

**Foro EMAD 2019  
Universidad de los Andes**

***La coexistencia de formas de  
pensamiento aritmético sofisticado y  
proto-formas de pensamiento  
algebraico: un problema didáctico***

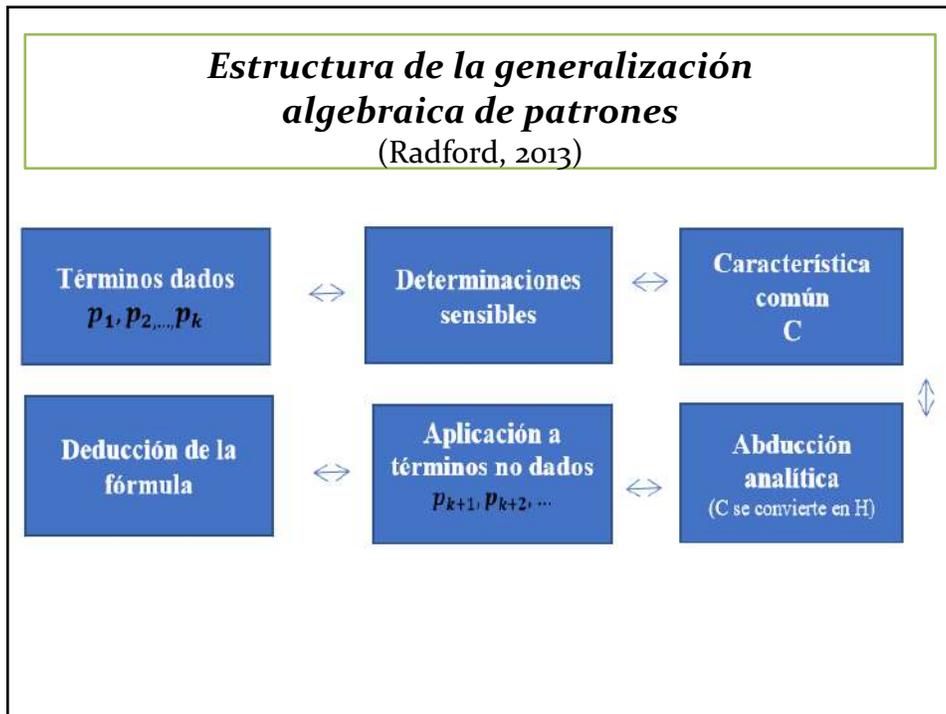
**Rodolfo Vergel**  
[rodolfovergel@gmail.com](mailto:rodolfovergel@gmail.com)  
**Universidad Distrital Francisco José de Caldas**  
4 de octubre de 2019

1

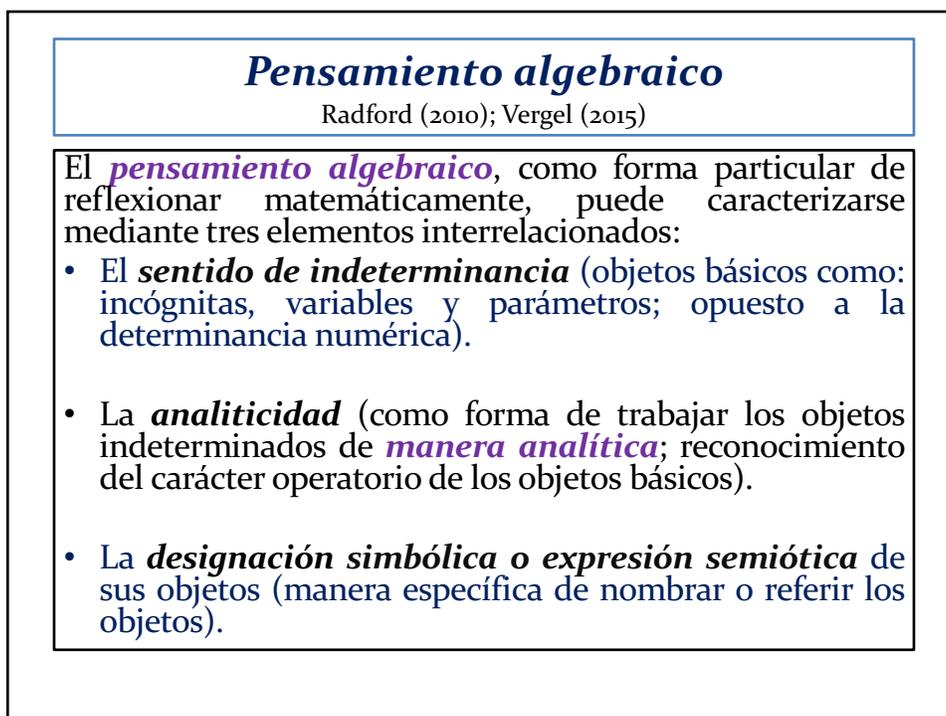
**Orden de la presentación**

- 1. Sobre la generalización aritmética y algebraica de patrones (ejemplos de formas de pensamiento).**
- 2. Dos casos: Yaneth y la profesora de primaria.**
- 3. Consideraciones finales.**

2



3



4

## *El caso de Yaneth*

<b>2</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
Término 1	Término 2	Término 3

5

L1. Profesora Johanna: A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a **trabajar con una secuencia numérica**. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de **figura 1, figura 2, figura 3**, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (...) entonces miren el término 1 es (...) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

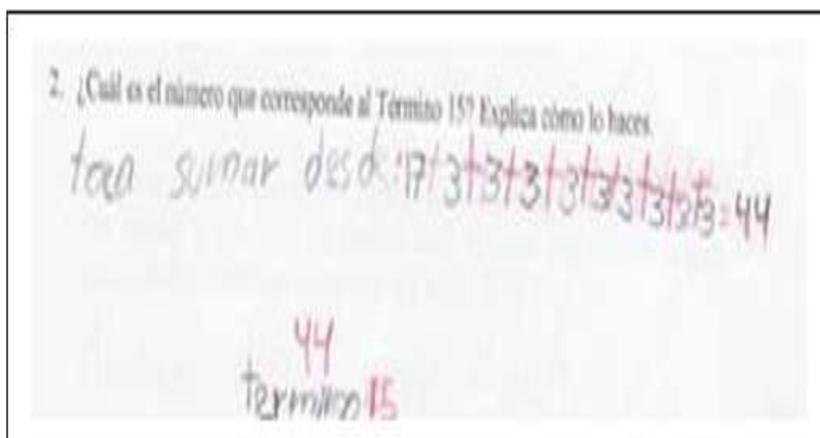
L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores.

6

- ✓ La profesora Johanna decide iniciar un **trabajo conjunto** (Radford, 2014).
- ✓ Intenta resaltar la **relación funcional entre el término y el número correspondiente**, con el propósito de hacer emerger una toma de conciencia de dicha relación funcional en y entre los estudiantes.
- ✓ El trabajo conjunto es, precisamente, el que posibilita la **toma de conciencia**....estrechamente vinculada con la interacción entre los estudiantes, es decir, con la actividad.
- ✓ **“La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia”**.  
(Leontiev, 1978, p. 96).

7

## Producción de Yaneth



8

- Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2)

Su producción con respecto al ítem 2:

*“toca sumar desde:  $17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44$ ”*

sugiere que el número 9 obtenido por la diferencia entre el los números 15 y 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.

- La **característica común** identificada por Yaneth (**aumentar 3**) a partir de su respuesta al ítem 2 es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al Término 15.
- Esta **abducción** (generalización de la característica común) es utilizada como simple posibilidad, es decir algo que es solamente plausible (Radford, 2013).

9

- Más específicamente, Yaneth parece recurrir a una **generalización muy sofisticada** que se podría simbolizar así:

Se parte de un término cualquiera conocido  $T_a$  y se quiere hallar  $T_n$ .

$$T_a + (n - a) \times 3 = T_n.$$

- La generalización,

*¿es algebraica o aritmética?*

10

- La ausencia de **elementos espaciales o geométricos** (que sí comportan las secuencias figurales) hace provocar un trabajo de generalización por parte de Yaneth basado en **relaciones entre números**.
- Esto sugiere pensar, inicialmente, que **no existe tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica)**.

11

### *¿Por qué “sofisticada”?*

El adjetivo **“sofisticada”** introducido quiere establecer la diferencia en relación con el proceso de generalización aritmética teorizado por Radford (2013, p. 7), para quien **“la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro”**.

12

- Casos de producciones de estudiantes que cursan primeros grados de la primaria, sería posible generar una fórmula algebraica tomando en consideración solamente la dimensión aritmética, al *notar que se añade siempre 3 a un término para producir el siguiente.*
- Sin embargo, este camino resultaría difícil pues requiere un conteo sistemático, el cual, para el caso de la producción de Yaneth, logró transformarse en una expresión aritmética sofisticada:

$$17 + (15 - 6) \times 3$$

pero para estudiantes de los primeros grados de primaria podría resultar difícil, si consideramos, de manera infortunada, la *naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético.*

13

- ❑ El trabajo a partir de relaciones entre números facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error.
- ❑ Estas estrategias se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la *analiticidad.*

(Radford, 2008, 2013; Vergel, 2015)

14

- ❑ En este caso, **no** hay posibilidad de transitar de la **abducción** a la **hipótesis**.
- ❑ No obstante, la expresión sofisticada que logra producir Yaneth, que se puede representar como  $17 + (15 - 6) \times 3$ , sugiere la presencia de lo que propongo llamar una **proto-analiticidad** o **analiticidad incipiente**.

15

La obligatoriedad evidenciada en su elocución:

***“toca sumar desde***

***17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44”***

indica que ha considerado la condición de sumar 3, basada en el análisis de cómo cambian las imágenes (**números 2, 5 y 8**) de los tres términos dados (**actividad perceptual**), para poder producir su expresión sofisticada.

16

➤ Su ejercicio de análisis sugiere una mirada estructural de la secuencia:

Se centra en *examinar relaciones no sólo entre las imágenes, sino también entre éstas y sus respectivas pre-imágenes*, lo que predica acerca del uso de **pensamiento relacional** (Molina, 2009).

17

### *Algunas precisiones...*

- ❑ Lo **analítico** significa hacer **deducciones**: Según Pappus, significa “el **movimiento** de lo que **se da** a lo que **se busca**” (Rideout, 2008).
- ❑ Para Vieta: lo que era distintivamente algebraico era la **manera analítica** en la que pensamos cuando pensamos algebraicamente.
- ❑ En particular, en la generalización de patrones, una **generalización algebraica** implica **deducir** una fórmula desde algunos términos de una secuencia dada.
- ❑ **Que la fórmula sea expresada o no en simbolismo alfanumérico es irrelevante** (Radford, 2010; Vergel, 2015).

18

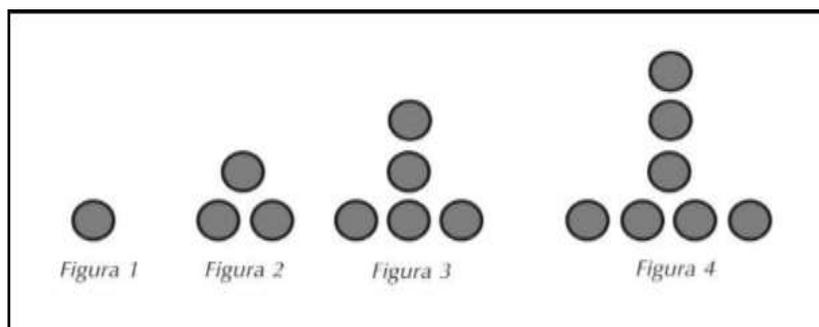
***Saber algebraico*** es una síntesis histórica y culturalmente codificada de hacer y de reflexionar, en términos analíticos, sobre números indeterminados y conocidos.

***Una idea esencial***

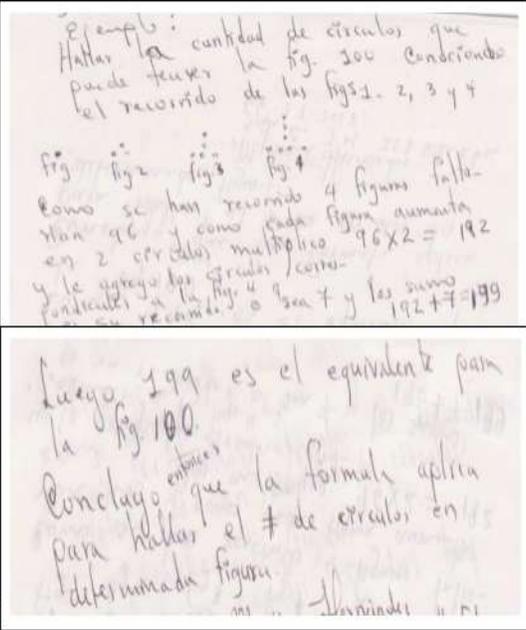
***No es porque usamos letras que estamos pensando algebraicamente***

19

***El caso de la profesora de primaria***



20



Ejemplo: Hallar la cantidad de círculos que puede tener la fig. 100 conociendo el recorrido de las figs 1, 2, 3 y 4.  
 fig 1    fig 2    fig 3    fig 4  
 Como se han recorrido 4 figuras faltan 96 y como cada figura aumenta en 2 círculos multiplico  $96 \times 2 = 192$  y le agrego los círculos correspondientes a la fig. 4 o sea 7 y los sumo  $192 + 7 = 199$ .  
 Luego 199 es el equivalente para la fig 100.  
 Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el # de círculos en determinada figura.

**"96 es lo que le hace falta a 4 para llegar a 100 y cada figura aumenta de a 2, entonces lo que hago es multiplicar  $96 \times 2$  y a ese resultado le sumo 7 que son los círculos de la figura 4"**

**"Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el número de círculos en determinada figura"**

21

- ✓ Índices perceptivos generalizables en las secuencias figurales: propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica: **articulación constituye un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico** (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016; Vergel y Rojas, 2018).
- ✓ Como en el caso de la producción de Yaneth, aquí también emerge un tipo de relaciones, basado en una **mirada estructural de la secuencia**...confiere un carácter algebraico al **pensamiento relacional** (Molina, 2009).

22

Si bien la forma de predicación algebraica es general, y en tal sentido necesitaríamos las cantidades indeterminadas, este *tipo de deducción* que propongo quiere enfatizar el hecho de que, *aun cuando la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico, la producción sugiere que estaría muy cerca de este tipo de pensamiento o confundirse con éste.*  
(Vergel, 2019)

23

- La profesora procede desde un contexto aritmético y su fórmula es aritmética.
- No obstante, su producción hacia el final testimonia que esta fórmula aplica para calcular el número de círculos en determinada figura, lo cual indica que la *fórmula encontrada ha sido deducida de las premisas de la tarea.*
- Esta fórmula le permite *hallar el número de círculos de cualquier figura.*
- Una vez más, estaríamos ante la presencia de una *deducción incipiente o primitiva* (proto-analiticidad).

24

### Para aclarar...

- De la expresión aritmética

$$3 + 8 = 8 + 3$$

se puede **deducir** que

$$3 + 8 + 2 = 8 + 3 + 2$$

- Pero, insisto, la **deducción** en ella misma no implica un pensamiento algebraico.
- Necesitamos las **cantidades indeterminadas**, pues la forma de predicación algebraica es general (Viète, 1591).

25

### Consideraciones finales

- El análisis de las producciones en los dos casos hace pensar que podríamos estar ante la presencia de una generalización aritmética sofisticada:

$$Ta + (n - a) \times 3 = Tn \text{ (caso de Yaneth)}$$

$$Ta + (n - a) \times 2 = Tn \text{ (caso de la profesora)}$$

- O quizás ante la presencia de unas **proto-formas de pensamiento algebraico**, caracterizadas por una **analiticidad incipiente**.

26

## Consideraciones finales

Desde el análisis semiótico planteado:

- Pensar en lo que propongo llamar una **zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico**.
- Podríamos estar **enseñando aritmética** mientras pensamos que estamos **enseñando álgebra**.

27

## Consideraciones finales

- **Podríamos estar fallando en promover formas genuinas elementales de pensamiento algebraico en los estudiantes.** Esta es la razón por la cual la distinción entre aritmética y álgebra es una tarea que no puede descartarse en la investigación en álgebra temprana.
- Sin proporcionar una distinción clara entre aritmética y álgebra y las relaciones epistemológicas entre estas dos disciplinas (al menos en lo que respecta a las matemáticas escolares), **será difícil (por no decir imposible) organizar actividades de aula que puedan movilizar y preparen a los estudiantes para el aprendizaje de conceptos algebraicos más sofisticados posteriormente.**
  - **He aquí un problema didáctico...**

28

*Muchas gracias por su  
atención  
y  
hasta una próxima  
oportunidad!*