Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ESTUDIO DE SIGNOS DEL CÁLCULO A TRAVÉS DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

STUDY OF SIGNS OF CALCULUS IN THE MATHEMATICAL WORKSPACE

Luis Sandoval Troncoso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
luis.sandoval@ufrontera.cl

Resumen
Se ha indagado con estudiantes de primer año universitario las dificultades de signos constituidos por otros signos como lo son sumatoria y límite, que son basales en los cursos de cálculo por su relación con los objetos matemáticos como las series, convergencias, integrales, etc. Las dificultades se han investigado desde el punto de vista semiótico de Peirce (1974) en cuanto al signo a través del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014) como marco teórico. Mediante un estudio de casos se ha detectado que ante la solicitud de calcular el valor de una sumatoria y un límite, los estudiantes ven, a las sumatorias y a los límites como un signo desarticulado, funcionando cada uno en forma separada.

Palabras clave: semiótica, sumatorias, límite

Abstract
We have investigated with university students the difficulties of signs constituted by other signs such as summation and limit, which are basal in the courses of calculation for their relationship with mathematical objects such as series, convergences, integrals, etc. The difficulties have been investigated from the semiotic point of view of Peirce (1974) regarding the sign through the Mathematical Workspace (Kuzniak y Richard, 2014) as a theoretical framework. Through a case study it has been detected that before the request to calculate the value of a sum and a limit, the students see, the summations and the limits as a disjointed sign, each functioning separately.

Key words: semiotic, summation, limit

Introducción

La evidencia empírica revela que a diario en el aula de matemática, son consideradas muchas maneras de representar objetos matemáticos en el discurso de los docentes al momento de efectuar su clase.

Estas maneras de representar podrían estar dadas por gráficos, esquemas, símbolos, dibujos, o bien digamos, signos en general, sin hacer distinciones entre uno u otro término. Sin embargo, en el estudio de la didáctica de la matemática, se hace hincapié en las diferencias que merecen las terminologías mencionadas anteriormente, de tal forma que al hablar de signos, símbolos, representaciones, no nos estamos refiriendo a sinónimos sino a cuestiones que, si bien es cierto están relacionadas, pero de acuerdo a la literatura son diferentes, y serán la base de nuestra posición para enfrentar la problemática que describiremos en lo posterior.

A través de los años, variadas investigaciones muestran el aporte que ha significado el estudio de los signos y las representaciones en diversas áreas, por ejemplo, en Arzarello y Sabena (2011), se indica el aporte del signo en cuanto a la argumentación en estudiantes universitarios por medio de signos que evocan objetos matemáticos como la derivada y las primitivas, así como también la relación entre sus gráficas. Por consiguiente, destacamos que dicha investigación nos motivó a realizar un estudio más profundo del signo desde el punto de vista de Peirce (1974), el cual hallamos pertinente por la clasificación que hace éste para el signo tanto para un "objeto" como para un "interpretante" (Peirce, 1974), lo cual permite un análisis detallado en cuanto a dificultades y errores presentes en los estudiantes a la hora de enfrentarse a actividades matemáticas propuestas por el docente.

Otros trabajos, con enfoques geométricos, específicamente en el cálculo de áreas, como en Codes y González (2017) por ejemplo, tratan en particular situaciones que involucran los problemas del "infinito potencial" e "infinito actual", lo cual se sabe que es un "obstáculo epistemológico" resistente y persistente (Mena-Lorca *et al*, 2015), cuestión que se evidencia en los estudiantes cuando calculan límites. Sin embargo, creemos que Codes y González (2017) en su propuesta, no resuelven el problema, y nuestra posición es que el abordaje semiótico desde el punto de vista de Peirce (1974), podría dar más pistas para tratarlo mejor.

Continuando con la idea de signos, destacan múltiples aportes de éstos en el aprendizaje de la matemática en niños que se enfrentan al álgebra. Así lo demuestran las investigaciones realizadas por Radford (2006, 2009), quién a través de la consideración de signos, poco habituales, pero muy interesantes de analizar, como los gestos, permiten a través del "sistema semiótico cultural" (Radford, 2006) una mejor comprensión del objeto matemático involucrado, sistema que está basado en la actividad del colectivo, a través de signos que involucran algo más profundo que la sola consideración de simbología matemática, como lo es el caso de las "narrativas" (Radford, 2009) consideradas como parte de la actividad matemática del sujeto. Esa narrativa del estudiante corresponde, por ejemplo, a un patrón que desea encontrar a partir de objetos concretos que son evocados del mundo real para describir el comportamiento de algún fenómeno que vive en la matemática.

Por otra parte, quien hace su aporte relevante en cuanto a signos, es también Sfard (2008), pues ella a través de su "teoría comognitiva" (unión de las palabras comunicación y cognición), permite que en el "discurso" (Sfard, 2008) en el aula salgan a la luz signos relacionados con el objeto matemático en cuestión a través de las "realizaciones" (Sfard, 2008). Éstas corresponden a múltiples actividades comunicativas que no sólo contempla lo representacional escrito, pues también es llevado a cabo lo gestual, lo verbal oral escrito, lo verbal oral hablado, lo concreto. Es por ello entonces que decimos que va más allá de lo representacional, en contraste a lo que propone Duval (2004) con las "representaciones semióticas".

Como hemos podido apreciar, los aportes de los signos son mucho más que la simple acción de hablar de símbolos y de escribirlos, más aún, la literatura lo ha constatado. Así pues, referirse a signos implica un estudio más acabado en cuanto a los objetos matemáticos de acuerdo con los intereses didácticos de cada investigador. De esta manera, como investigadores, es posible analizar didácticamente cómo es que comprenden objetos matemáticos los estudiantes por medio del estudio de una multiplicidad de signos que tenemos a disposición, e ir en beneficio del entendimiento de la matemática de manera más amena para el estudiante. Combinando, por ejemplo, la formalidad de la matemática con los recursos tecnológicos y la interpretación de los sujetos que aprenden, así como la gesticulación para indicar propiedades de un objeto, y el "discurso" (Sfard, 2008) que propicia dicha manifestación corporal en el colectivo.

Luego de esta indagación por los trabajos mencionados previamente, debemos decir, que en un principio en nuestro andar a través de la semiótica, hemos mencionado en este escrito a Peirce, quién fue el que acuñó este nombre para referirse al estudio de los signos. Su naturaleza de químico y lógico nos hizo reflexionar acerca del signo como algo más general, ya que el mismo dice: "todo pensamiento es un signo" (Peirce, 1974), lo que nos instó a realizar un estudio de éstos para analizar producciones de estudiantes universitarios de primer año que cursan la asignatura de cálculo 1, quiénes son enfrentados a calcular una sumatoria doble y posteriormente un límite, con el objetivo de analizar las dificultades y errores a las que éstos están expuestos al llevar a efecto dicha tarea. De este modo, es idóneo abordar el estudio del signo a través de Peirce, ya que en una primera aproximación para analizar el trabajo de los estudiantes con los objetos matemáticos sumatoria y límite, el signo como objeto es lo que nos interesa destacar, ya que nos permitiría como investigadores detectar en dónde se ubican las dificultades de los individuos cuando nos referimos al signo a través del ícono, índice y símbolo (Peirce, 1974), caracterización del signo como objeto dada por Peirce.

Para llevar a cabo el estudio del trabajo matemático del estudiante en cuanto a signos, y pesquisar dificultades y errores con estos, procederemos a utilizar el marco teórico de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak y Richard, 2014) junto al signo de Peirce (1974), los cuales nos permitirán identificar dificultades por medio de sus diversas génesis que articulan los planos epistemológico y cognitivo de dicho modelo.

La razón por la cual estudiaremos el signo con los objetos sumatorias y límites, es principalmente por el nexo que existe entre estos objetos con otros más complejos, como lo son las series, las cuales se relacionan con convergencias, integrales, ecuaciones diferenciales, entre otros, lo que nos permite llevar un estudio de manera basal, considerando que los objetos que se trabajan posteriormente son más difíciles de abordar por los estudiantes, lo que significa que un estudio de prácticas de los individuos con objetos matemáticos primarios, nos darían pistas para identificar prácticas similares con objetos que necesitan de una mayor comprensión y reflexión por parte del sujeto.

■ Marco teórico

Para efectuar nuestra investigación, como se dijo anteriormente, se empleará el estudio del signo desde el punto de vista de Peirce (1974) y conjuntamente se analizará el trabajo del estudiante a través del modelo de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak y Richard, 2014), en adelante, ETM, que ligará el estudio del signo con las componentes de dicho modelo.
En el modelo del ETM, se articulan dos planos: un "plano epistemológico" relacionado con los contenidos matemáticos y un "plano cognitivo" relacionado con el pensamiento de la persona que resuelve tareas matemáticas (Kuzniak y Richard, 2014) (ver figura 1.)

El plano epistemológico consta de tres polos: "el referencial teórico", "el instrumental" y el "representamen".

Por otra parte, el plano cognitivo, consta de los polos: "visualización", "construcción" y "prueba".

Dichos planos, el epistemológico y el cognitivo, están articulados a través de tres "génesis" (Kuzniak y Richard, 2014): una "génesis semiótica", relacionada con los "registros de representación semiótica" (Duval, 2004), una "génesis instrumental", la cual alude a la funcionalidad de los "artefactos" en el proceso de construcción que contribuye al trabajo matemático, entendiendo por "artefacto", las herramientas de dibujo o software para dar funcionalidad al trabajo matemático, y la "génesis discursiva" de la prueba, relacionada con las propiedades matemáticas para el razonamiento.

Además, según Kuzniak y Richard (2014), se consideran distintos tipos de ETM:

"ETM de referencia", el cual refiere a los acuerdos tomados dentro de una comunidad en cuanto a formulación de problemas y sus soluciones, privilegiando formas de pensamiento en torno a la matemática.

"ETM idóneo", el cual corresponde al espacio de trabajo matemático en donde el profesor pone en juego la didáctica para enseñar cierto objeto matemático al estudiante, y el "ETM personal", el cual tiene por finalidad analizar la producción de los estudiantes, pues se consideran sus conocimientos y capacidades cognitivas.

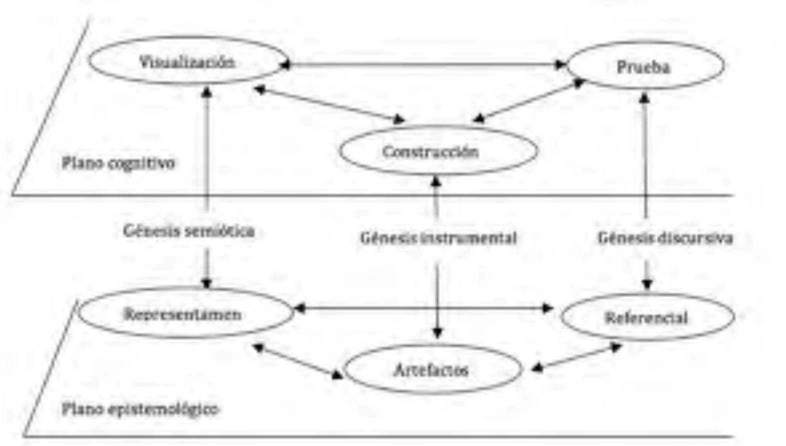

Figura 1. Modelo de los Espacios de Trabajo Matemático

Como hemos podido ver, en cuanto a las representaciones, se hizo referencia a Duval (2004). Sin embargo, para nuestros propósitos, hemos decidido estudiar la génesis semiótica a través de Peirce (1974), la cual como hemos especificado anteriormente, es más general, por abordar el signo desde otras perspectivas. Para comenzar, Peirce (1974) se refiere al signo de acuerdo con una relación triádica en la que divide a éste en tres.

1. Relaciona al signo consigo mismo.

En esta división el signo es:

a. Cualisigno: el cual corresponde a la cualidad que es un signo.
b. Sinsigno: el cual alude a la existencia que es un signo, una cosa o evento real que es un signo.
c. Legisigno: el cual es una ley que es un signo.

2. Relaciona al signo como objeto. En esta división el signo es:

a. Icono: Se refiere al objeto al que denota en virtud de características que le son propias, independiente de si existe o no tal objeto.

b. Indice: Se refiere al objeto que denota en virtud de ser afectado por el objeto, es decir, la naturaleza del objeto incide en la aparición del índice.

c. Símbolo: Se refiere al objeto que denota en cuanto a una ley, asociaciones de ideas generales que le dan al símbolo la interpretación con referencia al objeto.

3. Relaciona al signo como interpretante. En esta división el signo es:

a. Rema: Es un signo de posibilidad cualitativa, representa una u otra clase de objetos posibles, puede esta entregar información, sin embargo, no se interpreta que esta la entregue.

b. Signo Dicente: Es un signo de existencia real.
c. Argumento: Es un símbolo o un signo cuyo objeto es una ley.

Para nuestros análisis consideraremos el "signo como objeto", en virtud de identificar prácticas establecidas por el estudiante con los objetos matemáticos, pues hallamos en éstos: "íconos", "índices" y "símbolos". Esta clasificación permite estructurar nuestro estudio e identificar en qué subdivisión del signo como objeto se presentan errores y dificultades, y cómo influyen en las génesis del espacio de trabajo matemático personal del estudiante.

Metodología

Para analizar las producciones de los estudiantes, nos ubicamos bajo un paradigma cualitativo. La metodología fue llevada a cabo a través de un estudio de casos (Stake, 1998). Para ello, nos posicionamos en un curso de cálculo 1 de las carreras de bioquímica y química industrial de una universidad chilena, con el objetivo de indagar en las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a una actividad de sumatoria y límite.
El caso lo conforman 41 estudiantes (18-19 años). Se aplicó una pregunta con 2 ítems, la primera de ellas corresponde al cálculo de una sumatoria doble y la segunda es el cálculo de un límite. Los estudiantes participaron libremente de la actividad. Se han identificado como estudiante 1 por E1, estudiante dos por E2 y así hasta E41.

La actividad se detalla a continuación:

1. Calcule $\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\substack{6 \\ 5}} (i+j)$.

En el caso de este ejercicio en particular, la notación empleada fue diseñada de forma intencionada, de modo que permita analizar cómo influye la adecuada o inadecuada notación. Así mismo será posible encontrar aquellas dificultades producto de la notación a la que hacemos mención y si es posible que el estudiante note que está frente a una sumatoria doble y la relevancia que tienen los signos. En este caso nos interesa saber qué iconos, índices y símbolos salen a la luz del trabajo matemático del sujeto, y en cuál o cuáles de estas subdivisiones presenciamos dificultades y/o errores además de analizar si es posible que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva del modelo ETM.

2. ¿Qué valor tiene $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})$? ¿Es un valor exacto? Si, No, ¿Por qué? Explique.

Análogamente al caso de la sumatoria, nos interesa saber aquéllas dificultades y/o errores que se detectan en el cálculo del límite, es decir, en qué parte del signo como objeto podemos percibir ciertas incompatibilidades que hacen o no hacen que el sujeto trabaje de manera adecuada, y junto a ello, poder decir si existe una articulación entre los planos epistemológico y cognitivo del ETM a través de la activación de las génesis de dicho modelo.

Resultados

Para el primer inciso, del cálculo de la sumatoria, tomamos la producción de un estudiante que hemos denotado como E1, siendo esta producción el reflejo de aquéllas que respondieron que el valor de dicha sumatoria es 36, la elección de esta producción fue debido a que es la más explícita de todas, lo que implica un mejor análisis del signo en cuestión. De acuerdo con esto, 18 sujetos contestaron que el valor de esta sumatoria es 36 y los 23 estudiantes restantes no respondieron el ítem.

Por otro lado, ningún estudiante se percató de que se trataba de una sumatoria doble. (ver figura 2.). Más detalles de esta situación se dan en las conclusiones.

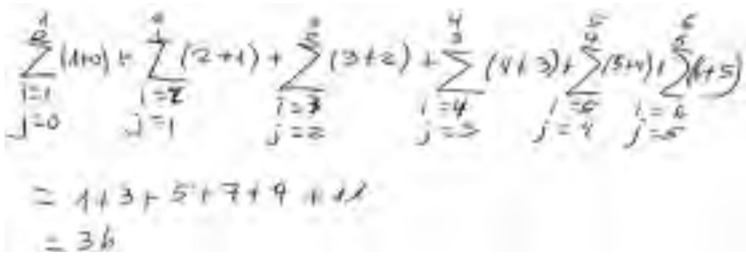

Figura 2. Producción de E1

Con respecto a lo visualizado en la producción, y como resultado de nuestras reflexiones, daremos a conocer ciertas indicaciones que se podrían tener en cuenta a la hora de revisar con los estudiantes la importancia de las propiedades y en particular de los signos (Peirce, 1974) que contiene la doble sumatoria.

Como bien sabemos que la notación para la sumatoria y sus índices no es la más adecuada, rescatamos que cualquiera de las dos siguientes maneras de escribirlas, nos hubiese dado algunos indicios de que el estudiante comprende la existencia de los índices i ,j ligados a una función que depende de i por una parte y de j por otra. De este modo, podríamos haber tenido las siguientes dos posibilidades:

a. Tomar desde i desde 1 hasta 5 y j desde 0 hasta 6.

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

El desarrollo podría haber sido el siguiente: En una primera instancia dejar i fijo, y j variable con j corriendo desde 0 a 6, lo que genera la siguiente expresión y cálculo respectivo:

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}((i+0)+(i+1)+(i+2)+(i+3)+(i+4)+(i+6)=\sum_{i=1}^{5}(7i+21)$$

$$=7\sum_{i=1}^{5}i+\sum_{i=1}^{5}21=7(1+2+3+4+5)+21\times 5=210$$

Si el estudiante toma j fijo e i variable corriendo desde 1 a 5, el resultado es el mismo, es decir 210, aunque sin duda, la notación sigue siendo muy subjetiva.

b. Tomar i desde 1 hasta 6 y j desde 0 hasta 5.

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

En este caso, el estudiante optaría por dejar j fijo e i variable corriendo desde 1 a 6, generando el resultado siguiente:

$$\sum_{j=0}^{5}\big((1+j)+(2+j)+(3+j)+(4+j)+(5+j)+(6+j)\big)=\sum_{j=0}^{5}(6j+21)=216$$

Como en el caso anterior, al dejar i fijo, j variable corriendo desde 0 a 5 se obtiene el mismo resultado, es decir, en este caso, 216. Es fácil darse cuenta que en los casos a y b los resultados son distintos, lo que implica que ciertos procedimientos no están correctos. Sin embargo, el estudiante con esto, ya nos estaría revelando que es capaz de reconocer el rol que cumplen los índices y las funciones que intervienen, así como también el rol que cumple sigma. Destacamos que el resultado eventualmente puede ser correcto y coincidir con la doble sumatoria que se conoce actualmente, sin embargo, la declaración de las propiedades del objeto matemático junto a su simbología es fundamental para una comprensión adecuada y sin ambigüedades.

De esta forma, el profesor tomando su rol como tal y de matemático experto, debe en estos momentos indicar dichos desarrollos para proceder ahora con la importancia que tienen las propiedades y la correspondencia entre estas y su semiótica (Peirce, 1974). Finalmente, el profesor debería llegar a que:

$$\sum_{j=0}^{6}\sum_{i=1}^{5}(i+j)$$

Es la notación de la doble sumatoria y que coincide con la expresión:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=0}^{6}(i+j)$$

Y que en ambos casos el resultado es 210. Lo que junto a las propiedades que enuncia el profesor, no da lugar a la generación de subjetividades y la relevancia del signo (Peirce, 1974) queda establecida en esos momentos.

Para el segundo inciso, el del cálculo del límite, tomamos la producción que hemos denotado como E2, ella caracteriza a muchas otras producciones, por lo que nos pareció pertinente tomarla como una producción ejemplo, pues deja constancia clara de lo que su trabajo matemático manifiesta en cuanto a análisis del signo (ver figura 3.)

Ahora en cuanto a resultados, ocho estudiantes respondieron que el límite era exactamente 1, diez que no existe el valor del límite, pues en su mayoría argumentan que 2 elevado a infinito no existe, y por último, 3 estudiantes dijeron que no existe por la razón expuesta por E2 en la producción, la cual expone: “no tiene valor exacto, porque el límite varía según la cantidad esté aumentando”.

Figura 3. Producción de E2

A modo de reflexión consideremos lo siguiente en cuanto a la producción recién analizada:

Primeramente, una de las cuestiones relevantes que el alumno debiera preguntarse, es la siguiente:

¿Qué ocurre cuando consideramos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{2^{80}}, \dots$?, ¿Qué resultado obtengo de esas divisiones cuando consideramos un valor en el denominador extremadamente grande? Pues bien, creemos que, en este sentido, el docente debe incluir ese tipo de preguntas al abordar el objeto matemático en sus clases habituales, considerando la posibilidad que la expresión numérica $\frac{1}{2^n}$ se haga cero cuando n tiende a infinito. Así mismo, con otras expresiones que arrojan el mismo resultado. De acuerdo con los datos obtenidos, podemos ver que existe una resistencia al infinito, cuestión que mencionábamos anteriormente con respecto al "infinito potencial", y que la buena idea sería dar avances hacia el concepto de "infinito actual". Más detalles de esta situación se dan en las conclusiones.

Conclusiones

En términos de signos de Peirce, se puede dar cuenta que tanto en el caso del cálculo de la sumatoria como en el caso del cálculo de límites, el signo analizado como objeto, es decir, el signo que identifica: ícono, índice y símbolo, arroja que éste falla en cuanto al índice, pues tanto en la sumatoria como en el límite se identifican funciones (índices, según Peirce (1974)) que no son afectadas por el objeto, es decir, en la sumatoria, no se refleja la acción de sigma (ícono, según Peirce (1974)) junto a sus índices sobre la función $i + j$. No se observa, digamos, el "activador" sigma sobre esta función, haciendo ver que sigma no es más que una instrucción para el estudiante, que implica la acción de sumar, quedando aislada de la función en cuestión. Dicha situación se vuelve a repetir en cuanto al cálculo del límite propuesto, donde la función $1 - \frac{1}{2^n}$ es un índice que implica la acción de reemplazar cierto número de acuerdo al otro índice "n tendiendo a", que induce a la evaluación de dicho número en el índice función, que en este caso, al tender n a infinito, genera la confusión en el sujeto, pues al considerar infinito toma el significado de este como "cualquier número", lo que lo hace tomar determinados valores, los cuales son reemplazados en la función $1 - \frac{1}{2^n}$ y con ello obtiene diversos valores para el límite, lo que no permite obtener la idea de convergencia, que sería la idea general que se desprende de lo que significa "símbolo" desde el punto de vista de Peirce.

Ahora bien, desde el trabajo matemático del estudiante, mediante el ETM y bajo la génesis semiótica, el signo en su totalidad permite una visualización del objeto que no es bien concebida dada la no articulación del sujeto con cada uno de los elementos que compone el signo general $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, pues todos funcionan de forma independiente, ya que ninguno influye de manera adecuada para llegar a un valor correcto, de forma tal que el ícono lim, cumple aquí también el rol de instructor: " tome n cualquiera y calcule", lo que no permite una activación adecuada de la génesis instrumental, ya que ésta se ve truncada, pues las herramientas que provee las propiedades de un sistema numérico basado en la adición y sustracción dada por el referencial teórico, no son suficientes pues no existe claridad con propiedades del límite y su relación con el infinito, de modo tal que la génesis instrumental no permite obtener el valor correcto de dicho límite, por lo que a su vez no es posible activar la génesis discursiva que de a conocer que el límite converge a cierto valor, que en el buen caso debiera arrojar que su valor es 1, o que el límite converge a 1.

Finalmente, nuestras hipótesis de por qué no es posible llegar a buen fin con estos cálculos, se debe a que el docente en su quehacer como tal, no contempla al signo como aquello que deba explicarse con detalle, es decir, como algo que sólo debe ser visto para instrumentalizarse, para dotar al sujeto de una serie de algoritmos bajo técnicas algebraicas, sin una interpretación detallada y correcta de los signos que componen un objeto, debido a la escasa articulación entre signos y, en consecuencia, sin sentido para el sujeto que resuelve tareas matemáticas, pues tiene ante sus ojos un objeto con múltiples signos en donde cada uno tiene roles distintos.

En conclusión, los signos que están presentes tanto en las sumatorias como en los límites deben ser abordados de forma articulada, de modo que tanto sigma como lim, sean "activadores" de las funciones que intervienen para su cálculo posterior, sólo de esa manera será posible activar las diversas génesis del modelo ETM para la correcta conexión entre los planos epistemológico y cognitivo del modelo en cuestión.

Por otra parte, tanto las sumatorias como los límites son dos objetos de mucha relevancia en el cálculo. La aplicación de dichos objetos en el cálculo de áreas tiene una profunda explicación en base a las sumas de Riemann, cuya naturaleza permite una adecuada comprensión del concepto de área bajo la curva.

Del mismo modo, el límite reaparece en el cálculo de series, objeto que lleva consigo elementos conceptuales tan importantes como el de la convergencia, en donde se precisa que si la serie converge, entonces se puede conocer la suma de esa serie, esa suma de la serie ya contempla el cálculo del límite de una sucesión de sumas parciales.

Finalmente, es así como damos cuenta de la importancia del objeto matemático en nuestro estudio. Un abordaje de los "signos" de forma pertinente y permanente, por parte del docente, mejoraría en los estudiantes su trabajo matemático. De este modo, el ETM junto al análisis de "signos", es un modelo propicio para indagar sobre aquellas dificultades con las que se encuentra el sujeto, de modo tal que resulta fructífero detectar en dónde se encuentran tales problemas y, a futuro, dar posibles caminos que ayuden a mejorar aquellas dificultades.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. y Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics. (77)* (2-3)*,* 189-206. doi: 10.1007/s10649-010-9280-3.

Codes, M. y González, A. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las ciencias, 35*(1), 89-110. doi:10.5565/rev/ensciencias.1927

Duval, R.(2004). Semiosis y Pensamiento Humano. *Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Merlín I.D.

Kuzniak, A. y Richard, P.R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME, 17*(4-1), 5-15. doi:10.12802/relime.13.1741a

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya, E., Morales, A. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual. Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *RELIME 18*(3), 329-358.doi:10.12802/relime.13.1832

Peirce, C. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Radford, L. (2006). Introducción: Semiótica y Educación Matemática. En L. Radford y B. D' Amore (Eds.), *Semiótica, Cutura y Pensamiento Matemático* (Número especial de *RELIME*), 7-21.

Radford, L. (mayo, 2009). *Signs, Gestures, Meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective*. Plenaria del Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, Francia. Recuperado desde http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary1-radford.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communication. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511499944

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos* (2da ed.). Madrid, España: Ediciones Morata.