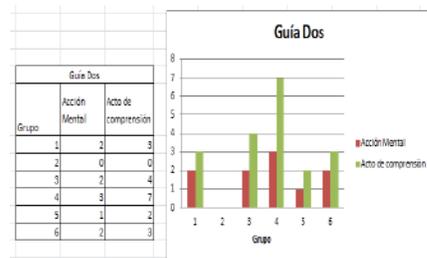
t	x	$\Delta x = (x_2 - x_1)$	$\Delta t = (t_2 - t_1)$	$v = \Delta x / \Delta t$
0h	0.4h			
0.5h	0.6h			
1.0h	1.2h			
1.5h	1.8h			

Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento de manera cualitativa y cuantitativa?	AMB-C(3)	AM1-C(1)	AM2-C(3)	AM2-C(3)	AM1-C(1)	AM2-C(3)
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------



Resultados - guía dos

Pregunta	Grupo	1	2	3	4	5	6
¿Cuál es la diferencia en los desplazamientos del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?. completar tabla	AM1-C(1)						
¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?	AM1-C(1)						
Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativa?	AM2-C(3)						
¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?. completar tabla	AM2-C(3)						
¿Qué tanto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?	AM2-C(3)						
Al avanzar el tiempo, ¿Qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativa?	AM2-C(3)						



63

t	v	$\Delta v = v_i - v_{i-1}$	x	$\Delta x = x_i - x_{i-1}$	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
0	0.5		0		
1	1	0.5	2.0	2.0	4.0
2	1.5	0.5	4.0	2.0	4.0
3	2	0.5	6.0	2.0	4.0
4	2.5	0.5	8.0	2.0	4.0
5	3	0.5	10.0	2.0	4.0
6	3.5	0.5	12.0	2.0	4.0
7	4	0.5	14.0	2.0	4.0
8	4.5	0.5	16.0	2.0	4.0
9	5	0.5	18.0	2.0	4.0
10	5.5	0.5	20.0	2.0	4.0

• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?
el balón se desplaza en cada intervalo de tiempo de una forma rectilínea con una velocidad constante y en cada punto varía el tiempo y distancia que recorre.

• Al avanzar el tiempo, ¿qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?
Al avanzar el tiempo, el desplazamiento va aumentando de forma constante.

• ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?
La diferencia en el desplazamiento del balón en cada uno de los intervalos de tiempo es de 2.0 metros.

• ¿Cuánto se desplaza el balón en cada uno de los intervalos de tiempo?
El balón se desplaza en cada intervalo de tiempo de una forma rectilínea con una velocidad constante y en cada punto varía el tiempo y distancia que recorre.

• Al avanzar el tiempo, ¿qué afirmación se puede hacer respecto al desplazamiento cualitativa y cuantitativamente?
Al avanzar el tiempo, el desplazamiento va aumentando de forma constante.

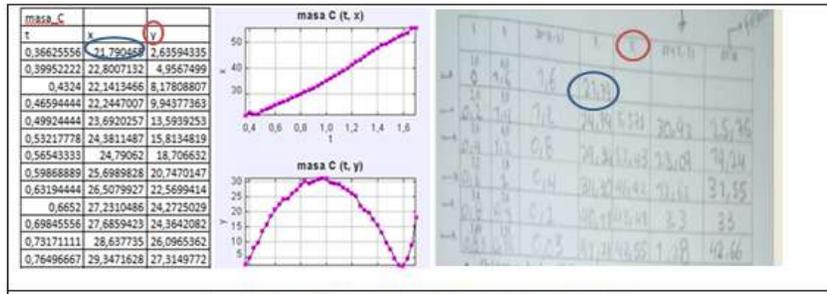
• ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón teniendo en cuenta los siguientes intervalos de tiempo?
La diferencia en el desplazamiento del balón en cada uno de los intervalos de tiempo es de 2.0 metros.

Resultados - guía tres

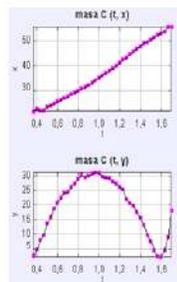
	Pregunta	Grupo					
		1	2	3	4	5	6
Sobre la experiencia:	1. ¿Cómo determinaron que el balón se movió?	Am1-C(1)	Am2-C(4)	Am1-C(2)	Am1-C(1)	Am2-C(3)	Am1-C(1)
	2. ¿Qué diferencias y similitudes encontraron al desarrollar cada una de las guías?	No trajeron las Guías	Am2-C(4)	Am2-C(3)	Am2-C(4)	Am2-C(4)	Am2-C(4)
	3. ¿hubo alguna pregunta emergente de la cual haya solicitado ayuda a la docente o aun tenga dudas?	Las preguntas estuvieron relacionadas con términos como: el significado de delta de t, cómo hacer una descripción cualitativa y cuantitativa, cómo hacer aproximaciones cuando hay varios decimales					
Sobre el desarrollo de los talleres.	1. ¿Cuáles son las variables inmersas en la situación?	Am1-C(3)	Am1-C(3)	Am2-C(4)	Am1-C(3)	Am2-C(4)	Am3-C(5)
	2. Describa el movimiento del balón a partir de la gráfica suministrada por el programa.	Am1-C(3)	Am1-C(3)	Am2-C(4)	Am1-C(3)	Am2-C(4)	Am3-C(5)
	3. ¿Cómo es el comportamiento de dichas variables?						
	4. ¿Cómo pueden interpretar el Delta para analizar cada una de las variables?	Debido a que esta fue una de las preguntas recurrentes en el desarrollo del primer taller, los estudiantes comentaron la respuesta de la docente relacionada con la resta entre los valores extremos de los intervalos indicados.					

Hallazgos

Una de las dificultades observadas respecto al software fue la discriminación de variables ya que en la guía cuatro se les proporcionó a los estudiantes información sobre tiempo (t), desplazamiento horizontal (x), altura (y) y gráficas. Sin embargo, los estudiantes no tomaron en cuenta lo solicitado en el enunciado respecto a alturas, sino tomaron valores o del desplazamiento horizontal o de manera arbitraria, el dato que tomaron con mayor presión fue el tiempo.



masa_C	x	y
0,36625556	21,790465	2,63594335
0,39952222	22,8007132	4,9567499
0,4324	22,1413466	8,17808807
0,46594444	22,2447007	9,94377363
0,49924444	23,6920257	13,5939253
0,53217778	24,5811487	15,8134819
0,56543333	24,79062	18,706632
0,59868889	25,6989828	20,7470147
0,63194444	26,5079927	22,5699414
0,6652	27,2310486	24,2725029
0,69845556	27,6859423	24,3642082
0,73171111	28,637735	26,0965362
0,76496667	29,3471628	27,3149772
0,79822222	30,0009415	28,7519342
0,83147778	30,929447	30,1697786
0,8651	31,5241705	32,4333608



2. ¿Cuál es la diferencia en el desplazamiento del balón en los siguientes intervalos de tiempo?

t	x	y	h(t, y)	g(t)
0,366	21,8	2,6	23,19	
0,399	22,8	5,0	20,92	2,5,76
0,432	22,1	8,2	24,34	3,3,09
0,466	22,2	10,0	23,63	3,1,55
0,499	23,7	13,6	21,18	12,66

• ¿Qué sucede con los desplazamientos en la altura de cada intervalo?

los desplazamientos van disminuyendo debido a la falta de fuerza inicial

• ¿cómo es el comportamiento de la pendiente en cada intervalo trabajado? señale en la gráfica los puntos indicados en el intervalo e indique la pendiente entre ellos

la pendiente varía y aumenta o disminuye dependiendo de la altura en la que está

3. De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Qué interpretación le puede dar a los resultados?

En cuanto al diseño de las actividades, los estudiantes lograron abordar con mayor facilidad aquellas que partían de elementos tangibles para luego ser representadas por software. Mientras que se les dificultó interpretar aquellas que solicitaban extraer información proporcionada por software.

Respecto a la estructura de las actividades, se usaron tres contextos diferentes con el fin de determinar que los estudiantes estuvieran en la capacidad de identificar los cambios en situaciones que no fueran ajenas a su entorno y de allí se posibilitara el análisis de la información. Sin embargo, uno de los ítem en el que tuvieron mayor dificultad fue en el de plantear expresiones algebraicas que representaran la información, ya que los grupos encontraban pares ordenados.

• ¿Qué relación encuentra entre la línea recta y la parábola?

que casi los resultados son
muy similares ya que en
momentos hay una constante en los dos
• ¿Qué interpretación le da a la diferencia de alturas?
llega un momento en el cual se
multiplica constante y otro en el que
todo disminuye

• Proponga una expresión algebraica que le permita representar la situación, describa cómo la puede encontrar y por qué guarda relación con la situación

• $S(x) = -2x^2 + 4x + 0$, con la construcción en el programa guarda una relación ya que representa el área de la caja.

• $t(x) = -2x + 4$, con la construcción en el programa guarda una relación ya que representa la altura-ancho de la caja.

Guía 4

Guía evaluación y cierre



Universidad de los Andes
Colombia

Facultad de Educación



Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Se logró realizar un diagnóstico para identificar los actos de comprensión y acciones mentales correspondientes a los razonamientos manifestados por los estudiantes

- se encontró que el máximo nivel de razonamiento alcanzado fue el cuatro y de comprensión el diez por dos grupos

Cinco de los grupos se ubicaron en un nivel de razonamiento tres

- sin embargo, los actos de comprensión se distribuyeron entre dos grupos para el acto ocho donde hubo y tres grupos para el acto cinco

Conclusiones

Para el diseño de las actividades, se tuvo en cuenta lo expuesto en el marco referencial

- para el pensamiento variacional son necesarias situaciones de variación y cambio en diferentes contextos, adicionalmente que haya un tránsito entre diferentes sistemas de representación para luego plantear preguntas que conduzcan al estudiante al análisis de la situación

Fue posible tipificar cada una de las actividades realizadas por los estudiantes en la intervención y la actividad de cierre

- en el desarrollo de las actividades de la intervención hubo inconvenientes de dos tipos: el primero de interpretación de información suministrada por el software y, el segundo, la discriminación de variables en una situación de movimiento

Relaciones entre razonamiento covariacional y comprensión del concepto de función

Nivel de razonamiento	Actos de comprensión
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)1: Identificación de los cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver. C (f)2: identificación de regularidades en relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)3: identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	C (f)4: Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y des conocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)5: Discriminación entre variables independientes y dependientes.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	
AM3. Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra.	
AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	C (f)8: Síntesis del concepto de ley y el concepto de función; en particular, la toma de conciencia del posible uso de funciones en el modelo de relaciones entre magnitudes físicas u otras.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	

Recomendaciones

Es recomendable que el docente investigador sea el mismo quien dirija el curso, debido a que se presentaron novedades con la docente titular que afectaron la implementación continua de las actividades.

La aplicación debe realizarse durante el periodo lectivo escolar, debido a que el cruce con el proceso de recuperación género que los grupos no asistieran completos a las últimas sesiones de clase.

Al usar un software desconocido para los estudiantes, es necesario hacer un periodo de aprestamiento que le permita a los estudiantes un reconocimiento de las herramientas e información suministrada, ya que esto permite tener una mejor interpretación y análisis por parte de los estudiantes.



Referencias

Ávila, P. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. Universidad Nacional de Colombia. Medellín

Arnal, J., Del Rincón D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa*. Editorial Labor. Barcelona.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. EMA, 8 (2), 121-156.

Gómez, O. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá