

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON TECNOLOGÍAS DIGITALES, UN CAMINO HACIA EL CÁLCULO

Luis Castro*, Carlos Forero**, Harry Gómez***

*IED Cacique Anamay, **Colegio Cafam, ***Universidad Pedagógica Nacional

Esta ponencia forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es rastrear las acciones mentales que dan cuenta del razonamiento covariacional, que surge en un ambiente mediado por tecnología digital al momento de resolver problemas dinámicos. La estrategia metodológica implementada fue la entrevista basada en tareas y se abordó un enfoque fenomenológico – interpretativo. Se reportan las acciones mentales de una pareja de estudiantes de grado noveno que no cuentan con acercamientos a cursos de cálculo, al momento de enfrentarse a una tarea donde se involucran tecnologías digitales y covariación. Los resultados indican que las tecnologías digitales pueden favorecer las acciones mentales y en consecuencia los procesos de razonamiento covariacional fundamentales para la comprensión del cálculo a partir del manejo de herramientas instrumentadas.

Palabras clave: Razonamiento covariacional, instrumentación, tecnologías digitales.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la covariación y su importancia en el aprendizaje del cálculo es un tema que ha sido de interés para la comunidad académica en Educación Matemática. A partir de la experiencia de los autores de este trabajo como docentes de matemáticas de la educación básica y media, surgió un interés por el estudio de las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje del cálculo; en particular, de aquellas asociadas a la falta de análisis covariacional. Se reconoce en las Tecnologías Digitales (TD) un potencial para el estudio de problemas de tipo dinámico. Actualmente, existe una notoria tendencia de uso de dichas tecnologías en contextos escolares y son consideradas relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La NCTM (2000) señala a la tecnología como uno de los seis principios para tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Al identificar la necesidad de profundizar en las dificultades en el aprendizaje del cálculo asociados a la covariación y la posibilidad de indagar cómo estos problemas pueden ser abordados a partir del uso de la tecnología, surge el interés de investigación sobre cómo razonan

covariacionalmente los estudiantes en un ambiente mediado por la tecnología. Este interés ha sido el eje del desarrollo de la propuesta de investigación titulada Análisis covariacional, elemento clave para el trabajo con funciones y la construcción de bases para el cálculo, mediación con software, que se desarrolla actualmente en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. La investigación tiene como propósito fundamental rastrear y describir las acciones mentales asociadas al razonamiento covariacional, que surgen en un ambiente mediado por tecnología digital, al momento en que algunos estudiantes de grados 9° y 10° se enfrentan a problemas dinámicos. El propósito de esta ponencia es presentar los avances en la construcción de las categorías de análisis de la investigación. Estas categorías se han identificado en el estudio guiado de problemas dinámicos y dan paso a lo que se ha denominado categorías de RC en ambientes mediados por TD.

MARCO DE REFERENCIA

Carlson (1998) reporta algunos comportamientos que identificó en estudiantes de pregrado mientras respondían a tareas que involucraban la interpretación de funciones asociadas a situaciones dinámicas. Estos comportamientos fueron relacionados por Carlson, Jacobs, Coe, y Larsen (2003) en cinco acciones mentales: (a) coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra variable (AM1); (b) coordinación de la dirección de cambio en una variable con los cambios en la otra (AM2); (c) coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra (AM3); (d) coordinación de la razón de cambio promedio de una función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada (AM4); y (e) coordinación de la razón de cambio instantánea de una función con los cambios continuos en la variable de entrada (AM5).

Estas acciones mentales fueron reconocidas como medio para la clasificación de comportamientos de los estudiantes. Con motivo de esto, se señala la posibilidad de caracterizar la habilidad de razonamiento covariacional (RC) relativa a una tarea mediante el análisis conjunto de los comportamientos durante su desarrollo y las acciones mentales que pone en juego.

La perspectiva instrumental trabajada por Rabardel (1995), también abordada por Artigue (2007), constituye un insumo teórico que da pie a analizar los comportamientos y las acciones mentales por medio del uso de las TD y su relación con los procesos de razonamiento covariacional. Se toma en cuenta el proceso de instrumentación, entendiéndolo como aquel proceso en el que el sujeto hace uso de la tecnología de tal suerte que con, su uso, está generando conocimiento matemático. Lo anterior tiene lugar en ambientes y situaciones que están mediados por TD.

La noción de instrumento según Rabardel (1995) está asociada con dos elementos: un objeto y el sujeto. En esta noción, “la posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto” (Rabardel, 1995, p 72) y, la mediación constituye un “universo” intermedio cuya característica es la adaptabilidad, tanto al sujeto como al objeto. Esta adaptación, según Rabardel, se da en términos de propiedades materiales, cognoscitivas, y semióticas, en relación con el tipo de actividad en la cual se pone en juego.

Es aquí donde confluyen los resultados de Carlson et al. (2003) con la teoría de Rabardel (1995). Se reconoce el uso de la TD en el aula de clase como instrumento de mediación entre el estudiante y el objeto matemático. Esta mediación se manifiesta en acciones específicas, tanto materiales como semióticas y cognoscitivas, que se llevan a cabo durante la constitución del universo de mediación. En una primera instancia, es posible identificar las acciones materiales de los estudiantes durante el estudio orientado de situaciones de tipo dinámico en un ambiente mediado

por software. Estas acciones tienen efectos en la significación y cognición asociada a los objetos y procesos por parte del sujeto que las desarrolla. Allí, podría decirse que las acciones mentales identificadas por Carlson et al. (2003) pueden verse favorecidas si las acciones semióticas y cognitivas que se desarrollan durante las acciones materiales con la mediación del software tienen algún tipo de correspondencia con los comportamientos que hicieron evidentes las acciones mentales de los estudiantes en su estudio.

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

La estrategia investigativa que se consideró apropiada para el estudio es la entrevista basada en tareas. En esta, el investigador concentra esfuerzos en observar los procesos de razonamiento, en evidenciar el pensamiento, las interacciones, las conversaciones y diferentes producciones realizadas por los estudiantes frente a una misma tarea. El enfoque de la investigación es fenomenológico, pues permite describir, interpretar, explicar y analizar el objeto de estudio que en este caso son las acciones mentales mediadas por TD. La aproximación investigativa es interpretativa, ya que brinda elementos al investigador para identificar y rastrear los diversos significados presentes en las acciones, gestos, respuestas, escritos y, en general, en las producciones realizadas por los estudiantes.

La estrategia investigativa seleccionada requirió el diseño de 3 tareas en las que se estudiaron situaciones de tipo dinámico, con el uso del software GeoGebra. Las tareas diseñadas fueron presentadas a los estudiantes mediante un problema de contexto real. Estas tareas fueron adaptadas de investigaciones anteriores, en las que se hace necesario el estudio de la covariación para su solución. En cada caso, se pide a los estudiantes que analicen la tarea en conjunto. Para ello, se presentan preguntas orientadoras y una construcción en GeoGebra que modela la situación y que les permite visualizar varios aspectos de esta. Finalmente, se solicita que registren sus conclusiones en una hoja frente a las preguntas orientadoras.

En el avance de la investigación, se ha analizado el registro sobre el estudio de una de estas tareas por parte de una pareja de estudiantes de grado noveno. El análisis de las acciones de los estudiantes en el estudio de la tarea titulada “La caja sin tapa” (anexo 1), adaptada de Montero y Parada (2017), ha ofrecido una primera aproximación a los intereses del estudio. Mediante esta tarea, se han reconocido las acciones materiales que ponen en juego los estudiantes durante el estudio de las situaciones dinámicas con la mediación de TD. A continuación, se reporta un fragmento de la transcripción realizada en el estudio. En él, los nombres de los estudiantes son seudónimos y “D” representa al docente investigador. Este fragmento se analiza en la siguiente sección.

- 1 Ingrid: [...] ahí, (cuando el deslizador toma un valor de 12.1) podría tener la forma de un rectángulo la caja y tendría una altura alta, pero [el ancho de la base de la caja]. sería muy delgadita.
- 2 Hernán: Ahí, sí sería una caja [cuando el deslizador toma un valor de 11.6], pero sería muy delgadita ¿no?
- 3 Ingrid: [...] Pues, si caben [...] como le digo [...] no hay harto espacio [refiriéndose a la capacidad del tanque], pero sí hay harta altura.
- 4 Hernán: Tenemos que formar un rectángulo (señala con el dedo la base de la caja en la simulación en 3D) y ver cuál es la altura máxima que puede tener.
- 5 Ingrid: [...] La altura sería 12.3 cm. [después de manipular el deslizador] (...)

- 6 Hernán: Pero ahora nos toca dar una explicación (...)
- 7 D: (...) (...) Ustedes dicen que 12.3 es el valor máximo que puede tomar la altura, ¿eso quiere decir que no existe algún otro valor mayor a ese?
- 8 Ingrid: (...) Pues si se hace más hacia allá (señala con el dedo el lado derecho del deslizador) pero ahí ya no hay caja, ahí ya se cierra.
- 9 D: ¿En qué valor se cierra?
- 10 Hernán: En 12.5
- 11 Ingrid: Entonces podríamos poner 12.4. Pero solo tendría un milímetro la caja así de anchito (hace un gesto con los dedos uniéndolos, dejando un espacio entre ellos muy pequeño)

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En las líneas [1] y [2], cuando Ingrid manifiesta que el deslizador (medida del recorte), toma un valor de 12.1, “se podría generar una caja muy alta pero delgadita”, está reconociendo y relacionando de manera discursiva que los cambios en el deslizador afectan a los cambios de la altura y a los cambios del ancho de la caja. En estas acciones se pone de manifiesto la acción mental 1 (AM1) y un Nivel 1 (N1) de razonamiento covariacional correspondiente a la coordinación de cambios de una variable con los cambios en la otra, pues, a pesar de no ser de carácter cuantitativo, la pareja al parecer reconoce y expresa la relación de dependencia existente entre la medida del recorte, la altura y el ancho de la caja.

En el momento en el que Ingrid, en la línea [3], manifiesta que “no hay hartito espacio” (refiriéndose a la capacidad del tanque), “pero sí hay harta altura”, está reconociendo que a medida que aumenta la altura, la capacidad del tanque disminuye, es decir, está relacionando la dirección de cambio del volumen con la dirección de cambio de la altura del tanque. En esta situación se aprecia una acción mental 2 (AM2). En [8], se da cuenta de las acciones mentales AM1 y AM2 manifestadas en la coordinación del valor y de la dirección del cambio. Cuando Ingrid dice que “si se hace más hacia allá” (manifestando que el valor del recorte aumenta y supera la medida de 12.5) “ya no hay caja”, está dando evidencia de la relación establecida entre la medida del recorte que va aumentando (creciente), mientras el volumen de la caja va disminuyendo hasta tal punto que afirma “ya no hay caja”.

En la línea [11] se muestra que Ingrid, al afirmar que la caja solo tendría un milímetro de ancho cuando la altura de esta es de 12.4 cm, está cuantificando (con cantidades discretas) simultáneamente la cantidad de cambio de la altura con la cantidad de cambio en el ancho de la caja, y las relaciona entre sí, logrando evidenciar una acción mental 3 (AM3). Las acciones mentales 4 y 5 no se constatan en el fragmento analizado, pues, como se ha expresado anteriormente, en esta ponencia se aborda la primera pregunta: ¿Cuál es la mayor altura que puede tener la caja? En la misma situación, en una de las preguntas posteriores, se da cuenta de AM4 y AM5, pero esto corresponde al reporte de la investigación global.

Se constata en las líneas [1] y [2] que tanto Hernán como Ingrid manipulan la herramienta “deslizador” para explorar lo que sucede con el software hasta tal punto de interiorizarlo, reconocer las cualidades y dar cuenta de lo que cambia cuando se manipula el deslizador. En la línea [4], se muestra que la representación gráfica de la simulación en 3D influencia a Hernán a pensar en una estrategia de resolución para dar respuesta a la pregunta en cuestión. En la línea [5], se puede apreciar cómo la manipulación del deslizador le permite a Ingrid llegar a conjeturar alguna posible

respuesta. Así mismo, en las líneas [10] y [11], la misma herramienta permite a Hernán e Ingrid comprobar sus conjeturas, contribuyendo así a modificar y evolucionar sus esquemas mentales. Con respecto a lo anterior podría decirse que hubo un proceso de instrumentación con los estudiantes, pues la herramienta les brindó la posibilidad de generar estrategias de resolución, construir y modificar sus esquemas, permitiéndoles evolucionar las concepciones previas. La evolución de esquemas mentales que permite la instrumentación favorece el paso de una acción mental a otra de mayor complejidad. Así mismo, favorece el cambio de un nivel de razonamiento a otro de mayor complejidad.

A partir del análisis y como resultado específico de este trabajo, surge la rejilla de categorización del razonamiento covariacional en relación con el proceso de instrumentación (ver anexo 2).

CONCLUSIONES

Al parecer, el trabajo con la herramienta deslizador del programa GeoGebra facilita la comprensión de la dependencia y la variación. De este modo, puede consolidarse como una posibilidad para abordar el trabajo temprano con álgebra al facilitar el trabajo con variables y relaciones de dependencia. En este estudio, la herramienta deslizador fue el foco de interés de los participantes, pues todas sus acciones materiales estaban ligadas a su manejo.

El carácter dinámico, instantáneo y atemporal de las tecnologías digitales permite al sujeto resolutor plantear hipótesis y comprobarlas de manera inmediata, cuantas veces sea necesario. De igual forma, posibilita simulaciones dinámicas visualmente agradables y exactas en su mayoría de casos. El anterior aspecto hace que las acciones mentales sean afectadas por el ambiente mediado por el software de manera distinta a lo que sucede en un ambiente que no lo está. En ambientes de lápiz y papel, como el usado por Carlson (2003) en su investigación, los sujetos debían interpretar la información concentrándose en las mismas tareas, pero observando los fenómenos cambiantes uno a uno, llevando a que de alguna forma se limite esa concepción de fenómenos covariantes. Reconocemos una riqueza del presente trabajo, que se atribuye justamente a la tecnología, ya que las situaciones propuestas permiten reconocer y ver el fenómeno de la covariación en objetos y magnitudes que cambian simultáneamente.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática 12*, 9 - 21.
- Carlson, M. (1998). A Cross - Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114 - 162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), 121-156.
- Montero, J. y Parada, G. (2016). *Propuesta para desarrollar el pensamiento variacional en la modalidad B-learning* (trabajo de grado Licenciatura en Matemáticas). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

ANEXOS

Anexo 1. Situación uno: “La caja sin tapa”

Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Ustedes, como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles, esto significa que maximizan los recursos en la pieza.

Especificaciones del cliente

El cliente ha pedido que el recipiente debe tener forma rectangular, sin tapa, hecho a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.

Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas $25\text{cm} \times 35\text{cm}$, para ello cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.

En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.

Se determina que x corresponderá a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas, f corresponderá al fondo de la caja. h corresponderá a la altura de la caja. v corresponderá al volumen de la caja. Llamaremos salto (Δ) al valor del cambio de estado, por ejemplo, Δv corresponde al salto del valor del volumen.

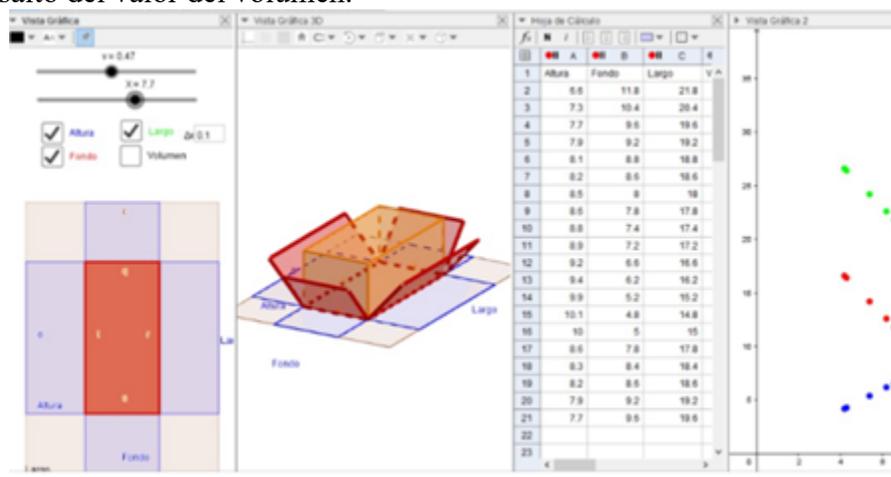


Imagen 1. Vista del aplicativo de la caja sin tapa. (realizado en GeoGebra).

Para el problema de la caja sin tapa se plantearon 10 preguntas orientadoras, sin embargo, para la ponencia se tuvo en cuenta la primera pregunta ¿cuál es la mayor altura que puede tener la caja?

Anexo 2

Rejilla de categorización del razonamiento covariacional en relación con el proceso de instrumentación.

SITUACIÓN UNO - "LA CAJA SIN TAPA"						
ACCIONES MENTALES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL ASOCIADAS A LA TECNOLOGÍA "GEOGEBRA"						
	DESCRIPCIÓN	COMPORTAMIENTOS (CARLSON)	Acciones con tecnología - Instrumentación	Efecto - en el razonamiento	Evidencia	
AM1	COORDINACIÓN	Coordinación del valor de una variable con <u>con</u> los cambios de la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).	Mover el deslizador para visualizar lo que sucede con el tamaño del cuadrado	Reconocimiento del efecto que tiene el cambio de la cantidad (x) en la forma de la caja	Expresan verbalmente la relación existente entre la medida del corte de la caja con una variable. (véase en [1] y [2])
				Mover el deslizador para visualizar como se afecta la altura y el ancho de la caja.	Reconocimiento del efecto del cambio de la medida del recorte de la caja en los cambios de otras magnitudes (altura, el fondo, el largo y el volumen de la caja)	
				Mover el deslizador para visualizar el cambio del volumen		

	DESCRIPCIÓN	COMPORTAMIENTOS (CARLSON)	Acciones con tecnología - Instrumentación	Efecto - en el razonamiento	Evidencia	
AM2	DIRECCIÓN	Coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra la variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada	Mover el deslizador para visualizar lo que sucede con el tamaño del cuadrado	Reconocimiento del efecto que tiene el cambio de la cantidad (x) en la dirección de cambio del tamaño de la caja (aumenta o disminuye)	Expresan verbalmente la relación entre la dirección de cambio del corte de la caja con la dirección de cambio de otra variable (e.g., véase [3] y [8])
				Mover el deslizador para visualizar la dirección del cambio de los cuadrados del recorte y cómo afecta la dirección de cambio de la altura y el ancho de la caja.	Reconocimiento del efecto que tiene la dirección de cambio de la cantidad (x) en la dirección de cambio de la altura, el ancho y el volumen de la caja (aumenta o disminuye)	
				Mover el deslizador para visualizar la dirección de cambio del volumen		

	DESCRIPCIÓN	COMPORTAMIENTOS (CARLSON)	Acciones con tecnología - Instrumentación	Efecto - en el razonamiento	Evidencia
AM3 CANTIDAD	Coordinar la cantidad de cambio de una variable con la cantidad de cambio de otra la variable	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada	Mover el deslizador para visualizar la cantidad de cambio de los cuadrados del recorte y la cantidad de cambio de la altura y el ancho de la caja.	Reconocimiento del efecto que tiene la cantidad de cambio de los recortes en la cantidad de cambio de la altura, el ancho y el volumen de la caja (e.g., si el recorte de la caja aumenta 1 cm, entonces el ancho de la caja disminuye 2 cm)	Expresan verbalmente la relación entre la cantidad de cambio del recorte de la caja con la cantidad de cambio de la altura, el largo, el ancho o el volumen (e.g., véase [11])
			Mover el deslizador para visualizar la dirección del cambio del volumen		
			Usa información de la tabla dinámica para cuantificar el cambio	Cuantifica la cantidad de cambio de los recortes y los relaciona con la cantidad de cambio de la altura, ancho y el volumen de la caja (e.g., si el recorte de la caja aumenta 1 cm, entonces el ancho de la caja disminuye 2 cm)	Expresan escrita o verbalmente la cantidad de cambio del recorte de la caja y la relacionan con la cantidad de cambio de la altura, el ancho, el largo y el volumen de la caja.
			Usa otras tecnologías como el celular o calculadoras para cuantificar la cantidad de cambio.		