



Universidad de los Andes
Facultad de Educación

COLCIENCIAS

una empresa docente

Foro EMAD 2019

Investigación e innovación en Educación Matemática

Fecha: 4 de octubre de 2019
Hora: 7:30 a. m. a 1:30 p. m.
Lugar: Universidad de los Andes, Bogotá

INCIDENCIA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL EN LA ESCUELA

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez; Diana Carolina Pérez Duarte; Luis Fernando Pérez Duarte, Beatriz Avelina Villarraga Vaquero

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO

1

Contenido

- Contexto inicial
- Referentes sobre la resolución de problemas
- Sustentos teóricos y didácticos
- Construcción del pensamiento geométrico espacial

2



 Jean Dieudonné
(entrevista de 1987)

“Creo que el tiempo para esta ‘reparación’ ha terminado y que ahora debemos considerar una reforma mucho más profunda, a menos que permitamos que la situación se deteriore hasta el punto de obstaculizar seriamente cualquier progreso científico adicional. Si quisiera resumir en una frase todo el programa que tengo en mente, sería por el eslogan: **‘Abajo con Euclides’**. Esta declaración puede parecer chocante para algunos de ustedes; quisiera contarles en detalle los argumentos poderosos que militan a su favor. [...] en el curso de esta evolución, las nociones fundamentales de la geometría se han retomado en la base, especialmente desde mediados del siglo XIX: así ha sido posible reorganizar la geometría euclidiana, darle una base simple y sólida y reevaluar su importancia en relación con las matemáticas modernas, separando lo que es esencial de una masa caótica de resultados que son solo reliquias dispersas de métodos torpes o puntos de vista obsoletos”.

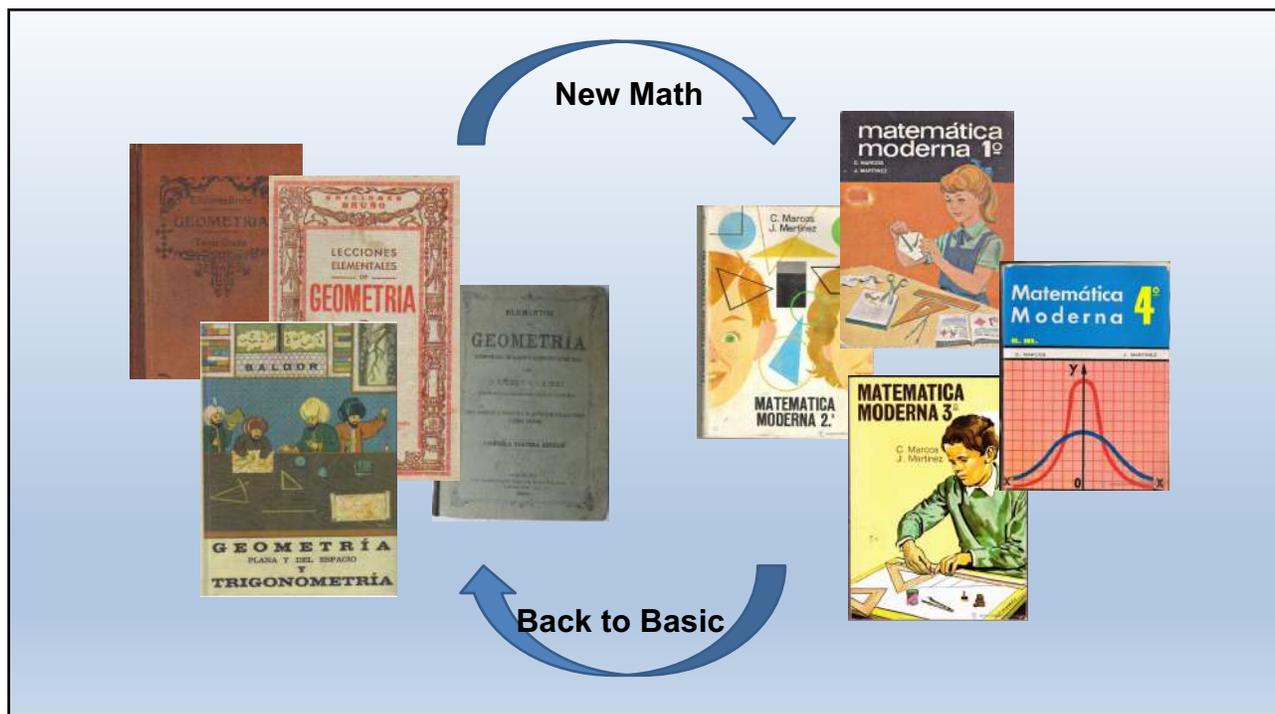


Discurso en *Le Séminaire de Royaumont*, 1950.

3



4



5

Afectaciones de la Matemática Moderna

- **Intuición** ... fomentar reformas y pronunciamientos radicales en las sucesivas reuniones, congresos y seminarios a escala mundial
 - **Visualización**
 - **Manipulación geométrica**
- ... la enseñanza de la **geometría** y en particular la del espacio, se ve afectada en la **mayoría de los países del mundo** con una tendencia denominada "**Matemática Moderna**" que **enfatisa la algebrización por encima de la geometría**

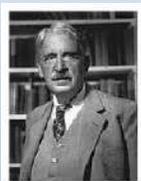
 **Pensamiento geométrico**

6

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

La solución de problemas durante el Siglo 21

Resolución de problemas



Dewey



Polya, G.



Jinfa Cai



Bharath Sriraman



Miguel de Guzmán



Celia Rizo



Schoenfeld



Lyn English



Peter Grootenboer



Alan Zollman

7

¿Qué es un problema?

“Un problema es **una situación, cuantitativa o de otra clase**, a la que **se enfrenta un individuo** o un grupo, que **requiere solución** y para la cual **no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio** que conduzca a la misma.”

Krulik y Rudnik, (1980)

8

¿Qué es un problema retador?



... estimula el pensamiento, es interesante para el estudiante y la solución no es inmediata

Exigen la **integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos** con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), **su solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos, para lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental**

9

PENSAMIENTO VISUAL PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL



¿Qué es el pensamiento visual?

Se entiende por **pensamiento visual** lo relacionado con “**pensar en imágenes**” por un lado, y, por otro, con “**expresarse con imágenes**”



- **Percepción de objetos**
- **Abstracción**

10

Pensamiento visual

La **percepción** junto con **la atención** y **la memoria** son los **ejes cognitivos** desde los que se aborda el estudio del **pensamiento visual**

Gracias a los avances en neurociencia, sabemos que el cerebro es capaz de mejorar la retención de información cuando ésta se acompaña de imágenes



11

¿Qué es el pensamiento visual?

“... define el constructo del **pensamiento visual** como un **proceso, o conjunto de procesos cognitivos que realizamos de manera específica en torno a la información visual**, con los que **interpretamos la realidad y que nos conducen a la acción**”

Urchegui (2015)

12

¿Qué es el pensamiento visual?

Una forma específica de conocimiento y un estilo de comunicación

Una forma de recibir información a partir de la interpretación de imágenes y una manera de transmitir información y comunicar a partir de la construcción de imágenes, desde el simple gesto gráfico hasta la utilización de diferentes recursos y TIC

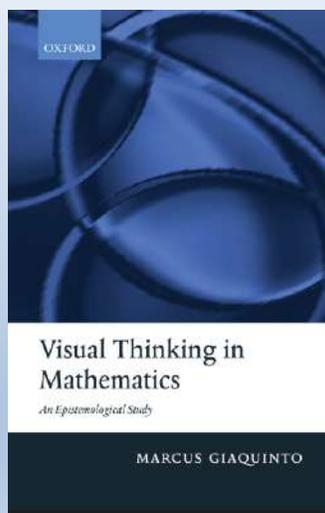
Urchegui (2015, p. 25)

13

¿Qué es el pensamiento visual?

“... el pensamiento visual visto desde la matemática **tiene un valor cognitivo**, pues **constituye una ayuda y un medio de descubrimiento para el contenido matemático**”

Giaquinto (2007)



14

VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

“... es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión”

Arcavi (2003)

15

Principio de la visualización

Consiste en la **búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos y sus interrelaciones**, donde el **pensamiento geométrico se activa mediante el trabajo con la ZDP**. En el **proceso de búsqueda se reconfigura el significado y el sentido de estos objetos y sus interrelaciones**, mientras el estudiante, ayudado por el maestro o por sí mismo, explora diversas vías y activa diferentes conceptos

Rojas (2009)

16

Reglas del principio heurístico visualización

- **Objetivación de figuras geométricas:** se pone de manifiesto en la representación del objeto concreto, en la representación simplificada, en la construcción de figuras de análisis y en construcciones auxiliares
- **Manipulación geométrica, descomposición e integración**
- **Representación analítica:** se refiere a buscar relaciones, para determinar los objetos y operaciones que se pueden establecer

Rojas (2009)

17

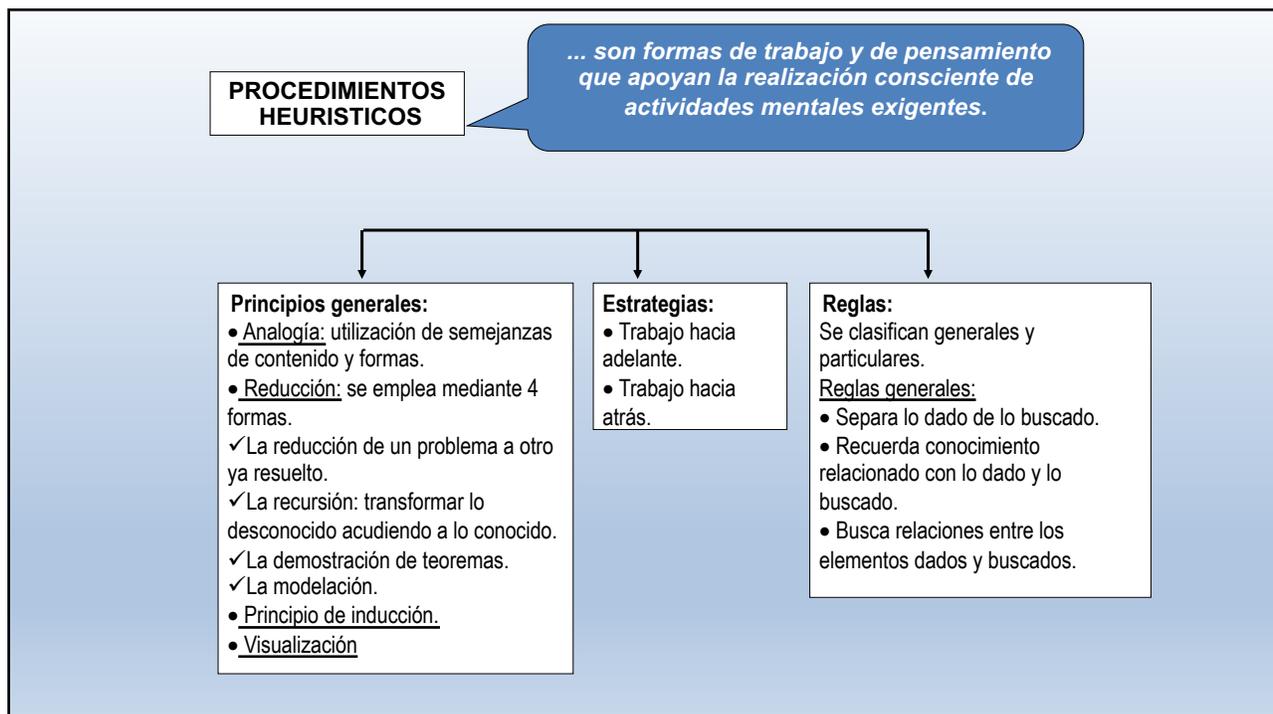
HEURÍSTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

Método Heurístico

“... mediante el cual **se le plantean a los estudiantes preguntas que facilitan la búsqueda independiente de problemas** y soluciones de estos, donde el maestro **no le informa al estudiante los conocimientos terminados**, sino que **los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes de forma independiente**”

(Ballester et al., 1992a, p. 225)

18



19

MANIPULACIÓN GEOMÉTRICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

- **Modelar tanto objetos geométricos reales, como objetos geométricos virtuales**
- **Buscar características y propiedades de las figuras geométricas que pueden ser percibidas únicamente cuando se manipula con ellos.** De esta forma el alumno se fija más en ciertos elementos de los cuerpos geométricos que pasarían inadvertidos en una percepción exclusivamente visual
- **Ayudar a concentrarse en una parte más reducida de la percepción y, de esta manera, a conocer las particularidades, los detalles y analizar los cambios que se producen en los cuerpos geométricos**

Rojas (2009)



20

Creatividad para la construcción del pensamiento geométrico espacial



CREATIVIDAD		
Resolución de Problemas		Formulación de Problemas
<ul style="list-style-type: none"> Abordar problemas con varias: <ul style="list-style-type: none"> - interpretaciones - estrategias de resolución - soluciones 	FLUIDEZ	<ul style="list-style-type: none"> Formular varios problemas a partir de una situación
<ul style="list-style-type: none"> Resolver (o expresar o justificar) un problema de una forma y luego hacerlo de otras formas 	FLEXIBILIDAD	<ul style="list-style-type: none"> Formular problemas que se pueden resolver de diferentes formas Formular nuevos problemas a partir de la cuestión: "¿Qué pasaría si ...?"
<ul style="list-style-type: none"> Examinar muchos métodos de resolución o respuestas (expresiones o justificaciones) y generar luego otros diferente 	ORIGINALIDAD	<ul style="list-style-type: none"> Examinar algunos problemas ya formulados y luego proponer otros diferentes

Tomado de Vega, M. L. (2003).

21

Referentes sobre Materiales didácticos

Son propicios para:

- **Visualizar**
- **Manipular**
- **Observar transformaciones**
- **Representar**
- **Objetivar**, con el fin esencial de crear en los estudiantes nociones claras, precisas y correctas de las figuras geométricas, cuando existe una apropiada correlación entre lo observado, lo abstracto y lo concreto y la generalización



... permiten apoyar la explicación del docente, comparar, generalizar, conjeturar, experimentar, construir y mover figuras geométricas

22

Referentes sobre el Pensamiento espacial

Pensamiento matemático-Lineamientos Curriculares-Estándares

“Aquí se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; **en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico**; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio”

Estándares Básicos de Competencias, p. 58

23

“Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas **inteligencias la espacial** y plantea que el **pensamiento espacial** es esencial para el pensamiento científico, ya que es **usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas**. El manejo de **información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios** es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las **profesiones científicas y técnicas**, tales como el **dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación**, y muchas disciplinas científicas como **química, física, matemáticas**, requieren personas que tengan un **alto desarrollo de inteligencia espacial**”



Ministerio de Educación Nacional (1998).
Matemáticas. Lineamientos Curriculares.
MEN. Bogotá, p. 37.

24

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos

Concepción curricular del pensamiento espacial:

“... **el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales**”



Ministerio de Educación Nacional (1998).
Matemáticas. Lineamientos Curriculares.
MEN. Bogotá, p. 56.

25

Estándares Básicos de Competencias

Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: **los sistemas geométricos.**

Como todos los sistemas, los geométricos tienen tres aspectos: **los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos.** Estos sistemas se expresan por dibujos, gestos, letras y palabras

Estándares Básicos de Competencias, p. 62

26

Sistema geométrico

Soporta al **pensamiento espacial** y es el encargado de trabajar **las formas**, **las estructuras** y **como analizar sus características y relaciones**



Este pensamiento **propicia la construcción y manipulación de representaciones mentales de objetos de tres dimensiones y la observación desde diferentes perspectivas**



Ministerio de Educación Nacional (1998).
Matemáticas. Lineamientos Curriculares.
MEN. Bogotá, p. 56.

27

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- **Cuerpos, superficies y líneas**
- **Desarrollo del pensamiento geométrico**
- **Representación bidimensional del espacio tridimensional**
- **Las transformaciones**



Ministerio de Educación Nacional (1998).
Matemáticas. Lineamientos Curriculares.
MEN. Bogotá, p.. 38-40

28

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Primero a tercero

ÁREAS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
<p>es contextualización, localización, números,</p>	<ul style="list-style-type: none"> Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. Dibujó y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.

Cuarto a quinto

ÁREAS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
<p>objetos: situaciones, razonamiento, contextos, relaciones en di-</p>	<ul style="list-style-type: none"> Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.

29

Sexto a séptimo

ÁREAS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
<p>de medidas expresiones (es) para representación utilizando las matemáticas (relaciones en la vida cotidiana, etc.) y de características (propiedades básicas, igualdad, las relaciones de la adición, etc.)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

30

Décimo a undécimo	
NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
<p>s números racionales.</p> <p>le los números geométricos</p> <p>e los números y las de sus re- nejar y utilizar néricos.</p> <p>s para justificar les.</p> <p>diferentes no- obre su uso en</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. • Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. • Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. • Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. • Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

31

Geometry

STANDARD

for Grades

9–12

Expectations

In grades 9–12 all students should—

<p><i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i></p> <p>Analyze characteristics and properties of two- and three-dimensional geometric shapes and develop mathematical arguments about geometric relationships</p>	<ul style="list-style-type: none"> • analyze properties and determine attributes of two- and three-dimensional objects; • explore relationships (including congruence and similarity) among classes of two- and three-dimensional geometric objects, make and test conjectures about them, and solve problems involving them; • establish the validity of geometric conjectures using deduction, prove theorems, and critique arguments made by others; • use trigonometric relationships to determine lengths and angle measures.
---	--

32

NCTM Geometría

- La geometría ofrece un medio para describir, analizar y entendiendo del mundo...
- Usando **software de geometría dinámica**, los estudiantes pueden **generar rápidamente y explorar una gama de problemas geométricos**

NCTM, 2000

33

En los **Estándares** se considera que las **ideas geométricas** son útiles al **presentar y resolver problemas** en otras **áreas de la Matemática** y en **situaciones del mundo real**, **exigen que la geometría se integre, cuanto sea posible, con otras áreas a través de problemas contextualizados e interdisciplinarios**

National Council of Teachers of Mathematic (NCTM, 2000)

34

Pensamiento geométrico

Capacidad compuesta por cinco destrezas (*skills*) fundamentales:

- **Visualizar imágenes** (identificar, observar características, comprender un dibujo, identificar posiciones)
- **Lenguaje** (uso correcto de la terminología y exactitud en el lenguaje para describir los objetos y las relaciones espaciales)
- **Construir formas** (realizar construcciones en 2D y 3D, dibujar figuras semejantes, dibujar figuras simétricas)
- **Pensamiento lógico** (clasificar, reconocer criterios para clasificar, formular hipótesis y verificarlas, demostrar)
- **Aplicar** (aplicar los conocimientos aprendidos en la práctica, resolver problemas prácticos utilizando geometría)



Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.

35

Algunas situaciones típicas donde se despliega el pensamiento geométrico

- **Visualización**
- **Construcción de figuras con regla y compás**
- **Imaginación espacial**
- **Construcciones auxiliares**
- **Cuantificación del espacio**
- **Papiroflexia**
- **Transformaciones geométricas**

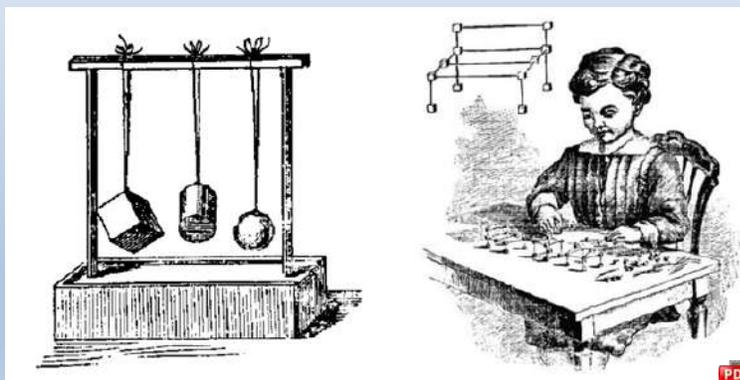
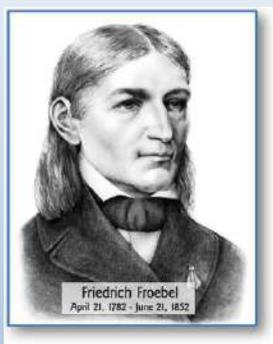
36

Recursos didácticos para la construcción del pensamiento geométrico espacial

- Manipulación de objetos espaciales
- **Juego con figuras geométricas**
- Construcción de una figura de análisis
- **Establecimiento de mapas conceptuales**
- Utilización de software de geometría dinámica
- **Descomposición y recomposición de figuras**
- Interpretación geométrica

37

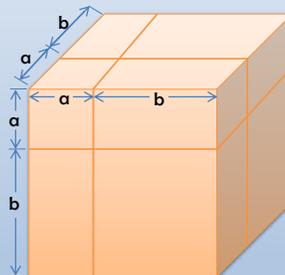
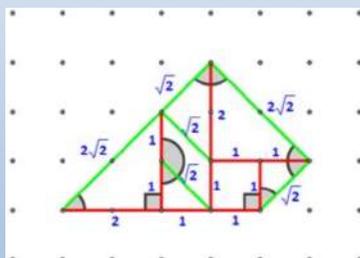
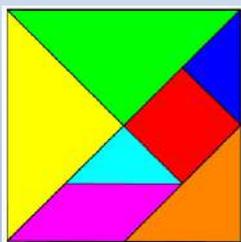
Manipulación de objetos espaciales



38

Juego con figuras geométricas

TANGRAM



$$(a + b)^3 =$$

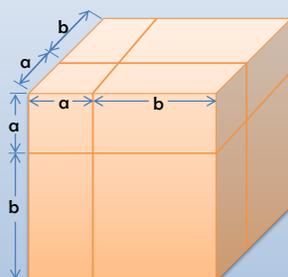


Nives Baranovic, *Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti*, Simpozijum Matematika I Primene, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2016, Vol. VII(1).

39

Desarrollo de la actividad

2. La siguiente figura representa el rompecabezas dado que tiene forma de cubo, con una longitud de cada uno de sus lados $a + b$, y un volumen representado por la expresión: $(a + b)^3$



$$(a + b)^3 =$$

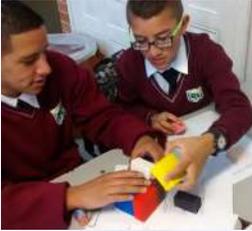
- Determine el volumen de cada figura que compone el cubo principal.
- Teniendo en cuenta los valores obtenidos del volumen de cada figura, complete la ecuación algebraica.

40

Respuesta de los estudiantes

a. Determine el volumen de cada figura que compone el cubo principal.

$Cr = a^3$ $RA = b^2 \times a$ $CA = b^3$
 $Rc = b \times a^2$ $Rr = b^2 \times a$
 $RB = b \times a^2$ $Rv = b^2 \times a$
 $RN = b \times a^2$



b. Teniendo en cuenta los valores obtenidos del volumen de cada figura, complete la ecuación algebraica.

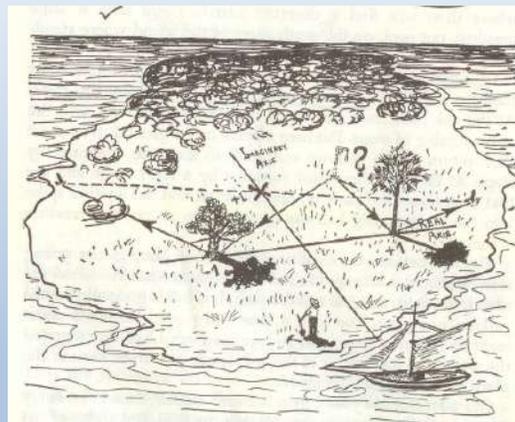
$(a + b)^3 = a^3 + 3 b \times a^2 + 3 b^2 \times a + b^3$

41

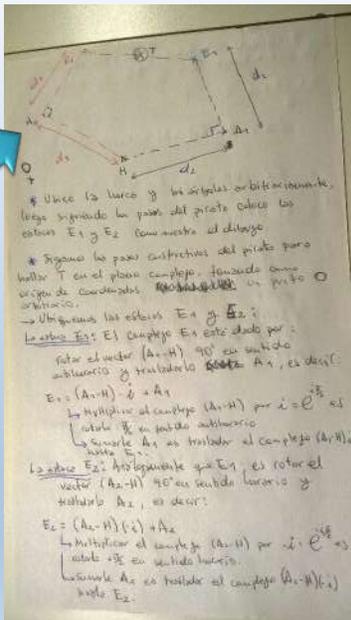
Construcción de una figura de análisis



George Gamow
(1904-1968)



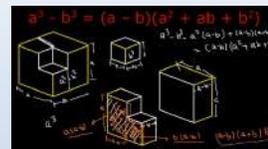
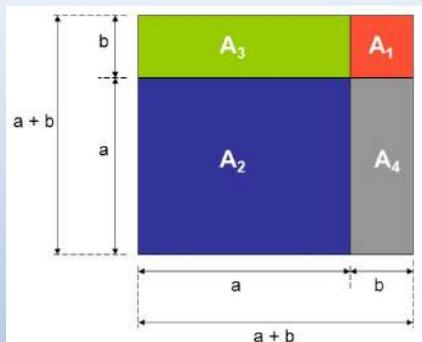
One, two, three, infinity. Facts and Speculations of Science. Oxford University Press, 1947.



$E_1 = (A_1 - H) \cdot i = A_1$
 Multiplicar al complejo $(A_1 - H)$ por $i = e^{i\pi/2}$ al rotar 90° en sentido antihorario.
 La imagen A_1 es trasladar al complejo $(A_1 - H)$ sobre E_1 .
 La imagen E_2 : Análogamente que E_1 , es rotar el vector $(A_2 - H)$ 90° en sentido horario y trasladarlo A_2 , es decir:
 $E_2 = (A_2 - H) \cdot (-i) + A_2$
 Multiplicar al complejo $(A_2 - H)$ por $-i = e^{-i\pi/2}$ al rotar 90° en sentido horario.
 La imagen A_2 es trasladar al complejo $(A_2 - H) \cdot (-i)$ sobre E_2 .

42

Descomposición y recomposición de figuras



a. Determine el área de cada figura que compone el cuadrado principal

$$a \times b \quad a \times b \quad a^2 \quad b^2$$

b. Teniendo en cuenta los valores obtenidos del área de cada figura, complete la identidad algebraica.

$$(a+b)^2 = 2a \times b + a^2 + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

¿Pruebas sin palabras?

45

Interpretación geométrica

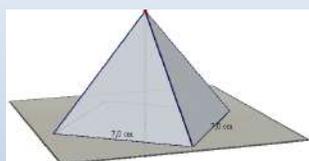


Figura A

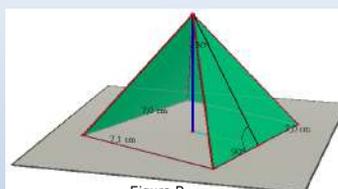


Figura B

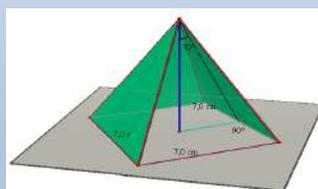


Figura C

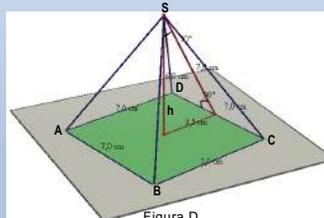


Figura D

46

Procesos cognitivos asociados



Raymond Duval
(1937-)

- **Construcción** (diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos)
- **Razonamiento** (relacionado con procesos discursivos)
- **Visualización** (permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas)

Duval, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, Vol. 10, pp. 5-53.

47

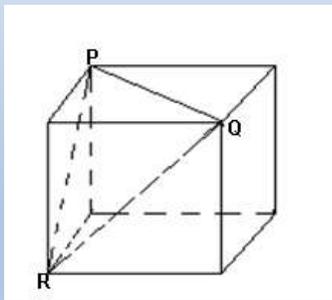
¿Cómo construir el pensamiento geométrico espacial?

48



49

En el cubo, PQ, QR y RP son diagonales de tres caras vecinas, como se muestra en la figura. ¿Qué amplitud mide el ángulo PQR?



50

Al someter el cubo de la figura A a un determinado movimiento, el mismo queda en la posición que se indica en la figura B. Señale en la figura B la posición en que se encontrará la arista marcada con III, conocida la posición en que se encuentran las aristas marcada con II.

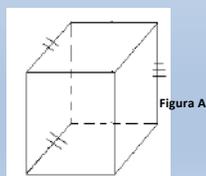


Figura A

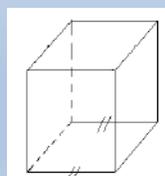
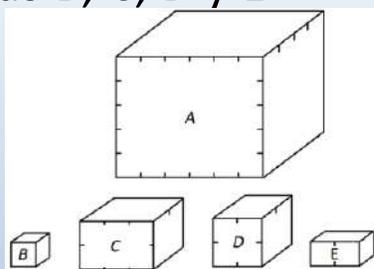


Figura B

51

5. En la caja A cuyas dimensiones se marcan en sus aristas se desea empacar cajas B, C, D y E respectivamente.



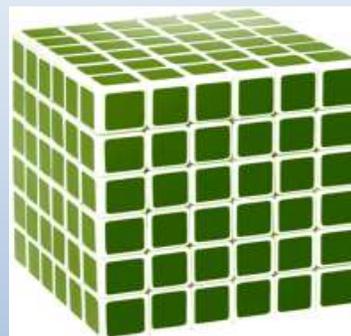
- Numera la cantidad máxima de cajas B, C, D Y E que caben cada una de ellas en la caja A.
- Numera la cantidad de cajas necesarias para llenar la caja A con combinaciones de C y D, de C y E y de D y E.

52

Un problema para el desarrollo del pensamiento geométrico

El cubo que se muestra a continuación está construido en capas por fichas de diferentes colores. Como puede verse, el exterior está compuesto por fichas **verdes**. En el interior hay un cubo compuesto por fichas **azules** y al interior del azul hay un cubo compuesto por fichas **rojas**.

- ¿Cuántas fichas hay de cada color?
- Si se abriera un hueco de 2×2 fichas en cada cara que atravesara el cubo de lado a lado, cuántas fichas **verdes** permanecerían en el sólido? ¿Cuántas **azules**? ¿Cuántas **rojas**?

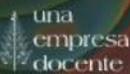


Compuesto por Wilson Bello en su tesis de maestría, UAN, 2014.

53



 COLCIENCIAS



Foro EMAD 2019

Investigación e innovación en Educación Matemática

Fecha: 4 de octubre de 2019

Hora: 7:30 a. m. a 1:30 p. m.

Lugar: Universidad de los Andes, Bogotá

INCIDENCIA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL EN LA ESCUELA

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez; Diana Carolina Pérez Duarte; Luis Fernando Pérez Duarte, Beatriz Avelina Villarraga Vaquero



54