

CONSIDERACIONES INICIALES PARA EL ESTUDIO DE LA ANGULARIDAD COMO SABER TRANSVERSAL EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO

INITIAL CONSIDERATIONS FOR THE STUDY OF ANGULARITY AS A TRANSVERSAL KNOWLEDGE IN THE DEVELOPMENT OF TRIGONOMETRIC THINKING

Karen Sánchez Duarte, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
karen.sanchez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Se exponen los principales resultados de la revisión bibliográfica, identificando consideraciones preliminares para el estudio de la angularidad en el desarrollo del pensamiento Trigonométrico. Principalmente se encuentra el tratamiento de la trigonometría en la institucionalización del mismo conocimiento, relacionado a ello se identifican dificultades y fenómenos en el aprendizaje de las nociones de ángulo, trigonometría y el ángulo-trigonometría. De modo que permita responder, grosso modo, por qué surge el tema, cuál es la importancia de investigar al respecto y cuáles consideraciones son importantes al iniciar el estudio del desarrollo del pensamiento Trigonométrico. Permitiendo extraer elementos propicios para analizar el uso de la noción de ángulo en el desarrollo de este tipo particular de pensamiento matemático, para dar cuenta de su transversalidad, en etapas futuras de la investigación.

Palabras clave: pensamiento trigonométrico, noción de ángulo, dificultades, institucionalización

Abstract

Preliminary considerations for the study of angularity in the development of Trigonometric thinking are identified as the main results of bibliographic review. Mainly, we found the approach of trigonometry in the institutionalization of trigonometric knowledge. In this respect, difficulties and phenomena in the learning of the notions of angle, trigonometry and angle-trigonometry are identified. So that. it allows answering, roughly, why the subject arises, what is the importance of investigating about it and what considerations are important when starting the study of the development of Trigonometric thinking. It allows extracting elements conducive to analyze the use of the notion of angle in the development of this particular type of mathematical thought, to account for its transversal knowledge, in future stages of the research.

Key words: trigonometric thinking, notion of angle, difficulties, institutionalization

■ Introducción

Presentamos el inicio de un proyecto de investigación referente al pensamiento trigonométrico, en particular sobre la noción de ángulo inmerso en el desarrollo de este tipo particular de pensamiento matemático.

El interés por este tópico respectivo surge a partir de algunos cuestionamientos hechos en la experiencia como docente y como alumna, de la primera autora. Tradicionalmente los primeros cursos universitarios inician el estudio de la Trigonometría con el tratamiento de ángulos: su definición (por lo general, como la unión de dos rayos cuyo punto en común se llama vértice y los rayos lados del ángulo), los tipos de ángulo según su medida en grados (agudos, rectos, obtusos, llanos y convexos) o según su posición en el plano cartesiano (posición estándar, de referencia, coterminal y negativo), su conversión de grados a radianes mediante una fórmula; y lo trigonométrico comienza estrictamente hablando con la introducción de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, enfatizando en los rectángulo isósceles y del semiequilátero. Planteadas estas bases se continua con las razones en la circunferencia unitaria (ubicando las coordenadas del punto de intersección del lado final del ángulo en posición estándar y la circunferencia mediante el trazo de triángulo rectángulo) y, por último, se extiende a las funciones trigonométricas mediante el análisis de las gráficas, de donde se extrae lo periódico, lo acotado, la monotonía, etc.

Desde estas experiencias se percibió una desarticulación entre la definición de ángulo, dado al inicio para utilizarse en las razones que se establecen en el triángulo, y su uso imprescindible en las funciones trigonométricas, por ejemplo: se considera la medida angular en grados para las razones trigonométricas en los triángulos, pero en las funciones trigonométricas la medición angular se emplea en radianes; además se traslada de una noción de ángulo estático a una dinámica. Si bien la matemática escolar incorpora estrategias para la transición (fórmula de conversión de grados a radianes), de lo mencionado anteriormente, planteamos la desarticulación desde la postura de quien aprende, pues la sola fórmula no argumenta por qué es necesaria la conversión de grados a radianes.

A propósito de esta inquietud se inició una revisión bibliográfica para documentar los fenómenos y resultados de investigación relacionados, que nos permitan hacer un planteamiento de investigación y una prospectiva sobre cómo llevarlo a cabo. Esta primera parte de nuestro proyecto es lo que reportamos en el presente extenso.

■ Dificultades asociadas en el pensamiento trigonométrico

En la revisión de programas de estudio y libros de texto, del nivel medio superior mexicano, Buendía y Montiel (2015) reportan el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica, considerando que en la primera se aborda todo lo vinculado al estudio de las razones trigonométricas mediante los triángulos rectángulos, ángulo en grados y otras herramientas geométricas; y en la segunda todo lo relacionado con el estudio de las funciones trigonométricas, implicando las gráficas en el plano cartesiano, ángulos en radianes y otras herramientas de análisis.

En la transición de la trigonometría clásica a la analítica, según Buendía y Montiel (2015), se trabaja el círculo unitario como estrategia suficiente y necesaria para establecer: el significado de ángulos negativos y mayores a 360° , la conversión de las unidades de medida de grados a radianes o viceversa, la equivalencia entre radianes y reales, el estudio del dominio de las funciones trigonométricas y las características de lo periódico y acotado de las funciones de seno y coseno de un ángulo.

El tratamiento escolar tradicional que hay en el NMS del concepto de función trigonométrica se percibe como una extensión de la Trigonometría clásica, pues se parte de la definición de las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo para generalizarlas a funciones de x , para x definida en todos los reales. Hardy (1908) caracteriza esta transición como una “traducción del lenguaje geométrico al lenguaje del análisis”, al plantear un método geométrico para trabajar analíticamente las funciones trigonométricas (Buendía y Montiel, 2015, p.174).

Se observa que, comúnmente la equivalencia entre grados y radianes suele basarse en el argumento de conversión mediante una fórmula, más que en la explicitación de su necesidad en cada contexto y relación de los elementos implicados, probablemente porque la argumentación del uso del radián requiere del análisis matemático de la función, y para ello son necesarias herramientas matemáticas que el estudiante no ha trabajado: derivada e integral.

Otra situación que se señala en la Trigonometría escolar es que comúnmente “no hay distinción entre la naturaleza de los distintos objetos matemáticos en juego: razón, ecuación y función, trigonométricas” (Buendía y Montiel, 2015, p. 171). Esto se puede percibir en varios libros, estudiantes y profesores que manejan de manera indistinta los términos “razón” o “función” en la resolución de tareas trigonométricas, por ejemplo, se encuentran expresiones del tipo: $\text{sen} = 1$ (obviando el ángulo y la ambigüedad en el uso).

También, Montiel (2011) reporta la aritmetización de lo trigonométrico como un fenómeno presente en la Trigonometría escolar. La aritmetización ocurre cuando se introduce las razones trigonométricas dejando de lado el proceso geométrico. La investigación de Torres-Corrales (2014) contrarresta, en cierta medida, dicho fenómeno mediante la resignificación de la noción razón trigonométrica mediante una conciencia de uso coherente de otras nociones como es el ángulo, el radio, los arcos, los triángulos y los tópicos geométricos, a través de la circunferencia en situaciones-problemas. Resaltando para nuestro interés, el uso del ángulo y la medición angular para la resignificación de las razones trigonométricas.

De lo anterior, se desprende una serie de obstáculos y fenómenos didácticos implicados en el pensamiento Trigonométrico. A ellos lo denominamos dificultades asociadas en el pensamiento Trigonométrico, las cuales son: la función trigonométrica se percibe como una extensión de la trigonometría clásica, no existe distinción entre las funciones seno y coseno y las razones trigonométricas, y la aritmetización de lo Trigonométrico.

■ Dificultades asociadas al ángulo y la trigonometría

A propósito del cambio en la noción del ángulo y medida angular, necesario en la transición de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica, incluimos en la revisión bibliográfica las investigaciones que analizan al ángulo, tanto como concepto matemático como concepto escolar.

En un terreno matemático, Yeshurun (1982) identifica que, a través del tiempo, la definición de ángulo ha ido cambiando de forma y contenido. Por ejemplo, discute la definición proporcionada por Euclides: “A plane angle is the inclination to one another and do not lie in a straight line” (Yeshurun, 1982, p. 133), resaltando que no es claro el significado de inclinación, que existe diferenciación entre ángulo y medida del ángulo, y que la medida del ángulo se caracteriza por estar entre 0° y 90° (no incluyendo el borde).

Continúa con la definición brindada por Hilbert: “*by an angle is meant a point called the vertex of the angle two rays called the sides of the angle emanating from the point*” (Yeshurun, 1982, p.133), para resaltar que se amplía la medida del ángulo de 0° a 180° (considerando el borde) y que esta es la definición más enseñada en escuelas de todo el mundo. Cabe resaltar que en concordancia con el autor y la experiencia docente, esta noción de ángulo es la más empleada en la introducción de los conceptos básicos de Geometría y permanece durante el proceso educativo.

De ambas definiciones se observa el cambio de forma, al considerar elementos distintos en su construcción y contenido, al contemplar o no el borde y su variación en la amplitud de la medida angular. En esa dirección analiza varias definiciones, y realiza una síntesis con cinco tipos de definiciones de ángulo. A partir de ellas se puede identificar que comúnmente las empleadas en Trigonometría se caracterizan por: un tratamiento con el arco de un círculo o la medida del ángulo como la relación entre la longitud del arco y toda la circunferencia o entre áreas de

un sector y el área del círculo. Por otro lado, las utilizadas en Geometría se caracterizan por considerar: inclinación, unión de rayos, parte de un plano (determinado por dos rayos), rotación rígida de un rayo.

Yeshurun (1982) resalta que incluso la definición de tipo de rotación es limitada, pues trata de una rotación de una posición a otra sin hacer más de una rotación completa quedando limitada para ángulos de medida mayores a 360° o 2π radianes, y negativos. Por lo cual, los argumentos geométricos quedan limitados para Trigonometría. Además, señala que ninguna de las cinco definiciones permite que todos los números reales sean medidas de ángulo, siendo esto característico del dominio de las funciones trigonométricas.

Para solventar lo anterior, el autor propone introducir la noción de ángulo mediante la rotación, pero como parte de una experiencia física, en la cual la rotación de un rayo sea la preimagen y su resultado sea la imagen cuyo punto de rotación se llame vértice. De forma que obtiene sentido las medidas positivas (rotación dirección de las manecillas de reloj) o negativa (dirección anti horario) según su dirección, el dominio se extiende de -180° a 180° o $-\pi$ a π , y se agrega a la medida de un ángulo de rotación $x + 360^\circ k$ o $x + 2\pi k$ con k entero. Permitiendo transitar de lo concreto mediante fenómenos físicos a la abstracción.

Si bien investigadores, autores de textos y profesores reconocen y trabajan con esta diferencia, para los estudiantes no es explícita ni clara la divergencia entre las definiciones y cuándo es necesaria una u otra. Por ejemplo, en la investigación de Mesa y Goldstein (2016), en la que analizaron diez libros de texto, específicamente los temas de ángulo, función trigonométrica y función trigonométrica inversa, se identifica que el tratamiento del ángulo previo a las funciones trigonométricas no es incluido en tres textos, en cuatro libros solo proporcionan ejemplos, y en los otros lo definen según sus medidas y construcción. Los autores establecen que la definición de ángulo previo o en el tema de Trigonometría se presenta de dos maneras: 1. Referida al arco de la circunferencia con la intersección de dos rayos rotando, iniciando con su forma dinámica por la rotación y 2. El ángulo definido entre la relación de líneas, entre el espacio entre rayos dando como algo estático. Nuevamente, se evidencia diferencias entre las distintas nociones de ángulo, en este caso resaltando el carácter dinámico y estático del ángulo, pero no se argumenta su distinción en el uso según su contexto.

Otros estudios han reportado que el conocimiento fragmentado de la noción y medida del ángulo conduce a una comprensión desconectada de las funciones trigonométricas (Moore, 2009; 2013). Ya que se debe tener en consideración que a pesar de que se pueden introducir y emplear en distintos contextos las funciones trigonométricas, ellas poseen bases comunes, por ejemplo, Moore (2009) menciona la medida de ángulo como un común entre los contextos de la trigonometría en triángulos y la trigonometría en el círculo unitario.

Relacionado con la medida angular, en su investigación Akkoc (2008) menciona que los docentes saben convertir entre radián y grados, pero no pueden definir la relación de dos longitudes. Es decir, se tiene una comprensión poco profunda de lo que significa la medida radián. Moore (2013) identifica que los profesores en servicio poseen varias nociones para el radian, resaltando que: "Akkoc suggested that impoverished radian angle measure understandings likely contribute to teacher and student difficulties in trigonometry" (p. 226).

Recapitulando, se determinan algunas Dificultades asociadas al ángulo y la Trigonometría presentes en el discurso matemático escolar, las cuales son: la definición de ángulo tratada en Geometría es diferente a la tratada en Trigonometría; en Trigonometría se trabaja con el ángulo desde su función sin mencionar explícitamente qué es el ángulo y la poca comprensión de la medición angular obstaculiza la comprensión y tratamiento de las funciones trigonométricas.

■ Dificultades asociadas a la naturaleza del ángulo

En el terreno escolar y específico en la noción de ángulo, Mitchelmore y White (2000) fueron los primeros en reconocer la diversidad de definiciones que pueden encontrarse en los libros, acordes al contexto en el que serán utilizados con la adaptación que debe hacerse del concepto a diferentes estructuras matemáticas. Estos autores llaman a esta característica como la naturaleza multifacética del ángulo. A partir de esta naturaleza, Rotaeché y Montiel (2017) identifican y profundizan en la naturaleza polifacética del ángulo al considerar los distintos significados: cualidad (en su forma), cantidad (susceptible a ser medido) y relación (estar relacionado a otros elementos); y el carácter: dinámico y estático. Estos van a encontrar una relación con las definiciones y representaciones usadas para trabajar con el ángulo.

Del estudio de la naturaleza polifacética del ángulo se puede analizar algunas dificultades asociadas a la naturaleza de ángulo, por ejemplo, las dificultades recopiladas por Rotaeché y Montiel (2017): 1. Asumir que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida; 2. Reconocer ángulos de medida 0° , 180° y 360° ; y 3. Identificar al ángulo dentro de otras figuras. Estas dificultades podrían estar ligadas a los significados reconocidos por las autoras: con la cualidad, según su definición dado que implica rectas o rayos y su intersección o unión; con la cantidad, por la comprensión y el trabajo de los ángulos con esas medidas; y con la relación, al reconocer las características y propiedades del ángulo en conjunto o mediante otros elementos.

■ Hacia un planteamiento de investigación

Con base en la revisión bibliográfica, reconocemos que no se trata de un concepto fácil de comprender. Si a éstas añadimos las dificultades y fenómenos didácticos propios de la enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría, estamos frente a una problemática mayor, en la que insertamos nuestro objetivo de estudiar el uso del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, al transitar de las razones a las funciones. Por lo cual, es conveniente reflexionar acerca de las dificultades asociadas (ver tabla 1).

Dificultades asociadas a la naturaleza de ángulo	Dificultades asociadas al ángulo y la Trigonometría	Dificultades asociadas en el pensamiento Trigonométrico
Asumir que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida. (Rotaeché y Montiel, 2017)	La definición de ángulo tratada en general en Geometría es diferente a la empleada en Trigonometría. (Yeshurun, 1982; Mesa y Goldstein, 2016)	La función trigonométrica se estudia como extensión de la trigonometría clásica.
Reconocer ángulo de medida 0° , 180° , 360° (Rotaeché y Montiel, 2017) Tratamiento de ángulos con medidas negativas.	En los libros de trigonometría trabajan el ángulo desde su función sin mencionar explícitamente qué es el ángulo. (Yeshurun, 1982)	Al no hacer explícita la relación del radián y el real; en el discurso matemático escolar el estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función. (Buendía y Montiel, 2015)
Identificar al ángulo dentro de otras figuras. (Rotaeché y Montiel, 2017)	La poca comprensión de la medición angular inhibe la capacidad de construir interpretaciones flexibles de las funciones trigonométricas (Moore, 2013)	La aritmetización de lo Trigonométrico. (Montiel, 2011)

Tabla 1. Reporte de dificultades asociadas al ángulo y el desarrollo del pensamiento Trigonométrico.

Llevaremos a cabo nuestro estudio desde la Teoría Socioepistemológica a la Matemática Educativa (TSME), con el fin de identificar y analizar a la noción de ángulo desde sus usos y funcionalidad al transitar de las nociones propias de la trigonometría clásica a las propias de la trigonometría analítica. Es decir, se asumirá a priori como un saber transversal que debe tener un desarrollo de usos, a partir del sentido que de él demande una tarea. Esta postura, se basa en algunos planteamientos socioepistemológicos que en trigonometría ya han cambiado su enfoque de estudio: de los objetos a las prácticas.

Para ello, se parte de investigaciones como las de Buendía & Montiel (2013), quienes, en su planteamiento sobre la funcionalidad trigonométrica, identifican que la unidad de medida, en reales (no en radianes), emerge como necesaria para articular el problema físico con el lenguaje matemático que lo modela. En el estudio de la experimentación didáctica del planteamiento anterior, Beltrán & Montiel (2016), reportan que: "el uso de la unidad de medida (ángulo/radianes) es totalmente contextual" (p.76), refiriéndose a que en todo momento los estudiantes hablaron de la relación tiempo-distancia. De manera complementaria Torres-Corrales (2014) presenta mediante situaciones-problemas un manejo situacional de la medida angular mediante actividades experimentales, en el cual, se trabaja con la relación radio, ángulo y longitud de arco haciendo uso de la medición. Se evidencia la importancia de realizar más reflexiones referentes a la noción del ángulo y medición angular, pues de ello se puede generar marcos de referencias que permitan el análisis o construcción de diseños y el estudio en el desarrollo del pensamiento Trigonométrico desde la Socioepistemología.

■ Referencias bibliográficas

- Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857–878.
- Beltrán, M. P., & Montiel, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(3), 255–286.
- Buendía, G., & Montiel, G. (2015). Desarrollo del pensamiento Funcional-Trigonométrico. In G. Buendía, M. Ferrari, & G. Martínez (Eds.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169–205). Madrid, España: Díaz de Santos.
- Mesa, V., & Goldstein, B. (2016). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338–354.
- Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive. *Abstractiones and generalization. Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 209–238.
- Montiel, G. (2011). *Construcción del conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Madrid, España: Díaz de Santos.
- Moore, K. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. Document presented at Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, North Carolina State University, Estados Unidos. Recuperado de <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2009/proceedings.html>
- Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225–245.
- Rotaache, R.A., & Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1), 171–199.
- Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Sonora, Ciudad Obregón, México.
- Yeshurun, S. (1982). The angle: a logical gap in teaching geometry and trigonometry and its remedy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 13(2), 133–138.