

 Universidad de  
**los Andes**  
Colombia

Facultad  
de Educación

 una empresa docente

## RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON TECNOLOGÍAS DIGITALES, UN CAMINO HACIA EL CÁLCULO

Castro Luis\*, Forero Carlos\*\*, Gómez Harry\*\*\*

\*IED Cacique Anamay, \*\*Colegio Cafam, \*\*\*Universidad  
Pedagógica Nacional

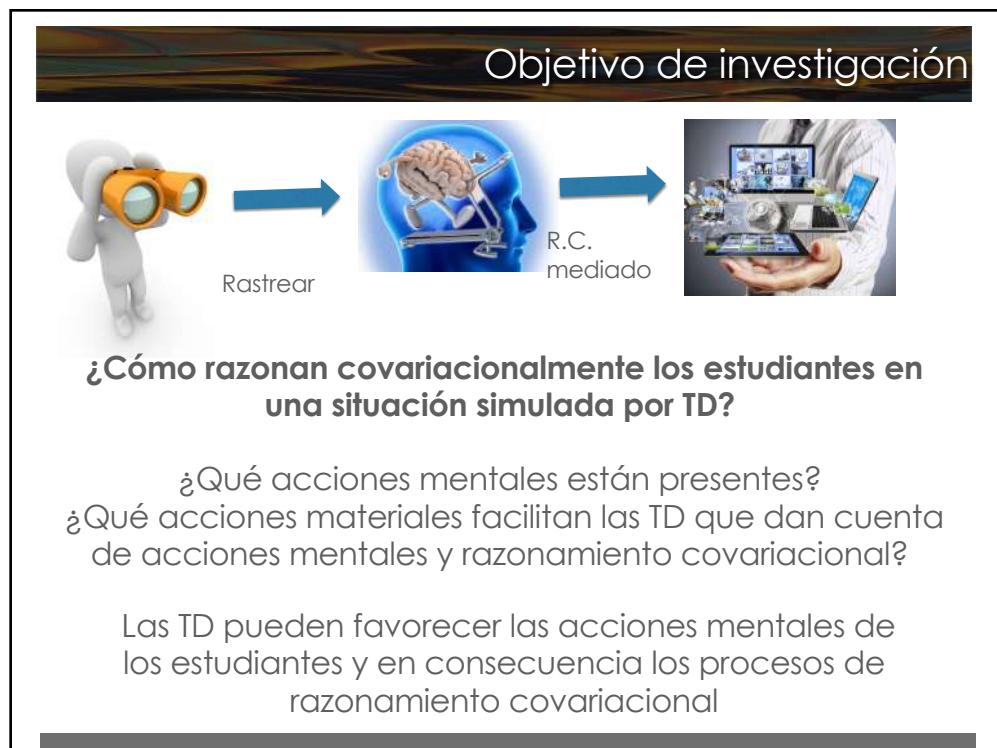
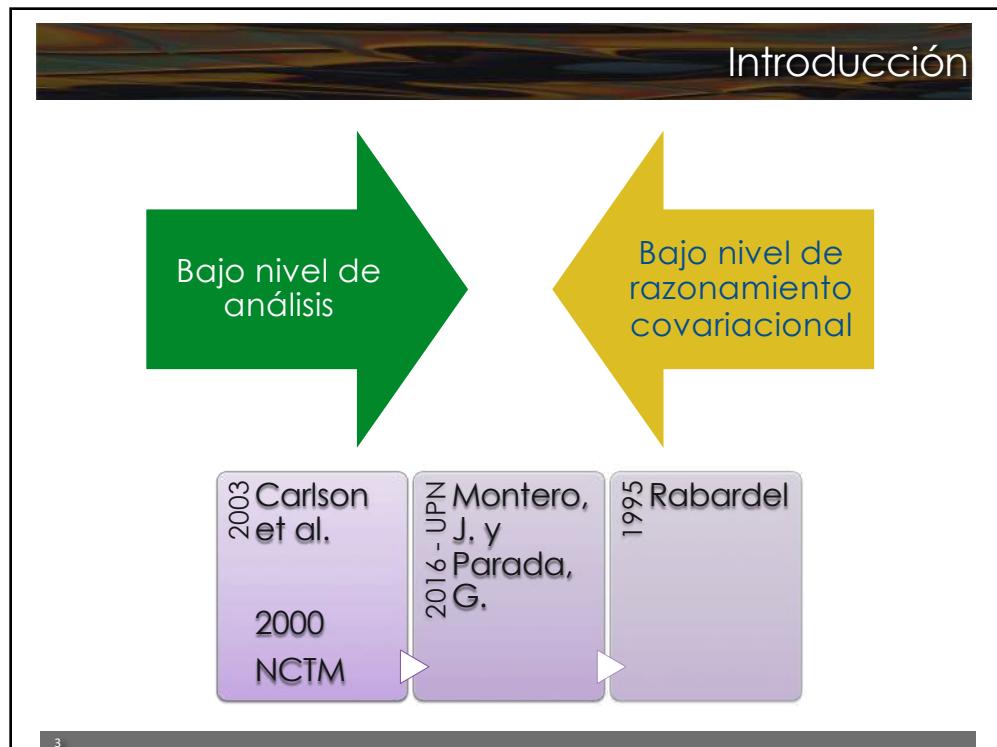
Foro EMAD 2019  
Investigación e innovación en Educación Matemática  
4 de octubre de 2019

### Introducción



Rastrear las acciones mentales que dan cuenta del razonamiento covariacional

2



## Marco de referencia

Carlson et al. (2003) define el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

AM1  
AM2  
AM3  
AM4  
AM5

- Participantes
- Simulación con software
- Carácter estático de las representaciones

## Perspectiva instrumental

Instrumentación

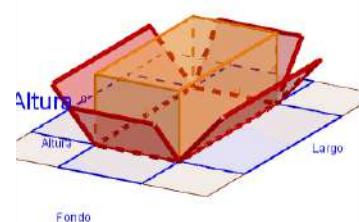
Instrumentación



## Diseño metodológico

**1. Situación Uno. "La caja sin tapa"**

Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Ustedes, como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles, esto significa que maximizan los recursos en la pieza.



8

## Diseño metodológico

**Especificaciones del cliente:**

El cliente ha pedido que el recipiente debe tener forma rectangular, sin tapa, hecho a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.

Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas 25cm x 35cm, para ello cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.

En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.

Se determina que  $x$  corresponderá a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas,  $f$  corresponderá al fondo de la caja.  $h$  corresponderá a la altura de la caja.  $v$  corresponderá al volumen de la caja. Llamaremos salto ( $\Delta$ ) al valor del cambio de estado, por ejemplo,  $\Delta v$  corresponde al salto del valor del volumen.

9

## Situación propuesta - La caja sin tapa

► Representaciones, múltiples y simultáneas

	A	B	C	V
1	Altura	Fondo	Largo	
2	11.7	1.6	11.6	
3	12.1	0.8	10.8	
4	12.2	0.6	10.5	
5	12.4	0.2	10.2	
6	12.5	0	10	
7	12.6	0.2	10.2	
8	12.2	0.6	10.6	
9	11	3	13	
10	9.3	6.4	16.4	
11	9	7	17	
12	8.8	8	18	
13	8.4	8.2	18.2	
14	8.3	8.4	18.4	
15	8.2	8.6	18.6	
16	8.1	8.8	18.8	
17	8	9	19	
18	7.9	9.2	19.2	
19	7.8	9.4	19.4	
20	7.7	9.6	19.6	
21	7.6	9.8	19.8	
22				
23				
24				

10



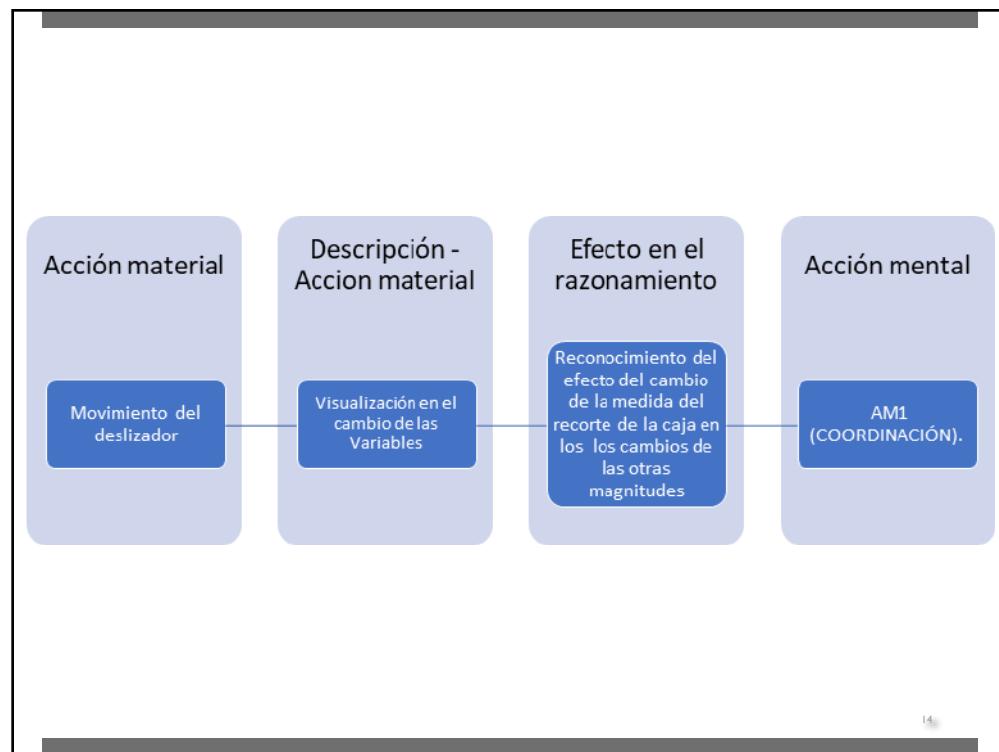
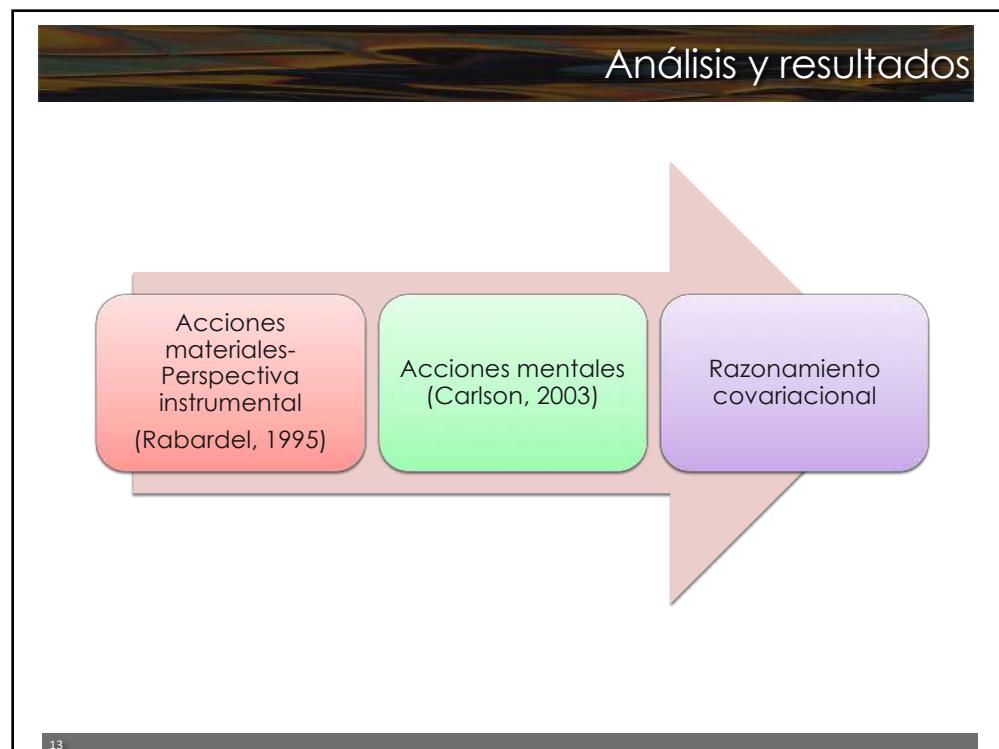
## Fragmento

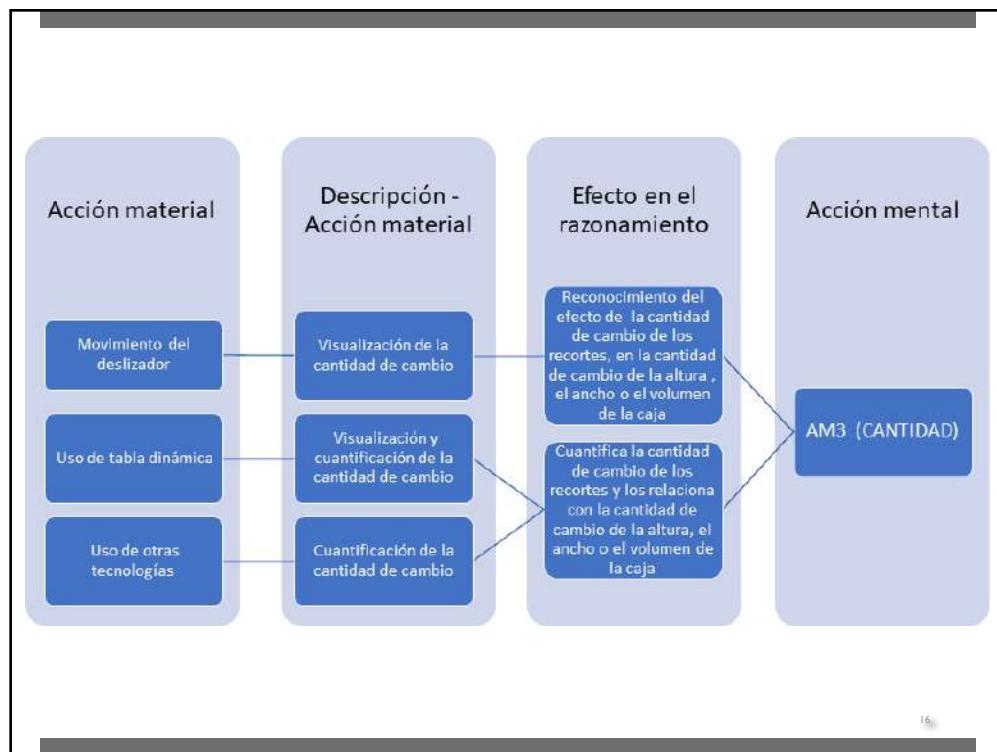
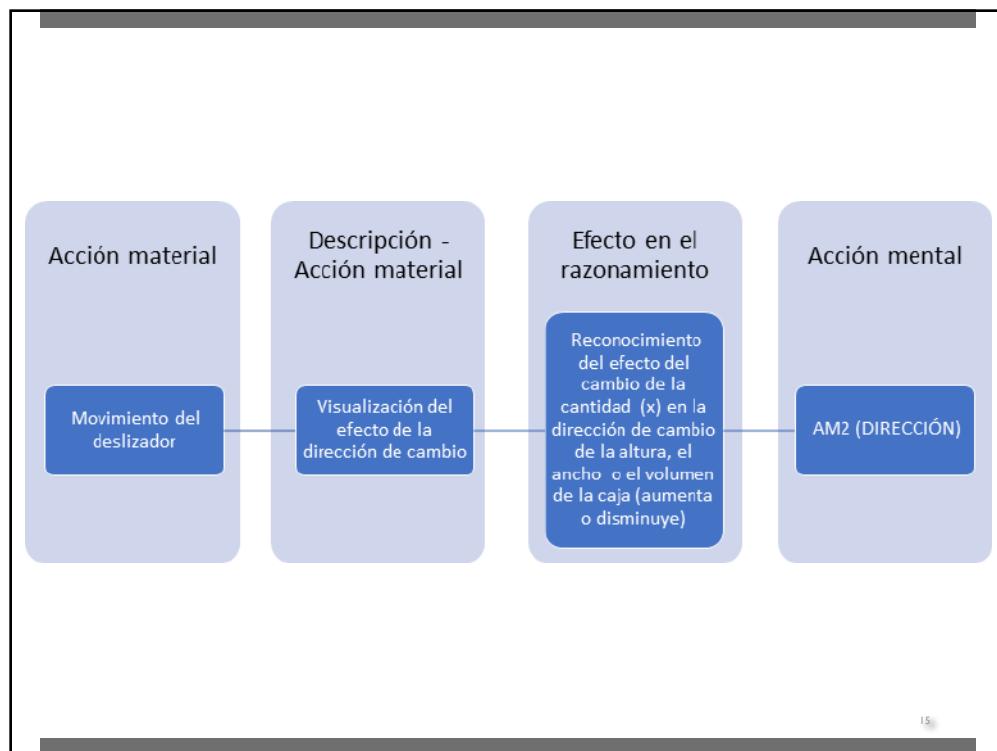
1	Ingrid:	[...] ahí, (cuando el deslizador toma un valor de 12.1) podría tener la forma de un rectángulo la caja y tendría una altura alta, pero [el ancho de la base de la caja]. sería muy delgadita.
2	Hernán:	Ahí, si sería una caja [cuando el deslizador toma un valor de 11.6], pero sería muy delgadita ¿no?
3	Ingrid:	[...] Pues, si caben [...] como le digo [...] no hay harto espacio [refiriéndose a la capacidad del tanque], pero sí hay harta altura.
4	Hernán:	Tenemos que formar un rectángulo (señala con el dedo la base de la caja en la simulación en 3D) y ver cuál es la altura máxima que puede tener.
5	Ingrid:	[...] La altura sería 12.3 cm. [después de manipular el deslizador] (...)



## Fragmento

6	Hernán:	Pero ahora nos toca dar una explicación (...)
7	D:	(...) (...) Ustedes dicen que 12.3 es el valor máximo que puede tomar la altura, ¿eso quiere decir que no existe algún otro valor mayor a ese?
8	Ingrid:	(...) Pues si se hace más hacia allá (señala con el dedo el lado derecho del deslizador) pero ahí ya no hay caja, ahí ya se cierra.
9	D:	¿En qué valor se cierra?
10	Hernán:	En 12.5
11	Ingrid:	Entonces podríamos poner 12.4. Pero solo tendría un milímetro la caja así de anchito (hace un gesto con los dedos uniéndolos, dejando un espacio entre ellos muy pequeño)





## Conclusiones

¿Qué acciones mentales están presentes?

- El desarrollo de actividades mediadas por tecnología favoreció las AM1, AM2 y AM3. Esto se evidenció tanto en la discusión de los estudiantes durante la solución del problema como en la entrevista. La posibilidad de manipular los valores de una variable libremente y visualizar de manera general el efecto de estos cambios en la otra variable, permitió a los estudiantes identificar claramente la relación de dependencia entre las variables (AM1).
- La herramienta tecnológica permitió, a través de la manipulación controlada de una de las variables generar conclusiones en torno a la dirección del cambio de la otra variable (AM2).
- Los estudiantes se vieron avocados a desarrollar algunos cálculos en lápiz y papel para intentar establecer de manera precisa el efecto en relación las cantidad de cambio (AM3).
- Las acciones 4 y 5 no se evidencian en el fragmento reportado.

## Conclusiones

Se encontraron dos acciones mentales no reportadas por Carlson et al. (2003).



**Acción mental intermedia 1**  
Coordinar los cambios de la variable independiente con los máximos y mínimos de la función.

**Acción mental intermedia 2**  
Coordinar los incrementos uniformes en la variable de entrada con los cambios de la otra variable.

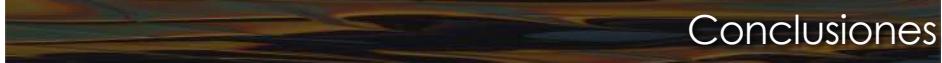
Estas acciones mentales se ampliarán en el estudio más refinado



## Conclusiones

¿Qué acciones materiales facilitan las TD que dan cuenta de acciones mentales y razonamiento covariacional?

- La herramienta deslizador fue el foco de interés de los participantes, pues todas sus acciones materiales estaban ligadas al manejo del mismo
- El carácter dinámico, instantáneo y atemporal de las tecnologías digitales permite al sujeto resolutor plantear hipótesis y comprobarlas de manera inmediata, cuantas veces sea necesario



## Conclusiones

- El uso del deslizador fue necesario para coordinar el valor de una variable con los cambios de la otra, la dirección de cambio y la cantidad de cambio.
- El uso de calculadora le permitió a los estudiantes comprobar los resultados que les brindaba el software, conjeturar y comprobar hipótesis.
- Se hacen evidentes los procesos de instrumentación e instrumentalización en los estudiantes, pues en la medida en que se apropiaban del problema, también se iban familiarizando con el manejo del software.



## Contactos

Luis Castro: [lacastrod@upn.edu.co](mailto:lacastrod@upn.edu.co) & [luiscastro1945@hotmail.com](mailto:luiscastro1945@hotmail.com)

Carlos Forero: [caförero@colegio.cafam.edu.co](mailto:caförero@colegio.cafam.edu.co) & [caförerot@upn.edu.co](mailto:caförerot@upn.edu.co)

Harry Gómez: [hagomeze@pedagogica.edu.co](mailto:hagomeze@pedagogica.edu.co)