

UN ITINERARIO DE INVESTIGACIÓN ALREDEDOR DE LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

A RESEARCH ITINERARY AROUND THE DEVELOPMENT OF SIMULATORS WITH GEOGEBRA

Juan Luis Prieto G., Stephanie Díaz-Urdaneta

Asociación Aprender en Red (Venezuela); Universidad del Zulia (Venezuela);

Universidade Federal do Paraná (Brasil)

juanl.prietog@gmail.com; stephaniediazurdaneta@gmail.com

Resumen

Desde el año 2013, nuestro grupo de investigación en Venezuela viene promoviendo la elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) como una actividad educativa no convencional desarrollada en los clubes GeoGebra con el propósito de facilitar el aprendizaje geométrico en ambientes dinámicos. Para comprender las implicaciones de la ESG en el proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene lugar en los clubes ha sido necesario emprender una serie de investigaciones relacionadas con esta actividad, centradas en una variedad de aspectos que son analizadas desde diferentes perspectivas teóricas. En su conjunto, estas investigaciones conforman un itinerario de investigación que describimos sucintamente en esta comunicación, destacando aquellos trabajos que nos han permitido responder a las inquietudes de investigación surgidas a raíz de la implementación de esta actividad en los clubes GeoGebra.

Palabras clave: simuladores con software dinámico, elaboración de simuladores, geometría, geogebra

Abstract

Since 2013, our research group in Venezuela has been promoting the development of simulators with GeoGebra (DSG) as an unconventional educational activity developed in GeoGebra clubs with the purpose of facilitating geometric learning in dynamic environments. To understand the implications of the DSG in the teaching and learning process that takes place in the clubs, it has been necessary to undertake a series of investigations related to this activity, focused on a variety of aspects that are analyzed from different theoretical perspectives. As a whole, these investigations make up a research itinerary that we describe succinctly in this report, highlighting those works that have allowed us to respond to research concerns arose from the implementation of this activity in GeoGebra clubs.

Key words: dynamical software simulators, development of simulators, geometry, geogebra

■ Introducción

La elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) es una actividad no convencional que busca promover aprendizaje matemático en un ambiente que combina el uso de tecnologías digitales, la comprensión responsable de teoría geométrica y la modelación matemática (Prieto, 2017). Esta actividad es promovida por el *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* desde el año 2013, a través de la conformación de los denominados “Clubes GeoGebra”, espacios a través de los cuales la actividad de ESG busca romper con aquellas prácticas matemáticas escolares basadas en la memorización de fórmulas, algoritmos y hechos discretos, dentro de las cuales los alumnos se limitan a observar, copiar y reproducir las “explicaciones” del profesor. El potencial educativo de esta actividad ha sido reconocido dentro y fuera de Venezuela. Prueba de ello es el premio EDUTEC otorgado a los Clubes GeoGebra en 2016, al ser este proyecto una de las tres innovaciones educativas con TIC más representativas de Iberoamérica en ese año.

Básicamente, elaborar un simulador con GeoGebra consiste en producir modelos computacionales representativos de las formas, dimensiones y movimientos de fenómenos naturales y/o artificiales, elegidos por los propios alumnos (Prieto y Gutiérrez, 2015, 2016, 2017). Si bien la ESG puede ser interesante por su relación con los simuladores computacionales, la realidad y el software GeoGebra, es importante reconocer que estas cuestiones por sí solas no garantizan aprendizaje matemático en los alumnos, lo que hace necesario contar con evidencias que nos aporten una comprensión al respecto. La clave de esta comprensión parece estar del lado de un uso responsable del GeoGebra como artefacto que media el saber geométrico y el conocimiento de la realidad.

Como el propósito de comprender las implicaciones de la ESG en el aprendizaje geométrico de los alumnos que participan en los clubes GeoGebra y en los modos de enseñar de los promotores (profesores de matemática) que acompañan estas experiencias, en los últimos años nos hemos dedicado a estudiar esta actividad, revelándose en nuestras acciones cierto “itinerario de investigación”. En este sentido, el objetivo del presente trabajo es describir dicho itinerario, partiendo de un conjunto de preguntas centrales que han guiado cada tramo de investigación recorrido.

■ ¿En qué medida la matemática escolar interviene en la ESG?

Para saber si la matemática escolar tiene presencia en las experiencias de ESG, realizamos varios trabajos que describen el modo en que determinados saberes matemáticos emergen en la actividad para guiar las reflexiones y acciones de profesores y alumnos en situación de elaboración. Por ejemplo, Rubio, Prieto y Ortiz (2016) dan a conocer el modo en que ellos han representado con GeoGebra una situación real vinculada con el movimiento en caída libre. En su descripción, los autores definen las *tareas de simulación* que organizan la elaboración del simulador y explican cómo ciertas ideas matemáticas (p. ej., función lineal, cuadrática y trigonométrica, relación ángulo central-arco que subtiende) orientaban sus reflexiones y acciones en la dirección de producir el simulador correspondiente con el software.

Otro ejemplo lo encontramos en Reyes y Prieto (2016). En este trabajo, los autores dan cuenta del modo en que dos alumnas de un club GeoGebra recurren a diferentes interpretaciones de la fracción para establecer un procedimiento de construcción de un cuadrado a partir de uno de sus vértices, teniendo como referente la altura de la grúa torre que servía de fenómeno para las jóvenes. En las conclusiones, los autores refieren que el concepto de fracción se hizo presente cuando las alumnas intentaban localizar los vértices desconocidos del rectángulo. Las interpretaciones de este concepto que fueron evocadas en la actividad fueron las de parte-todo, reparto y operador.

Otros trabajos que muestran la presencia de las matemáticas en la resolución de las tareas de simulación son los siguientes:

- Castillo y Prieto (2016): se describe la manera en que fue posible relacionar la idea de ecuación cuadrática con las acciones de representación del movimiento parabólico, en la elaboración de un simulador del tiro libre en el fútbol soccer.
- Díaz y Rubio (2016): las autoras dan cuenta del modo en que usaron la expresión matemática vinculada al movimiento rectilíneo uniforme para obtener la representación de dicho movimiento en una escena de carreras de automóviles.
- Gutiérrez y Fernández (2016): se describe el uso que hacen los autores de la ecuación asociada al movimiento del péndulo simple, para obtener una representación de este movimiento recreando una escena de una niña meciéndose en un columpio.
- Sánchez-S. y Sánchez-N. (2016): se reporta cómo la ecuación matemática asociada a la fuerza eléctrica sirvió para recrear un modelo (el simulador) de energía bajo la Ley de Coulomb.

Más recientemente, Díaz-Urdaneta (2017) caracteriza el conocimiento geométrico puesto de manifiesto en diferentes experiencias de ESG. Particularmente, la autora describe varias formas de construir un rectángulo por alumnos de distintos clubes GeoGebra, a partir de los elementos que estos consideraban durante la construcción. En este sentido, se hace una clasificación de las tareas de construcción que subyacen en la actividad, develando así la teoría geométrica que sustentaba las construcciones de los jóvenes, la cual estaba relacionada con las características o propiedades del rectángulo.

■ ¿Cómo es la actividad matemática que ocurre en la ESG?

Para responder esta pregunta, decidimos centrar la atención en dos aspectos de la actividad matemática emergente: su estructura y forma de organización, y su relación con los fenómenos reales representados. En cuanto a lo primero, Sánchez-N. y Prieto (2017) se apoyan en noción de *praxeología matemática* propuesta por Chevallard para describir las componentes práctica y teórica que organizan el trabajo matemático dentro de las experiencias de ESG. En el ambiente de geometría dinámica característico de la ESG, los autores reportan tres componentes de las prácticas matemáticas de elaboración:

- *Tareas de construcción*: enunciados que demandan la construcción de determinada figura geométrica en la interfaz del GeoGebra. Este tipo de tareas son de naturaleza geométrica y se resuelven mediante el uso de las diferentes herramientas y funcionalidades dinámicas del software.
- *Técnicas de resolución*: procedimientos de construcción empleados para resolver alguna tarea de construcción.
- *Discursos tecnológicos*: razones que justifican las técnicas de construcción producidas por los alumnos.

Con respecto a lo segundo, Gutiérrez, Prieto y Ortiz (2017) asumen una perspectiva cognitiva de la modelación matemática para describir las relaciones entre las prácticas matemáticas y los fenómenos reales que intentan ser representados durante las experiencias de ESG. En este sentido, los autores se centran en los procesos de modelación por los que transitan un grupo de alumnos que producen un simulador. Mediante el análisis de este caso fue posible caracterizar dos de estos procesos, a saber, la matematización y trabajo matemático, fundamentales en las experiencias de modelación derivadas de la ESG:

- *Matematización*: proceso mediante el cual los alumnos cambian su interpretación del modelo real, para traducirlo en términos geométricos. Este proceso está influenciado tanto por el conocimiento matemático de los involucrados, como por las herramientas y funcionalidades del GeoGebra.

- *Trabajo matemático*: proceso mediante el cual se obtiene un dibujo dinámico que corresponde con el modelo matemático derivado de la matematización, y el cual es construido en la interfaz del software.

■ ¿Qué y cómo se aprende matemática durante la ESG?

Otro asunto que es tratado en nuestro itinerario tiene que ver con el aprendizaje matemático de los alumnos que producen simuladores en los clubes. Al respecto, realizamos dos trabajos de investigación, uno referido a la *experimentación* con GeoGebra y otro que destaca los procesos de *visualización*. En el primer caso, Sánchez-S. y Prieto (2017), usando ideas ofrecidas por el marco Humans-with-media (Borba y Villarreal, 2005), dan cuenta del modo en que unos profesores experimentan con GeoGebra durante la resolución de tareas de construcción geométrica que atienden a fenómenos de la realidad. En esta investigación, la experimentación con GeoGebra se entiende como aquel “proceso de creación y validación de conjeturas sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos constituyentes de un dibujo dinámico, apoyado en el “ensayo y error” y la exploración de construcciones auxiliares” (p. 41-42).

En Díaz y Prieto (2016) se presentan evidencias de los procesos de *visualización* que contribuyen a una *reorganización del conocimiento matemático* en torno a una experiencia concreta de ESG, las cuales son descritas a la luz de la teoría Humans-with-media antes citada. El análisis se realiza especialmente durante el momento de matematización por el que transitan unos alumnos del club GeoGebra. Apoyados en ideas de Hershkowitz (1990), Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Torregrosa (2002), los autores asumen una concepción de la visualización en la ESG como aquel proceso cognitivo a partir del cual se representa cierto fenómeno seleccionado por uno o varios alumnos, utilizando para ello conceptos matemáticos, en diferentes registros de representación y que son ampliadas o reorganizadas durante el desarrollo de la actividad.

■ ¿Qué otros conocimientos se ponen de manifiesto en la ESG?

En un primer momento de aplicación del proyecto Club GeoGebra, las experiencias de ESG nos mostraban que la producción de los simuladores estaba fundamentada en modelos geométricos. Sin embargo, evidencias posteriores nos han mostrado que durante estas experiencias surgen contenidos algebraicos que, a través de la representación gráfica de las expresiones y la manipulación de diferentes elementos de las expresiones algebraicas permiten la representación de alguna parte del fenómeno que se trate. Entre los casos que podemos destacar tenemos el de Contreras y Díaz (2015) quienes utilizaron la expresión $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$, para obtener una representación gráfica de esa función que representase una parte del simulador en cuestión, variando los parámetros asociados a la expresión. Otro caso es el de Faria (2016), quien se apoyó en un sistema de ecuaciones asociadas a la elipse para representar la órbita de la tierra alrededor del sol. Finalmente, en Bello (2017) se reporta como a través de la manipulación unas ecuaciones que modelan fenómenos físicos fue posible estimar la posición de la tierra en su órbita alrededor del sol en el momento de producirse el eclipse total de sol de 1998.

■ ¿Qué saberes son movilizados por los promotores del Club GeoGebra al gestionar las experiencias de ESG de sus alumnos?

El reconocimiento de la dificultad que enfrentan los alumnos para resolver ciertas tareas de construcción surgidas en las experiencias de ESG y para comunicar a otros las técnicas empleadas por ellos, nos ha mostrado que los promotores de los clubes, en condición de profesores de matemática, piensan y actúan de forma muy particular para ayudar a sus alumnos a trascender estas dificultades y lograr el aprendizaje esperado. Estos indicios nos han hecho interesarnos en los saberes de los profesores que tienen a su cargo los clubes GeoGebra. En este sentido, Prieto y

Ortiz (en prensa) dan cuenta de tres saberes del trabajo matemático que siete promotores del proyecto Club GeoGebra fueron capaces de identificar sobre una escena de comunicación de una técnica producida en un club y registrada en formato de vídeo. Los saberes en cuestión son denominados: (i) saber cómo analizar la inconsistencia de una construcción, (ii) saber cómo comunicar una técnica de construcción y (iii) saber cómo anticipar una técnica. En sus conclusiones, estos autores afirman que los saberes del trabajo matemático antes mencionados están fuertemente arraigados en las experiencias de gestión de los promotores.

■ ¿Cuáles son los asuntos de interés actual?

Nuestra necesidad de ampliar nuestra mirada de la ESG para conocer y comprender mejor aquellos fenómenos de aprendizaje y enseñanza que no parecen tan evidentes, nos han llevado a explorar nuevos marcos interpretativos. En este sentido, la perspectiva sociocultural nos proporciona nuevas herramientas para interpretar lo que ocurre en el despliegue de la actividad de ESG, atendiendo aquellas cuestiones de interés para el proyecto que habían permanecido relegadas. Particularmente, nos apoyamos en la *Teoría de la Objetivación* propuesta por Radford (2006; 2014) para estudiar tanto el significado del aprendizaje geométrico dentro de las experiencias de ESG, desde una mirada histórico-cultural, como la ética comunitaria que es necesaria promover en la actividad para lograr un aprendizaje con las características antes develadas.

En este sentido, actualmente nos encontramos analizando datos que nos proporcionen evidencias de las formas de pensamiento geométrico y procesos de objetivación del saber geométrico que se producen en experiencias concretas de ESG, así como también de las formas de colaboración humana que coadyuvan al aprendizaje geométrico en estas experiencias y que constituyen una ética basada en la responsabilidad, el compromiso y el cuidado del otro. Otro fenómeno de interés para nuestro grupo tiene que ver con los saberes necesarios para que los profesores que tienen bajo su responsabilidad los clubes GeoGebra puedan gestionar eficientemente el proceso de trabajo matemático en el que trabajan junto a sus alumnos durante la ESG, de manera que puedan promoverse el aprendizaje geométrico de los jóvenes. Aunque el trabajo de Prieto y Ortiz (en prensa) es un avance al respecto, aún queda mucho por hacer para dar cuenta de la nueva ética detrás de la ESG.

Finalmente, un fenómeno que queda pendiente por trabajar tiene que ver con la formación de nuevos promotores que puedan integrarse al proyecto Club GeoGebra para garantizar su permanencia en el tiempo. Al respecto, nos interesa indagar sobre las características del diseño de esta formación tan particular (centrada en la enseñanza de la geometría en entornos dinámicos), como en el aprendizaje logrado por aquellos profesores que se incorporan a esta formación.

■ Reflexiones finales

En este trabajo hemos descrito sucintamente la manera en que hemos desarrollado un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra con el fin de comprender las implicaciones de esta actividad no convencional en el aprendizaje y enseñanza de la geometría (y otros contenidos matemáticos) de los profesores y alumnos que participan en estas experiencias. En este sentido, fueron descritos los estudios realizados en atención a las evidencias encontradas, destacando los siguientes hechos:

- el conocimiento matemático escolar interviene en la ESG, especialmente el conocimiento geométrico,
- la ESG es una actividad matemática con componente práctica y teórica, además que se produce en un ciclo de modelación que incluye procesos como la matematización y el trabajo matemático,
- durante su participación en las ESG, los alumnos producen modelos reales, matemáticos y computacionales para tratar de representar los fenómenos que ellos mismos seleccionan,

- el aprendizaje matemático que tiene lugar en las experiencias de ESG puede interpretarse en términos de capacidades para la experimentación con el software y la reorganización derivada de procesos de visualización,
- las experiencias de ESG demandan no solo de teoría geométrica, sino también de contenidos de otros dominios de la matemática, inclusive de otros campos científicos como la física, y
- en su trabajo con los alumnos, los profesores ponen de manifiesto un conjunto de saberes docentes relacionados con los problemas que se tienen para analizar técnicas inconsistentes, comunicar o anticipar una técnica.

En lo descrito hasta el momento, encontramos razones para creer que la elaboración de simuladores con GeoGebra es una actividad educativa no convencional que puede impactar favorablemente en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. A pesar de los avances en nuestros estudios, consideramos importante insistir con este tipo de trabajos para avanzar en nuestra comprensión de la actividad y la promoción del aprendizaje geométrico a través de esta. Con todo lo mostrado se deja claro que el fomento de los clubes GeoGebra en nuestras escuelas es una gran oportunidad para trascender los procesos monótonos que han caracterizado la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

■ Referencias bibliográficas

- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.
- Bello, Y. (2017). La posición de la Tierra en el eclipse total de sol del año 1998 en el GeoGebra. En: J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 198-204). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Castillo, L. A. y Prieto, J. L. (2016). Simulador de movimiento parabólico con GeoGebra. Aprendiendo matemática y física con el fútbol soccer. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 135-155). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Contreras, F. y Díaz, S. (2015). Elementos de la M16 y la matemática. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 127-133). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Díaz, S. y Prieto, J. L. (2016). Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. En Y. Serres, A. Martínez, M. Inojosa y N. Gómez (Eds.), *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 445-453). Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT.
- Díaz, S. y Rubio, L. (2016). Movimiento rectilíneo uniforme con GeoGebra. Un simulador para la enseñanza de la Física. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 156-168). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Díaz-Urdaneta, S. (2017). Construcción de rectángulos con GeoGebra. Formas de instanciación de un mismo saber matemático. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 253-270). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Faria, R. (2016). Movimiento planetario en el sistema solar desde una perspectiva tridimensional. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 85-98). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Gutiérrez, R. y Hernández, M. F. (2016). Simulación de fenómenos físicos con GeoGebra. Una oportunidad de aprendizaje mediada por tecnologías digitales. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 224-240). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, 29(2), 37-68.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95.

- Prieto, J. L. (2017). *Proyectos de simulación con GeoGebra: una estrategia del desarrollo del pensamiento científico desde el servicio comunitario*. Trabajo de ascenso, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia, Maracaibo.
- Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2017). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Prieto, J. L. y Ortiz, J. (en prensa). Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, n. especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103–129.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [On the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Reyes, J. y Prieto, J. L. (2016). Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra. *Revista Educación y Humanismo*, 18(30), 42-56.
- Rubio, L., Prieto, J., & Ortiz, J. (2015). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation*, 2, 90-111.
- Sánchez-S., I. y Prieto, J. L. (2017). El uso experimental del GeoGebra en un contexto de formación docente en matemática. En Rosas, A. M. (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Tecnología para la educación. No. 4* (pp. 38-51). Ciudad de México: Lectorum.
- Sánchez-N., I. y Prieto, J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 96, 97–101.
- Sánchez-S., I. y Sánchez-N., I. (2016). Un ambiente de aprendizaje matemático en la elaboración del simulador "Ley de Coulomb" con GeoGebra. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 209-223). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Torregrosa, G. (2002). *Visualización y aprendizaje de la Geometría*. Universidad de Alicante, España.