

TAWA PUKLLAY - LA ARITMÉTICA INCA DE RECONOCIMIENTO DE FORMAS Y MOVIMIENTOS OPERABLE EN PARALELO Y QUE NO REQUIERE CÁLCULOS NUMÉRICOS MENTALES

TAWA PUKLLAY - THE INCA ARITHMETIC BASED ON SHAPES AND MOTIONS AND PARALLEL PROCEDURES WHICH DOES NOT NEED NUMERIC MENTAL CALCULATIONS

Carlos G. Saldívar Olazo, Alvaro J. Saldívar Olazo, Diego Goycochea Olazo
Asociación Yupanki (Perú)
dhavitprem@gmail.com, yachay@yupanainka.com, jikra_prem@hotmail.com

Resumen

El objetivo es demostrar la realización de operaciones aritméticas sin cálculos numéricos mentales, mediante el reconocimiento de patrones y movimientos del método Tawa Pukllay, con elementos monovalor o multivalor en la *Yupana* o calculador Inca. Antecedentes: Desde los primeros años del siglo XX se realizan los primeros intentos de decodificación de la *Yupana*, desde entonces se tienen cerca de 15 métodos propuestos, todos ellos de alguna manera basados en la lógica indo-arábiga, lo cual no coincide con las crónicas en las que se describe un tipo de lógica distinta (Prem, 2018). Resultados: Se ha logrado sistematizar un conjunto de movimientos optimizados que permiten desarrollar las operaciones aritméticas desde una óptica lúdica, estratégica, de simplificación y máxima optimización, que permite además una computación natural en paralelo. Conclusiones: Es posible realizar las operaciones aritméticas basadas en una lógica de reconocimiento de patrones y movimientos, en paralelo y sin cálculo mental numérico de la forma tradicional o indo-arábiga.

Palabras clave: tawa pukllay, yupana y quipu, matemática inca, computación paralela, ábaco

Abstract

The objective is to demonstrate the performance of arithmetic operations without mental numerical calculations, through the recognition of patterns and movements of the Tawa Pukllay method, with monovalent or multivalued elements in the *Yupana* or Inca calculator. Antecedents: From the first years of the XX century the first attempts for decoding the *Yupana* appeared, since then, there are about 15 proposed methods, all of them somehow based on the Indo-Arab logic, which does not coincide with the chronicles in which a different type of logic is described (Prem, 2018). Results: It has been possible to systematize a set of optimized movements that allow the performance of arithmetic operations from a playful, strategic, simplification logic and optimization perspective, which also allows natural parallel computing. Conclusions: It is possible to perform arithmetic operations based on a logic of recognition of patterns and movements, in parallel, and without using numerical mental calculation as the traditional or Indo-Arab form does.

Key words: tawa pukllay, yupana and quipu, Inca mathematics, parallel computing, abacus

■ Introducción

Yupana es el nombre con el que se conoce a una estructura que utilizaban los incas en tableros para realizar sus cálculos mediante piedrecitas u otros materiales como granos de maíz y frejoles (Radicati, 1990, p. 219), existen relatos de que incluso eran dibujados en la tierra; la yupana trabajaba en conjunto con el quipu, que es un sistema donde luego se registraban los datos (Pereyra, 1990, p. 235) mediante el uso de nudos hechos en cuerdas de algodón o fibra animal. Aunque este nombre es un neologismo, describe perfectamente su funcionamiento, pues en idioma quechua, etimológicamente viene de la raíz “yupay” (contar) y el sufijo “-na” (lo que sirve para), es decir yupana significa “lo que sirve para contar” o simplemente *calculadora* (Prem, 2016, p. 15). Existen varios tipos de herramientas encontradas a los que se les ha denominado yupana, no obstante, el estudio actual está referido al modelo de yupana dibujado por Guaman Poma de Ayala.



Fig 1. “Curaca Condorchaua” por Guaman Poma de Ayala

“Desde inicios del Siglo XX se realizaron los primeros estudios de investigación sobre el posible manejo de la yupana, surgiendo diversas propuestas de decodificación y manejo de la misma. Así, se tienen por lo menos una quincena de dichas hipótesis de diferentes autores y de las más variadas formas de interpretación.” (Prem, 2018, p.13). Todas las hipótesis sobre el posible manejo de la yupana inca difieren entre unas y otras, principalmente en los siguientes aspectos:

- a. Uso de la yupana en forma vertical u horizontal
- b. La disposición de puntos en los casilleros del dibujo y sus posibles valores asignados.
- c. El uso de dichos puntos como elementos de posicionamiento de fichas y/o siendo tomados solamente valores referenciales
- d. El algoritmo para cada tipo de operación

Respecto a estos puntos, el presente estudio propone: a) uso de la yupana en posición vertical, manteniendo el sentido en el que se encuentra el dibujo original, b) y c) se toma los puntos como indicadores de los valores referenciales de cada casillero donde se encuentran y no como punto posicionales d) se proponen cuatro algoritmos, uno por cada operación aritmética básica, todos basados en 5 movimientos básicos, sus respectivos movimientos inversos y movimientos avanzados - que son abstracciones de los movimientos básicos para operar mayores cantidades de fichas ahorrando el número de movimientos - y sin necesidad de emplear cálculo numérico mental del tipo tradicional o indo-arábigo.

■ Marco teórico

Dada la variedad de propuestas para el uso de la yupana que emplean la lógica y procedimiento indo-arábigo y tomando en cuenta el relato del cronista José de Acosta que describe un tipo desconocido de operación, el presente estudio se centra en una hipótesis que considera una percepción diferente al momento de realizar las operaciones, encontrándose coincidencias con dicho relato “...tomarán estos indios sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí trocarán tres de acullá y en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente y sin errar un tilde y mucho mejor se saben ellos poner en cuenta y razón de lo que cabe a cada uno de pagar o dar que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado...” (Acosta, 1592, p. 190)

No obstante, y debido a que un estudio de esta naturaleza requiere otros tipos de validación desde la perspectiva de las ciencias sociales, el punto focal del presente estudio es la demostración de un nuevo método y sus posibilidades de aplicación matemática.

El sistema numérico en el que se basa el presente estudio es la base diez, debido a su clara presencia en la lingüística quechua y aimara. Así también, el punto de partida de este método al que llamo “Tawa Pukllay”¹, es la escritura propuesta por Hugo Pereyra Sánchez quien menciona “los modelos que hemos analizado tienen en común la concepción decimal que se expresa por las posiciones de las filas. Esta concordancia está plenamente justificada porque existen numerosos testimonios acerca del conocimiento y uso de la numeración decimal en la civilización inca. Entre dichos testimonios hay uno particularmente preciso, referente a los quipus, pero que resulta totalmente concordante con la decimalidad y el valor posicional según un eje vertical, el cual pertenece a Garcilaso” (Pereyra, 1990, p. 246) “En lo más alto de los hilos ponían el número mayor, que era el decena de millar, y más abajo el millar, y así hasta la unidad.” (Garcilaso, 1959, p. 307).

Considerando la correlación entre la yupana como medio de cálculo y el quipu como medio de registro de resultados de cantidades calculadas, se asume una escritura y lectura en igual sentido, esto es de arriba hacia abajo, considerando cada fila como una potencia del diez, empezando en la fila diez mil “hunu”, continuando hacia abajo con la de los mil “waranqa”, luego la fila de centenas “pachaq”, las decenas “chunka” y las unidades “-yoq/-niyoq”

El presente estudio propone que las cuatro operaciones, que corresponden al desarrollo de esquemas lúdicos, provienen del “yupay” o arte-ciencia del contar; donde la suma “yapay” es el contar agrupando; la resta “t’aqay” es el contar separando uno o más grupos, por lo que se puede realizar restas de varios minuendos y varios sustraendos de una sola vez y sin necesidad de agrupar u operarlos parcialmente; la multiplicación “miray” es el contar por grupos sin necesidad de recurrir a memorizar tablas de multiplicar y la división “rakiy” es el proceso de contar repartiendo por grupos y de manera equitativa, que se realiza sin necesidad de tanteos ni memoria de tablas de factores.

■ Metodología

Se empleó el estudio de documentos y la experimentación empírica, mediante pruebas de operación en el tablero empleando distintos tipos de escritura e ingeniería reversa.

Valores de las fichas en la yupana y escritura de números

Los valores asignados a la yupana siguen el esquema de la siguiente matriz:

← 10000 (HUNU)
← 1000 (WARANQA)
← 100 (PACHAQ)
← 10 (CHUNKA)
← 1 (YOQ/NIYOQ)

Fig. 2.0 Estructura de valores de la yupana

Definimos dicha matriz formada por las filas F_{10000} , F_{1000} , F_{100} , F_{10} , F_1 y las columnas C_5 , C_3 , C_2 , C_1 . Cuando una semilla está en un casillero del tipo (F_i, C_j) , toma el valor $i \times j$.

Siendo la simplificación un aspecto clave en el presente método, la escritura se realiza con la menor cantidad de semillas por cada fila y un máximo de una semilla por cada casillero:

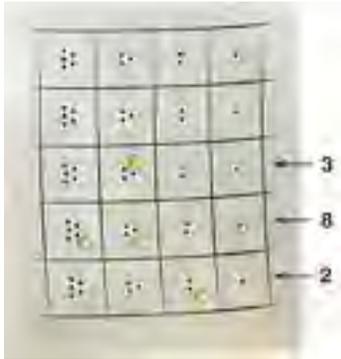


Fig. 3.0
Escritura del número 382

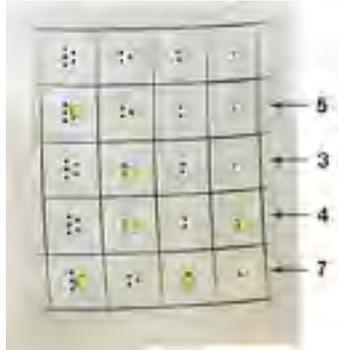


Fig. 4.0
Escritura del número 5347



Fig. 5.0
Escritura del número 97031

Deducción de los movimientos básicos

Al escribir más de un número en la yupana puede que las semillas que representan dichos números coincidan en uno o más casilleros. Tomando en cuenta que sólo puede haber una semilla por cada casillero, usualmente procederíamos a sumar los valores de las semillas coincidentes y representarlas en su forma simple u optimizada, es decir una semilla por cada casilla. Al realizar este tipo de simplificaciones veremos que los movimientos son repetitivos, patrones fácilmente reconocibles que, al ser cambiados en el proceso mental por frases nemotécnicas en vez de operaciones numéricas, facilitan y agilizan la simplificación:

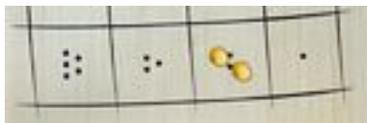


Fig. 6.0
Dos semillas de valor 2



Fig. 7.0
Representación del valor total 4

ISKAY (2 en quechua) Reemplazamos la frase “2 más 2 es igual a 4” por la frase “abrir corto” que implica abrir las semillas a los casilleros inmediatos de derecha e izquierda, tomando las semillas una con la mano derecha y otra con la izquierda y ejecutando el movimiento al mismo tiempo.

KIMSA (3 en quechua) “Abrir largo”, “hasta las casillas de los extremos”

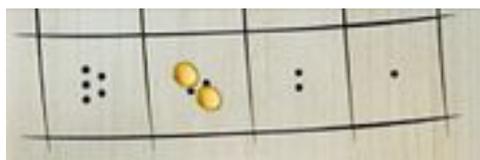


Fig. 8.0
Dos semillas de valor 3



Fig. 9.0
Representación del valor total 6

PISQA (5 en quechua) “Una semilla nace en la siguiente fila y la otra sale” ó “Paqarina”



Fig. 10.0
Dos semillas de valor 5



Fig. 11.0
Representación del valor total 10

KIKIN (“los equivalentes”) “2 en 1 = 1 en 2”; “3 en 1 = 1 en 3”; “5 en 1 = 1 en 5”

Esta casilla permite esas tres opciones dependiendo de la cantidad de semillas que tenga:



Fig. 12.0
Dos semillas de valor 1



Fig. 13.0
Una semilla de valor 2



Fig. 14.0
Tres semillas de valor 1



Fig. 15.0
una semilla de valor 3

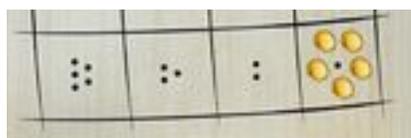


Fig. 16.0
Cinco semillas de valor 1

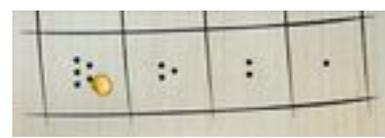


Fig. 17.0
Una semilla de valor 5

Ejecutando esos cuatro movimientos se garantiza obtener como resultado una semilla como máximo por cada casillero, sin embargo, no basta para hacer legible la respuesta final de una operación con varios dígitos ni para optimizar al máximo el número de semillas por cada fila, por lo que necesitamos un movimiento de simplificación final al que llamamos Pichana (barrido o escoba en quechua), el cual verifica que no queden simultáneamente en la misma fila una semilla en el casillero 1 y una semilla en el casillero 2, ni tampoco una semilla en el casillero 2 y otra en el casillero 3. En caso se encuentren dichas posiciones “la semilla de la derecha salta por encima de la otra y se retira la que no saltó”, así:

Pichana (1 y 2):



Fig. 18.0
Semillas en 1 y 2 en simultaneo

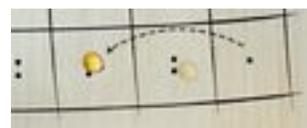


Fig. 19.0
Movimiento Pichana (1,2)

Pichana (2 y 3):



Fig. 20.0
Semillas en 2 y 3 en simultaneo

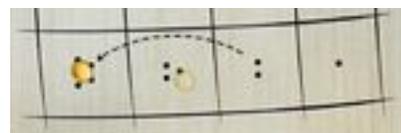


Fig. 21.0
Movimiento Pichana (2,3)

Deducción de los movimientos invertidos o movimientos de extensión

Al ser todos los movimientos antes vistos reemplazos del mismo valor por formas más simplificadas, podemos utilizar los mismos movimientos de manera inversa, esto es partiendo del estado final y regresando a la posición que los generó. Estos movimientos inversos, también conocidos como movimientos de extensión son útiles para operaciones como el t’aqay (resta) y el rakiy (división).

Yapay ó suma en paralelo

Para sumar $1782 + 2512$ colocamos ambas cantidades en el tablero, reconocemos los movimientos a realizar y los ejecutamos hasta que no quede ningún movimiento pendiente:

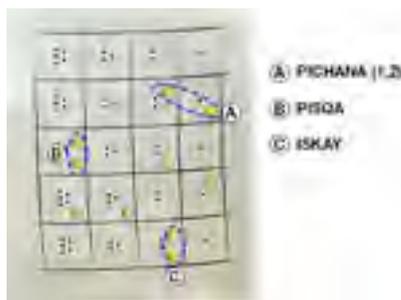


Fig. 22.0
Sumandos y estrategia



Fig. 23.0
Respuesta optimizada 4294

T'aqay o resta en paralelo que permite varios minuendos y varios sustraendos

Consideremos una cosecha de maíces de dos lugares $A=480$ y $B=538$, de los cuales se repartirá a tres destinos $X=150$, $Y=223$, $Z=35$. Para averiguar la cantidad restante, escribimos los minuendos con el mismo color de semilla y los sustraendos con otro color. Dos semillas de color distinto en una casilla se anulan. Usar movimientos inversos.



Fig. 24.0
Minuendos y sustraendos



Fig. 25.0
Simplificación parcial



Fig. 26.0
Respuesta optimizada 610

Miray o multiplicación en paralelo a través de sumas y/o restas, sin necesidad de tablas

La multiplicación es una secuencia de sumas consecutivas. Para dos factores M y N , se tiene que $M \times N$ es igual a la suma de N veces M o la suma de M veces N . Así si se considera 24×3 , ante ambas posibilidades, será más sencillo sumar 3 veces el número 24:

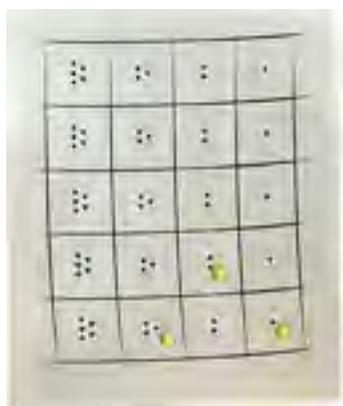


Fig. 27.0
Una vez el 24



Fig. 28.0
Dos veces el 24



Fig. 29.0
Tres veces el 24

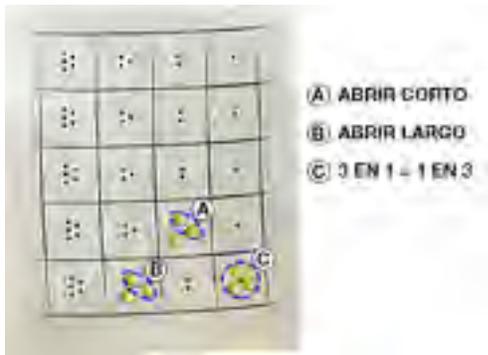


Fig. 30.0

Movimientos básicos en paralelo

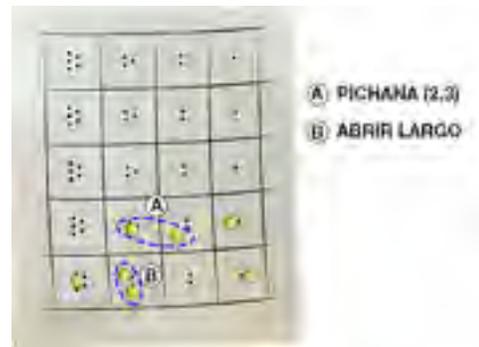


Fig. 31.0

Movimientos básicos en paralelo

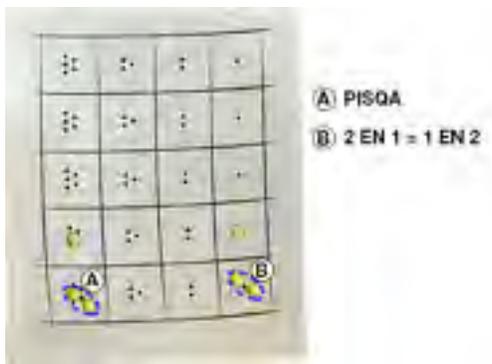


Fig. 32.0

Movimientos básicos en paralelo



Fig. 33.0

Simplificación 2 en 1=1 en 2



Fig. 34.0

Respuesta Optimizada=72

Si tuviera que darse muchas semillas, es factible recurrir al uso de restas: “9 x 5” es 9 veces 5, podemos dar 10 semillas al 5, colocando una semilla en el casillero de la fila inmediata superior y restándole una unidad con semilla de otro color.

Rakiy o división en paralelo sin tanteos ni necesidad de tablas

El Rakiy es un conteo de las veces que está contenido el divisor en el dividendo, lo cual puede ser determinado realizando una serie de restas continuas. Se deben hacer coincidir todas las semillas del divisor en los mismos casilleros con las semillas del dividendo, cada vez que esto se realiza, se toma nota aparte del Rakiy encontrado y se retiran del tablero las semillas del dividendo que acaban de ser restadas en grupo, se repite este procedimiento hasta que no queden semillas del dividendo o hasta que el valor que representan sea menor que el valor del divisor. El cociente será el número total de Rakiy encontrados y el residuo será el valor indicado por las semillas del dividendo que ya no pueden ser más distribuidas. Cuando hay residuo, las semillas de dicho residuo pueden ser subidas hacia la casilla inmediata superior - lo que equivale a multiplicarlas por diez - permitiendo continuar la operación para el cálculo de decimales. Consideremos 14 / 4:



Fig. 35.0
Rakiy=1



Fig. 36.0
1 en 2=2 en 1

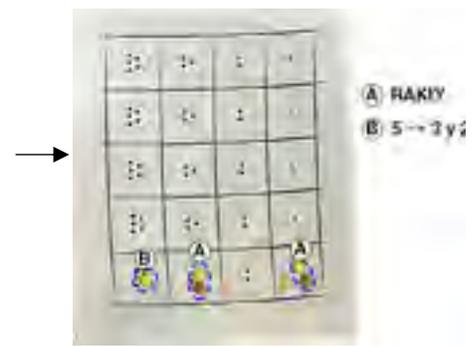


Fig. 37.0
Rakiy=2



Fig. 38.0
Rakiy = 3



Fig. 39.0
Respuesta =3 con residuo 2

■ Resultados

Todos los planteamientos aritméticos que se operan con este método producen resultados exactos y dependiendo del grado de habilidad de quien realice las operaciones, con mucha mayor rapidez que en la forma tradicional indo-arábica.

Al utilizar otro tipo de procesos mentales más intuitivos y que no requieren mayor uso de memoria ni cálculo numérico, se convierte en una herramienta de aprendizaje lúdico y concreto de la aritmética, con alto atractivo para personas de todas las edades y facilitando a personas con dificultad de aprendizaje. Actualmente están en estudio las implicancias cognitivas en poblaciones de educación regular y poblaciones con dificultad de aprendizaje.

Debido al uso de términos quechua y aimara, el requerimiento de uso de las dos manos al operar y el empleo de movimientos afines a algunas otras prácticas cotidianas andinas, *Tawa Pukllay* presenta un alto atractivo en estudiantes de zonas rurales, quienes la eligen con amplia preferencia entre otras herramientas de aprendizaje aritmético.

Las operaciones aritméticas pueden ser realizadas de manera paralela, esto es, aplicando movimientos de simplificación en varias casillas a la vez, lo que abre la posibilidad de tener varias personas realizando una misma operación en un mismo tablero, que llevado a términos de computación electrónica significa la posibilidad de una computación natural paralela.

■ Conclusiones

El presente estudio muestra que es posible operar la yupana o calculador inca mediante el reconocimiento de formas y movimientos, sin necesidad de cálculos numéricos mentales. Además de realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas, obteniendo la respuesta de la forma óptima respecto al número de fichas a utilizar, cuando se realiza la multiplicación como sumas continuas y la división como repartición sin tanteos basados solamente en la memoria, el estudiante comprende el procedimiento real de cada operación.

Es posible realizar movimientos avanzados que son una abstracción y composición de dos o más movimientos básicos y que permiten realizar las simplificaciones con mayor rapidez al mismo tiempo que evidencian una mayor posibilidad de creación de estrategias.

Las operaciones no siguen un orden estricto, ni tampoco es necesario llevar la cuenta de acarreo, lo que permite múltiples formas de simplificación y hasta realizar más de un movimiento en simultáneo, evidenciándose como método aritmético de cómputo paralelo.

■ Referencias bibliográficas

- Acosta, J (1592) *Historia Natural y Moral de las Indias*. Sevilla, España.
- Ansión, J. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos*. Lima, Perú: CONCYTEC.
- Burns, W. (2010). *El Mundo de los Amautas*. Lima, Perú: Universidad Alas Peruanas.
- Chirinos, A. (2010). *Quipus del Tahuantinsuyo. Curacas, Incas y su saber matemático en el siglo XVI*. Lima, Perú: Editorial Comentarios.
- De Pasquale, N. (2001). *Quipus.it* Recuperado de <http://www.quipus.it/>
- Freejutube (anónimo) (2013). *Evolving backwards*. Recuperado de <https://www.youtube.com/channel/UCYVIoptXU43ZJ4jqDwktYdA>
- Hernández, C. (2008). *Yupana Dinámica*. Recuperado de <https://es.slideshare.net/carloshdez/yupana-dinamica-491759>
- Moscovich, V. (2010). *El Khipu y la Yupana*. Lima, Perú.
- Pereyra, H. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos*. Lima, Perú: CONCYTEC
- Prem, D. (2016). *Yupana Inka – Decodificando la Matemática Inka*. Lima, Perú.
- Prem, D. (2018) *Hatun Yupana Qellqa*. Lima, Perú
- Radicati, C. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos*. Lima, Perú: CONCYTEC
- Ríos, J. (2013). *Pensamiento pedagógico Las matemáticas ancestrales y la yupana*. *Revista Tarea*, (pp.41-47)
Recuperado: http://tarea.org.pe/images/Tarea82_41_Jesus_Rios.pdf
- Rivas, R. (2013). *Tablero lúdico Yupana Kipu-ayuda*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=ZRf0QcKdDWk>
- Santo Tomás, D. (1560) *Lexicon*. Recuperado de <http://www.archive.org>
- Urton, Gary (1997). *The Social Life of Numbers*. USA, University of Texas Press
- Wassén, H. (1990). *Quipu y Yupana*. Lima, Perú: CONCYTEC