Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

DIVERSAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES

DIFFERENT INTERPRETATIONS OF FRACTION

Yaneth Josefina Ríos García
Universidad del Zulia. Facultad de Humanidades y Educación. (Venezuela)
yanriosgarcia@gmail.com

Resumen

En la formación del docente juega un papel importante considerar los contextos para la enseñanza de los contenidos matemáticos pues como lo afirman Skovsmose y Valero (2007), la Matemática es una herramienta de transformación de la realidad. Partiendo de esta premisa se diseñó este taller para los participantes con dos propósitos: identificar contextos propicios para la interpretación de las fracciones en sus diferentes formas, y establecer diferencias y relaciones entre las diversas interpretaciones del concepto de fracción. La metodología aplicada fue la resolución de problemas donde se manifestaron las seis interpretaciones de las fracciones: parte todo, cociente o división indicada (reparto), razón, operador, medida y conteo. Los participantes manifestaron dificultades en identificar algunas interpretaciones así como las relaciones entre ellas.

Palabras clave: interpretaciones, fracción, formación de docentes

Abstract

In teacher training plays an important role to consider the contexts for the teaching of mathematical contents, as stated by Skovsmose and Valero (2007), Mathematics is a tool for transforming reality. Based on this premise, this workshop was designed for the participants with two purposes: to identify propitious contexts for the interpretation of the fractions in their different forms, and to establish differences and relationships between the different interpretations of the fraction concept. The methodology applied was the resolution of problems where the six interpretations of the fractions were manifested: part all, quotient or division indicated (distribution), ratio, measurement and counting. Participants expressed difficulties in identifying some interpretations as well as the relationships between them.

Key words: interpretations, fraction, teacher training

Introducción

En este taller consideramos que la enseñanza de cualquier contenido matemático debe partir de situaciones de contexto (reales), incluyendo las fracciones. En este sentido nos apegamos a la Educación Matemática Realista la cual parte del supuesto que la Matemática es un organizador que permite comprender la realidad (Puig, 1997); por otro lado, desde la Matemática Crítica se afirma que la Matemática es una herramienta de transformación de la realidad (Skovsmose y Valero, 2007).

Muchos investigadores consideran que los fenómenos (esencia de lo que se describe en la situación real), asociados a un concepto matemático, deben ser extraídos de la vida cotidiana, por lo que deben estar asociados al campo experiencial de los alumnos. En este sentido ¿cómo puede asegurarse que determinadas experiencias son usuales para determinadas personas y para otras no? Por ejemplo, si un alumno tiene claro el concepto de reparto (división equitativa) en los números naturales, le será fácil entender la noción de fracción como reparto; en este caso el concepto el concepto referido ya forma parte del campo experiencial de este alumno.

La situación descrita anteriormente tiene implicaciones didácticas. En este sentido, las interpretaciones o significados o nociones de un concepto matemático se definen en función del contexto donde se emplea el concepto del fenómeno al cual hace referencia. El uso adecuado de las interpretaciones tiene implicaciones en la enseñanza, pues para lograr desarrollar los procesos cognitivos y aumentar la capacidad cognitiva, es determinante que se exhiban una variedad de significados del mismo concepto. Las diversas interpretaciones de un concepto matemático cualquiera se complementa, y muestran diversos aspectos de él con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros.

La fracción es un concepto que cumple lo descrito anteriormente, pues su significado depende del contexto en el cual se manifieste. Debido a esto, se producen obstáculos en su enseñanza y aprendizaje, asociados estos a las diversas nociones que se manifiestan en los diversos contextos donde se aplica este concepto. Así pues, en este taller se presentaron y reflexionamos sobre seis fenómenos e interpretaciones asociados a la fracción, los cuales se denominan: parte todo, cociente o división indicada (reparto), razón, operador, conteo y medida.

Es importante que los aprendices conozcan las diferentes interpretaciones o nociones asociadas al concepto de fracción, pues esto les ayudará resolver problemas que requieran de este conocimiento. Pero no es suficiente con que las conozcan, también es importante que las relacionen pues esto permite una mayor comprensión del concepto de fracción (Llinares y Sánchez, 2000).

El estudio en este taller de los significados de la fracción se complementó con un repaso de algunos conceptos claves para el desarrollo del tema, entre ellos, los elementos de una fracción, lo referido a cómo se escriben y se leen las fracciones, los tipos de totalidades que pueden fraccionarse y los tipos de fracciones.

Fundamentos teóricos

En la Matemática tenemos algunos conceptos matemáticos que son preservados en las Matemáticas Escolares y otros son transformados. El concepto de fracción entra en el segundo rubro, pues en el universo Matemático, el concepto asociado a la fracción es el número racional y en el mundo de las Matemáticas Escolares el concepto asociado al número racional es la fracción. Estas relacionales las explica Freudenthal (1983) a través de la fenomenología de un concepto matemático que, según él, la constituye los fenómenos para los cuales dicho concepto es un medio de representación y organización. En este sentido, la fracción es el recurso fenomenológico del número racional.

La fracción está asociada a múltiples significados, por ejemplo la concepción que se maneja al repartir tres pizzas en partes iguales, entre cuatro amigos, es diferente a la de predecir la probabilidad de que llueva en tres días conociendo el record de lluvia de los últimos cuatro días (suponiendo que llovió en tres días de los cuatro); asímismo usar nueve huevos de un cartón de una docena es muy diferente a cortar los tres cuartos de una torta; o usar 0,75 metros de tela para hacer un short es diferente a establecer que la altura de un objeto es ¾ la altura de otro objeto. Como podemos observar, estos significados varían en función de los contextos en los cuales se encuentra inmersa la fracción; estas nociones nos permiten hacer una organización y clasificación de los contextos en los cuales se aplica la fracción. La reunión de estas clases de contextos constituye los fenómenos asociados al número racional.

En este sentido Freudenthal (1983) nos plantea que todo docente debe hacer el estudio de los fenómenos asociados a cualquier concepto o estructura matemática, a lo que denomina análisis fenomenológico, lo que define como la descripción de los fenómenos asociados a los conceptos matemáticos, así como la relación que existe entre ellos (Puig, 1997; Segovia y Rico, 2001).

Esta diversidad de significados asociados a cualquier concepto matemático implica problemas en su aprendizaje y por ende, en su enseñanza. Mancera (1992) al respecto hace un estudio de las diversas interpretaciones, significados o concepciones que ha tenido el concepto de fracción a lo largo del tiempo; estas se exponen a continuación:

a) Dienes (1972) considera dos concepciones: estados de comparación y como operador.
b) Kieren (1976) refiere las concepciones de cociente (numeración decimal) y razones de enteros. El mismo autor en 1981 redefine su clasificación y establece cuatro subconstructos: medida (relación parte – todo), razón, división indicada y operador.
c) Rasimba–Rajón (1982) estudia métodos de medidas: conmensuración y fraccionamiento.
d) Behr, Lesh, Post y Silver (1983) establecen siete subconstructos: medida, razón, tasa, cociente, coordenada lineal, decimal y operador.
e) Freudenthal (1983) realiza las siguientes interpretaciones: operador, parte todo, razón externa, razón interna, medida no exacta, operador inverso de la multiplicación y decimal.
f) Ohlsson (1988) considera las siguientes: razón, partición y operador o función.
g) Mancera (1992) establece los siguientes significados con diferentes subcontructos: cociente o parte todo (partición, extracción, disminución y cociente cartesiano); números racionales (fracción y medida); vectores binarios (razón, cantidades intensivas, proporción y rapidez); y funciones compuestas (operador).
h) Linares (2000) refiere las nociones de parte todo, medida, cociente, razón y operador asociadas a la fracción.

En este taller se consideraron seis interpretaciones (Ríos 2001, 2008, 2010). A continuación, se explicará cada una:

Interpretación de la fracción como parte todo (la más usual).

La fracción bajo esta interpretación hace referencia a la relación entre un número determinado de partes, y todas las partes congruentes en que ha sido dividida la unidad. Pudiéramos decir también que la fracción es una parte del todo.

Interpretación de la fracción como cociente o división indicada (reparto)

Esta noción hace referencia a repartir algo en partes equitativas, donde el resultado del reparto no es entero. En este sentido existen dos tipos de respuestas ante situaciones de reparto equitativo asociadas a la división de números enteras: aquellas donde el *cociente* o resultado de la división puede ser expresado como número decimal (por ejemplo: repartir 4 metros de tela para hacer 5 shorts; se utiliza para cada short 0,75 ó ¾ m de tela); y las respuestas donde el cociente no puede ser expresado como número decimal sino como una fracción (por ejemplo, al repartir 3 barras de chocolate entre cuatro niños a cada uno le toca ¾ de una barra de chocolate). A esta última noción la llamaremos *división indicada.*

Interpretación de la fracción como razón

Según Andonegui (2006), toda razón expresa la relación (comparación) entre las cantidades de una misma magnitud o de magnitudes diferentes. La razón permite comparar totalidades diferentes (la razón entre los miembros de dos secciones de un colegio es de 20:25 ó 25:20), partes diferentes de una misma totalidad (la razón entre mujeres y hombres en una reunión es de 2:3), partes con totalidades (en una reunión la cantidad de mujeres representan los 2/5 de la cantidad de personas) y totalidades con partes (la razón entre la cantidad de personas y los hombres es de 5:2). Cuando se compara una parte con la totalidad estaremos en presencia de la fracción; en los otros tres casos estaremos refiriéndonos a una razón cualquiera. En los ejemplos colocados, el segundo es la fracción.

Interpretación de la fracción como operador

La fracción puede ser interpretada como el orden de ejecución de dos operaciones sobre una totalidad discreta (Bernard, 1972). Nos referimos a la multiplicación y la división, y dependiendo del orden en que se apliquen las dos operaciones, se tienen dos procedimientos. Si primero aplicamos la división y luego la multiplicación, podemos determinar los ¾ de 20 como se indica en la tabla 1:

Tabla N° 1: Secuencia división – multiplicación asociada a la noción de operador

$\mathbf{20}$	$\xrightarrow{\div \mathbf{4}}$	$\mathbf{20 \div 4 = 5}$	$\xrightarrow{\times \mathbf{3}}$	$\mathbf{3 \times 5 = 15}$
Estado inicial	Operación de división	Estado intermedio	Operación de multiplicación	Estado final
↓	↓	↓	↓	↓
$\boldsymbol{Y}$	Operación intermedia	$\boldsymbol{Y \div 4}$	Operación final	$\boldsymbol{3 \times (Y \div 4)}$

Fuente: la autora

Ahora bien, si se aplica primero la multiplicación y luego la división, tenemos el siguiente esquema mostrado en la tabla 2

Tabla N° 2: Secuencia multiplicación - división asociada a la noción de operador

$\mathbf{20}$	$\xrightarrow{\times \mathbf{3}}$	$\mathbf{20 \times 3 = 60}$	$\xrightarrow{\div \mathbf{4}}$	$\mathbf{60 \div 4 = 15}$
Estado inicial	Operación de división	Estado intermedio	Operación de multiplicación	Estado final
↓	↓	↓	↓	↓
$\boldsymbol{Y}$	Operación intermedia	$\boldsymbol{Y \times 3}$	Operación final	$\boldsymbol{(3 \times Y) \div 4}$

Fuente: la autora

Interpretación de la fracción como conteo

El proceso de contar una determinada cantidad de objetos consiste en establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los objetos y cada número natural, empezando por el número uno y continuando con los sucesores; la cantidad de objetos contados viene determinada por el último número natural que se asigne. La fracción, en estos términos, puede ser entendida como el número que resulta de contar una determinada cantidad de partes congruentes de una o varias totalidades.

Así, por ejemplo, el $\frac{4}{3}$ puede ser entendido como cinco veces un tercio. En referencia a este conteo, Andonegui (2006) expresa que las fracciones son las que denotan tantas veces la unidad fraccionada.

Interpretación de la fracción como medida

El proceso de medir algo consiste en determinar cuántas veces y/o qué cantidad de partes de una unidad patrón está contenida en lo que se desea medir. La fracción en este caso permite establecer exactamente las partes de la unidad patrón contenidas en lo que se mide.

Desarrollo

Este taller estuvo dirigido a cualquier docente en ejercicio que trabajase con sus alumnos las fracciones. En este sentido, algunos de los participantes manifestaron su interés de colaborar en este taller por dos razones: algunos son docentes en ejercicio, de primaria y secundaria, que ven con preocupación las dificultades y obstáculos que presentan sus alumnos a la hora de aprender los contenidos asociados a las fracciones; y otros docentes están realizando sus estudios de cuarto nivel, por lo que vieron en este taller la oportunidad de obtener insumos para sus trabajos de investigación.

La metodología aplicada en este taller fue la reflexión sobre las soluciones de diversos problemas matemáticos presentados y discusiones guiadas para la construcción de definiciones asociadas a las diversas interpretaciones de las fracciones.

A los participantes se les presentaron seis problemas para que los resolvieran; posteriormente algunos plantearon sus soluciones y mediante las discusiones guiadas se caracterizaron las interpretaciones de las fracciones aplicadas en cada solución, y luego se estableció un consenso para definir cada interpretación. Estos fueron los problemas presentados:

1. Una pizza fue dividida en cinco partes iguales, y me he comido 4 partes de las 5. Representa la situación gráficamente y numéricamente.
2. En un país se sabe que por cada cinco personas, tres son hombres. ¿Qué fracción representan los hombres de la totalidad? y ¿las mujeres?
    a. Si en el país hay un millón de habitantes, ¿Cuántos hombres y mujeres hay?
    b. Si en el país hay 630.000 hombres ¿cuántas mujeres hay?
    c. Representa las situaciones gráficamente y numéricamente.
3. Si una pared mide cuatro metros y otra mide cinco metros de altura. ¿Cuál es la medida de la primera pared con respecto a la segunda? y ¿cuál es la medida de la segunda pared con respecto a la primera? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
4. Se tienen cuatro metros de tela y con ellos se pueden hacer 5 shorts. ¿Cuántos metros de tela se utiliza para cada short? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
5. Se tienen cuatro pizzas y se quieren repartir entre cinco personas. Representa gráfica y numéricamente el proceso de repartición y lo que se comió cada quien.
6. Si mi sueldo es de $ 2.000 y en el mes he gastado los 4/5 de mi sueldo, ¿cuánto dinero he gastado? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
7. Para preparar una mezcla con sodio (Na), potasio (K) y cloro (Cl) un Químico ha dividido sus componentes en fracciones de decilitros (un litro equivale a 10 decilitros), de manera que, si la receta señala que se deben

agregar 3 decilitros de sodio; él cuenta mientras realiza esta acción: “un decilitro de Na”, “dos decilitros de Na”, “tres decilitros de Na”. Representa la situación gráficamente y numéricamente.

Respuestas de los participantes

Problema 1

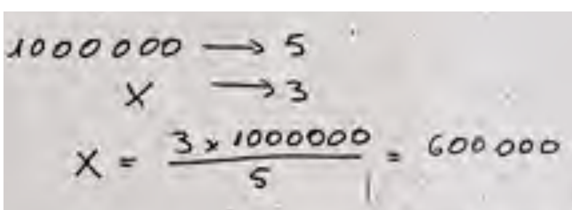
En el caso de las respuestas al primer problema, estas fueron uniformes, pues en todos los casos que se expusieron realizaron una representación gráfica utilizando una circunferencia o un rectángulo donde aplicaron la noción de *parte todo.* Estos resultados son coherentes con la revisión que realizaron Dickson et al. (1991) donde concluyeron que esta interpretación es la más sencilla y usual de todas.

Problema 2

Las respuestas para el segundo problema fueron más variadas. En la primera parte un docente manifiesta que la fracción de los hombres con respecto a la totalidad viene representada por la expresión 3:5. Al preguntarle por qué representa la fracción con los dos puntos manifiesta que eso es una *razón* y al preguntarles nuevamente si era una fracción, permaneció callado.

En este caso se presenta la dificultad de entender que se está hablando de una parte (los hombres) de la totalidad (5 personas); también otra dificultad es el tipo de totalidad que se trabaja en este problema, la cual es discreta (personas) en contraposición con la que se presenta en el primer problema que una unidad continua (la pizza). Como lo reseña Llinares y Sánchez (2000), la totalidad discreta permite asociar la noción de razón con la de operador, propiedad que fue utilizada en la solución de este problema en particular.

Para la segunda parte del problema donde se establece que la totalidad es de un millón de personas, dos docentes lo resolvieron por dos procedimientos: utilizando la regla de tres y utilizando la noción de operador, como se puede observar en las imágenes 1 y 2.



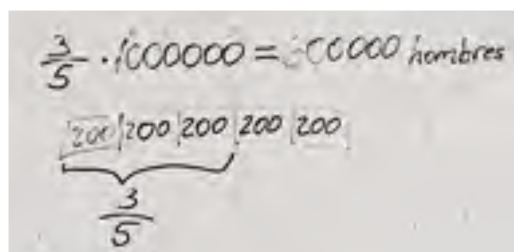


Imagen 1 y 2: Soluciones de la segunda parte del problema 2**.** Fuente: la autora

Al indagar por qué aplicaron la regla de tres y la noción de *operador***,** las justificaciones son algorítmicas; el primer docente explica que aplica la regla de tres porque falta un dato de tres que da el problema, y el segundo docente aplica el operador (primero dividiendo y luego multiplicando) pues debe determinar la fracción de un cantidad. Es curioso observar que el segundo docente a pesar de hacer una representación gráfica de la situación, no lo relacionó con el algoritmo que aplicó, donde la totalidad de un millón fue dividida en 5 partes iguales de las cuales toma 3 partes.

En el caso de la regla de tres, otro docente logró asociarla a las fracciones equivalentes, donde planteó la igualdad $\frac{3}{5} = \frac{x}{1000000}$ y explicó que el millón contiene 200.000 grupos de 5 personas cada uno, por lo que se debe multiplicar

200.000 por 3 para determinar la cantidad de hombres del país. Al preguntarles a los docentes cuál es la relación entre la regla de tres y la igualdad planteada por el último docente, no hubo respuesta. Esta relación fue difícil reconocerla, pues se debe involucrar otro concepto asociado a la *razón* como es el de proporcionalidad directa; este resultado es cónsono con el encontrado por Ríos (2008) donde los docentes en formación no establecen relaciones entre la regla de tres, razón y proporcionalidad directa, donde se concluye que hay obstáculos en establecer relaciones entre los contenidos procedimentales y conceptuales.

En la tercera parte del problema un docente aplicó la noción de *operador* confundiendo los elementos de la razón dada, donde la totalidad la entendió como la cantidad de hombres dados (parte de la totalidad) como dato del problema, como se observa en la imagen 3

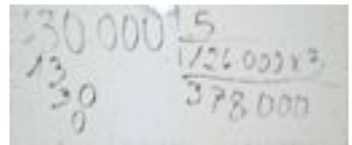


Imagen 3: Solución de la tercera parte del problema 2.
Fuente: la autora

Problema 3

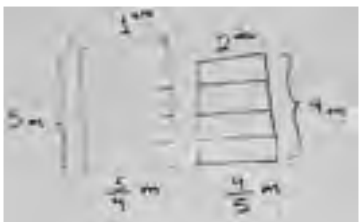


Imagen 4: Solución del problema 3.
Fuente: la autora

Un docente establece la respuesta correcta como se indica en la imagen 4 y reconoce que la noción aplicada es la de *medida*. Se le preguntó cuál es la unidad patrón utilizada en ambos caso. Para el caso de la segunda pared fue inmediata la explicación, no así la primera pared. Quizás la dificultad se debió a que la fracción era impropia, lo cual evidencia que la noción de parte todo es inadecuada para resolver esta parte del problema.

Problema 4
Un docente resolvió el problema utilizando la noción de *reparto* como se indica en la imagen 5.
Otro docente explica que esta forma de repartir es inadecuada pues una costurera no puede hacer cada short con retazos de tela pues se vería "muy feo", los pedazos de tela tendrían que coserse y quizás la tela no alcanzaría por los dobleces al coser los pedazos, además agrega que esta solución es apropiada para el problema 5; al preguntársele cómo sabe esto, el docente responde que sabe algo de costura.

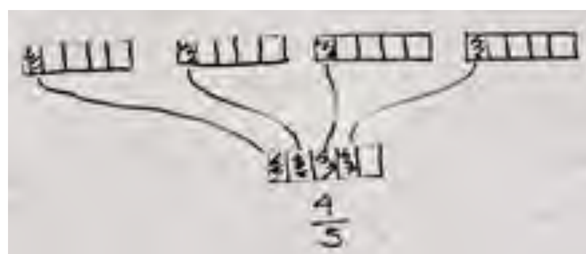


Imagen 5: Solución del problema 4***. Fuente:*** la autora

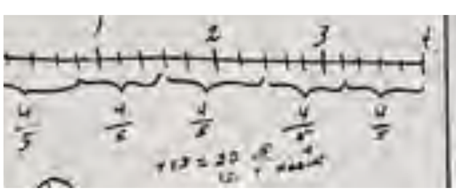


Imagen 6: Otra solución gráfica del problema 4.
Fuente: la autora

En este caso es interesante observar como las experiencias previas de los docentes en el ámbito personal contribuyen a determinar la respuesta adecuada.
El mismo docente realiza una representación asociada a la recta numérica, como podemos observar en la siguiente imagen 6.
El docente explica que cada metro de tela se divide en 5 partes, por lo que se tienen 20 partes en total y luego al hacer la división (reparto) entre los 5 short, cada short le corresponde los 4/5 metros de tela; en este caso el docente aplica la noción de *división indicada*. Otro docente complementa explicando que igualmente se puede usar la noción de *cociente*

considerando que cada metro tiene 100 centímetros, por lo que a cada short le corresponden 75 cm. Como se muestra en la imagen 7.

Se reflexionó con los docentes sobre las dos secuencias de las operaciones asociadas a la noción de *operador***.** En el problema 2 primero se dividió y luego se multiplicó, y en este problema se multiplicó y luego se dividió. En este sentido los docentes llegaron a la conclusión que el contexto es determinante para establecer la secuencia de las operaciones, situación que la Matemática considera equivalentes.

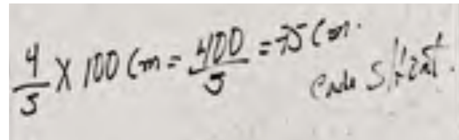


Imagen 7: Solución del problema 4 usando la noción de operador.
Fuente: la autora

Problema 5

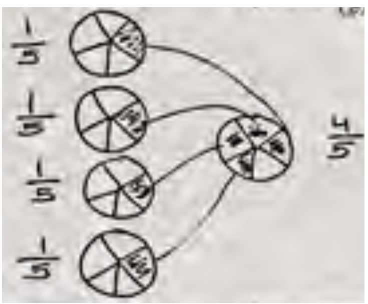


Imagen 8: Solución del problema 5.
Fuente: la autora

Un docente realiza la representación gráfica de la imagen 8. Como se puede observar se realiza una representación gráfica del *reparto* de la 4 pizzas. Se indagó sobre la diferencia entre este problema y el problema anterior. Los docentes concluyeron que en ambos casos se realiza un reparto, pero el resultado en un caso puede ser dado mediante una expresión decimal asociado a la noción de *cociente* y en el otro caso no, asociado a la noción de *división indicada.*

Problema 6

Un docente responde como se muestra en la imagen 9. Se observa que establece una relación entre la representación gráfica y la aritmética, donde la noción de *operador* permite interpretar la representación gráfica o esta última le da sentido a la interpretación de la fracción como operador. Al igual que en el problema 4 se hace hincapié en el orden de ejecución de las operaciones básicas; en este caso se realiza primero la división la cual permite establecer las partes equitativas en que se divide la unidad y luego se multiplica como lo indica el numerador. En esta oportunidad los docentes reflexionaron sobre los significados que tienen los elementos de fracción; como bien lo señalan Andonegui (2006) y Ríos (2010); el denominador etiqueta cada una de las partes divididas (en este caso son quintas partes) y el numerador las numera (son cuatro en este caso).

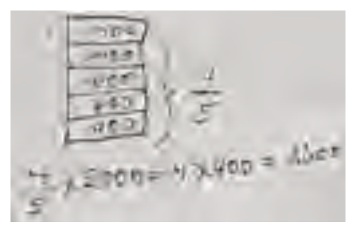


Imagen 9: Solución del problema 6.
Fuente: la autora

Problema 7

Imagen 10: Solución del problema 7- ***Fuente:*** la autora

Un docente resuelve el problema a través de la representación gráfica que se indica en la imagen 10 y al preguntarle que noción aplicó respondió que uso la interpretación de parte todo. Al respecto se le hizo la observación que en el problema se hace referencia a que el Químico ha fraccionado en decilitros el sodio de tal forma que cada decilitro puede ser contado, el docente manifestó no entender el planteamiento. El facilitador explicó que el Químico separó cada decilitro en diferentes envases, lo que permite contar cada uno; el docente realiza otra representación la cual se muestra en la imagen 11, donde se observa el conteo de los 3 decilitros. Al respecto, los elementos de la fracción permiten entender la noción de conteo como señalan Andonegui (2006) y Ríos (2010), donde el numerador permite en este caso contar, al igual que lo hacen los números naturales, objetos; en nuestro caso se cuentan partes de la totalidad, donde las partes son definidas por el denominador de la fracción.

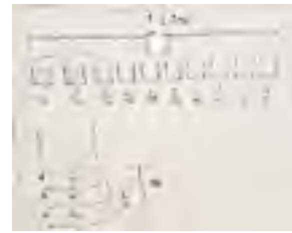


Imagen 11: Solución 2 del problema 7.
Fuente: la autora

Conclusiones

En el taller se pudo observar que los docentes aplicaron todas las interpretaciones de la fracción en la resolución de problemas. En algunas oportunidades se evidenció que ellos establecieron relaciones entre ellas de forma natural, como apoya Llinares y Sánchez (2000); esto se pudo distinguir específicamente en las relaciones entre las nociones de parte todo y operador, donde utilizando las representaciones gráficas sobre unidades discretas lograron comprender que la secuencia división – multiplicación, permite primero dividir en partes iguales la totalidad discreta y luego seleccionar a través de la multiplicación algunas de estas partes.

En el caso de los problemas con las unidades discretas (problemas 2 y 6), la interpretación utilizada en primera instancia fue la de operador, posteriormente se observó que en el problema 2 la solución podía asociarse a la razón utilizando el concepto de proporcionalidad directa. Los problemas 4 y 5 les sirvieron de puente para distinguir dos constructos asociados a la noción de reparto, estos son el cociente y la división indicada. El problema 6 les permitió a los docentes reafirmar la noción de medida y su relación con la fracción; y a través del problema 9 lograron repasar la noción de conteo y su relación con la fracción.

En el cierre del taller los docentes concluyeron que cuando se trabaje con las fracciones ellos deben hacer hincapié en el uso de las totalidades continuas y discretas pues a su parecer ambas totalidades permiten descubrir propiedades diferentes de la noción de fracción. Esto es apoyado por los resultado de Piaget (1960) y Payne (1976, ambos autores citados por Llinares y Sánchez (2000), donde se explica que ambas totalidades permiten establecer propiedades de estas en cuanto a la cantidad, cualidad y relación de las partes con el todo, propiedades que permiten estudios posteriores relacionados con las fracciones como lo son la equivalencia, el orden y las operaciones.

Los tipos de totalidades también, como lo manifestaron los docentes, pueden servir de puente para relacionar las diferentes interpretaciones de las fracciones y pudieran orientar el trabajo en aula de las mismas. En este sentido, la unidad continua permite trabajar las nociones de parte todo, reparto, medida y conteo; por ejemplo, como se observó en el problema 4 que permitió trabajar las interpretaciones de parte todo, reparto y medida simultáneamente. Por otro lado, la totalidad discreta permite trabajar las nociones de razón y operador; por ejemplo, en el problema 2 se trabajaron ambas nociones.

Otra conclusión obtenida por los participantes se refirió al uso de las diversas representaciones externas (oral, gráfica, aritmética, simbólica) en los procesos de enseñanza aprendizaje de las fracciones, donde a su parecer ayudan el paso de situaciones concretas a niveles más formales. Esto es apoyado por Ríos (2008 y 2010) donde las representaciones gráficas de la fracción permiten justificar varios algoritmos asociados a la fracción, logrando así su comprensión. En el mismo orden de ideas, esta conclusión es apoyada por unos de los principios de la Matemática Realista denominado principio de los niveles donde, a través de la matematización vertical, el aprendiz puede transitar por los diferentes niveles de aprendizaje acotados por Gravemeijer (2002, citado por Bressan, 2004) pasando del conocimiento de una situación concreta a la construcción de modelos que le permitan hacer abstracciones mediante los procesos de reflexión y generalización usando para ello la diversidad de notaciones convencionales. Por otro lado, las diversas representaciones externas, como lo señala Ríos (2010), son mediadoras entre la situación empírica y el conocimiento matemático, lo que se asocia con los procesos de modelación matemática por parte del aprendiz.

Asímismo, el uso de varias representaciones externas asociadas a un mismo concepto por un lado, contribuye al desarrollo de las competencias comunicativas del que aprende (Andonegui, 2006; Castro y Castro, 1997; Ríos, 2008) y por otro lado, interviene en la creación y comprensión de los conceptos matemáticos; esto último se debe a que las representaciones externas se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros (Blázquez y Ortega, 2001).

Referencias

Andonegui, M. (2006). Fracciones: concepto y representación. Serie: *Desarrollo del pensamiento matemático.* Número 6. Caracas: Fe y Alegría. Recuperado de http://publicaciones.caf.com/media/1209/61.pdf

Bernard, C. (1972). *Las fracciones*. Madrid: Editorial Teide.

Bressan A., Zolkower B. y Gallego M. (2004). I parte: La educación Matemática realista. Principios en que se sustenta. *Memorias de la Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Blázquez S. y Ortega T. (2001). Sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Relime. Volumen 4. Número 3*. Noviembre. pp: 100-120

Castro E. y Castro E (1997). Representaciones y Modelización. En M. Socas (Ed). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 95-124). Barcelona: Horsori.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Editorial Labor S.A.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomelology of Mathematical Structures.* The Netherlands: D Reidel Publishing Company.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (2000). Las fracciones. *Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Número 4.* Madrid. Editorial Síntesis.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática, 4*(2), pp. 30-54. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-4.pdf

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En M. Socas (Ed). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 61-94). Barcelona: Horsori.

Ríos, Y. (2001). *Algunos tópicos sobre la enseñanza de las fracciones*. Trabajo de ascenso para optar a la categoría de agregado. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Ríos, Y (2008). *Las fracciones: sus representaciones externas e interpretaciones*. Tesis Doctoral. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Ríos, Y (2010). *Los organizadores didácticos asociados a las fracciones.* Trabajo de ascenso para optar a la categoría de titular. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Segovia I. y Rico L. (2001). “Unidades didácticas. Organizadores”. En Castro, E. (Editor) *Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. España.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2007). Educación Matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En J. Jiménez, J. Díaz–Palomar y M. Civil (Coords.). *Educación Matemática y exclusión*. Editorial Graó. Barcelona.