

# LA INSTRUMENTACIÓN DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN SECUNDARIA. LAS RECTAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

## GEOGEBRA IMPLEMENTATION IN GEOMETRIC PROBLEM SOLVING AT SECONDARY SCHOOL; NOTABLE STRAIGHT LINES OF TRIANGLES

Horacio Sostenes-González, Irma Fuenlabrada-Velázquez  
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México  
hssg\_33@hotmail.com, irfuen@cinvestav.mx

### Resumen

Se presenta una investigación en proceso, de carácter exploratorio, que estudia las estrategias que ponen en juego los alumnos de 1° de secundaria en la resolución de problemas que implican las propiedades de las rectas notables de los triángulos, utilizando el software GeoGebra. Se asume como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica a través de la implementación de una secuencia diseñada en apego a la Teoría de las Situaciones didácticas, que se complementa con referentes de la Génesis instrumental. Los resultados muestran cómo se apropian los estudiantes de los esquemas de uso de las herramientas de GeoGebra, y la coexistencia de estos con sus ideas geométricas para resolver los problemas planteados.

**Palabras clave:** ingeniería didáctica, génesis instrumental, rectas notables de los triángulos

### Abstract

This paper presents an ongoing research, of exploratory nature, which studies the strategies that first-year secondary students use in problem solving involving the properties of notable lines of triangles, by using GeoGebra software. Didactic engineering is assumed as the methodology of this research, by implementing a sequence designed according to the Theory of Didactic situations that is supported by referents of the Instrumental Genesis. The results show how students learn and acquire schemes of using GeoGebra tools, and the way in which they use these schemes to solve the problems of the notable straight lines in triangles.

**Key words:** didactic engineering, instrumental genesis, notable lines of the triangles

## ■ Introducción

En México y en otros países latinoamericanos como Perú, Colombia y Argentina, la Geometría en la Educación Básica se ha estudiado y tratado superficialmente (Etcheverry, Reid, Botta, 2009., García, 2014). En años recientes en los niveles medio superior y superior se han privilegiado principalmente estudios de contenidos algebraicos, mientras que en la educación básica se ha privilegiado la indagación sobre el estudio de las fracciones y el desarrollo del pensamiento algebraico (Ávila, 2015).

Aun así, en los últimos años el acceso a recursos tecnológicos ha permitido el estudio de la Matemática en un carácter dinámico, y con ello también la Geometría. La geometría dinámica “puede ser mejor entendida en contraposición a la estructura “estática” de las construcciones de la geometría tradicional de lápiz y papel. Los sistemas de geometría dinámica permiten crear y manipular construcciones geométricas, principalmente de geometría euclidiana” (Reyes, 2016, p.43)

Si bien en los últimos años trabajar a través de la Geometría dinámica mediante recursos tecnológicos ha propiciado un incremento en el desarrollo en investigaciones y propuestas educativas, aun son bastantes los retos que hay que afrontar y que requieren un estudio arduo para comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Entre otros datos, por ejemplo, las pruebas nacionales en México como PISA 2015 (INEE, 2016), muestra que solo el 3.1% de los estudiantes de secundaria se encuentran en el nivel IV de desarrollo de pensamiento geométrico. En este nivel, que es el más alto, se encuentra la resolución de problemas que implican: a) transformación de figuras; b) propiedades de las mediatrices y bisectrices –interés de la investigación que nos ocupa; y, c) razones trigonométricas.

La investigación pretende contribuir al estudio del desarrollo de conocimientos sobre los procesos que siguen los estudiantes de secundaria, al incorporar como recurso de apoyo a su razonamiento geométrico el software GeoGebra. Específicamente en la resolución de problemas que implican a las rectas notables de los triángulos, se pretende analizar y caracterizar las estrategias de solución, que las parejas de trabajo ponen en juego usando el software; destacando de ellas, las primeras manifestaciones de apropiación de esquemas de uso de las herramientas del software. Cabe señalar que el reporte que aquí se presenta, proviene de una investigación -en curso- del trabajo de tesis para obtener el grado de maestría de uno de los autores.

## ■ Marco teórico y metodológico

Se asume como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998), la cual “...designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos” (Douady, 1996, p.241). De ella se retoman esquemas experimentales basados en realizaciones didácticas aulicas, considerándose las fases de análisis *a priori* y *a posteriori* de las situaciones problemáticas en las que subyace el uso de las rectas notables de los triángulos. Dichas situaciones se diseñaron en apego a la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (2007).

Para orientar tecnológicamente el desarrollo y estudio de la secuencia se consideró la génesis instrumental (Rabardel, 1995), que describe el proceso e interacción entre un sujeto y un artefacto y como es que éste se convierte en un instrumento en las manos del usuario, para nuestro caso el estudiante de secundaria. El proceso tiene dos dimensiones (Castillo y Montiel, 2009): la instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentalización refiere a que el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto y se adapta a él, además, en esta dimensión del proceso el sujeto puede construir nuevas funciones del artefacto. Mientras que la instrumentación es relativa a la aparición y evolución de los esquemas de utilización del artefacto.

La génesis instrumental es un complejo proceso que necesita tiempo tanto para el desarrollo de esquemas de uso, como para que el artefacto se convierta en un instrumento en las manos del usuario.

## ■ Metodología

En la secuencia didáctica diseñada, se identifican cuatro momentos: *Para comenzar a usar GeoGebra; Construcción y análisis de los triángulos; Las rectas notables del triángulo y resolución de problemas.*

Los primeros tres momentos tienen como propósito iniciar la primera dimensión del proceso: la instrumentalización. Es decir, que los estudiantes se familiaricen con GeoGebra y adquirieran las primeras nociones de su uso, ya que la primera indagatoria para recabar información académica personal de los estudiantes mostró que ninguno había utilizado este software. El cuarto momento, tiene la pretensión de propiciar el inicio de la segunda dimensión del proceso: la instrumentación de las nociones de las rectas notables al mismo tiempo que se evidencian los esquemas de uso de algunas de las herramientas de GeoGebra. Dado el propósito de la investigación este cuarto momento es el de mayor interés para el análisis.

Para realizar la indagatoria se estudia el caso de un grupo de 8 alumnos (13 años) de primer grado de una telesecundaria ubicada en el Estado de México, seleccionados con base en criterios definidos por la institución.

A fin de contar con información relativa a lo que estos estudiantes sabían acerca del objeto de estudio de la investigación y con ello tener elementos de referencia para el diseño de la secuencia didáctica, se realizó una entrevista con cada uno de los alumnos. De éstas supimos que, al inicio del ciclo escolar, habían abordado con sus profesores el tema de las rectas notables de los triángulos de forma convencional a través del uso de regla, compás y escuadras; pero no habían resuelto problemas y además desconocían el uso de GeoGebra.

Para conformar el referente empírico de la investigación, se video grabaron tanto las entrevistas como las sesiones de trabajo con la secuencia didáctica.

Los alumnos trabajaron siempre en parejas en una computadora donde previamente se había instalado el GeoGebra, en ella resolvían las situaciones problemáticas que el maestro les entregaba por escrito sesión por sesión. Para el referente empírico, se contó también con las grabaciones de pantalla de las computadoras y las anotaciones que los alumnos hicieron en el material escrito de la secuencia didáctica.

## ■ Resultados, a título de ejemplificación

Para ilustrar el proceso de solución y los esquemas que los estudiantes ponen en juego en la resolución de una situación y con ello, dar cuenta de la manera como se documentan y analizan los resultados con los que se cuenta hasta ahora, retomemos el primer problema que se planteó en la secuencia (Imagen 1).

El problema demanda que los estudiantes pongan en juego las nociones de mediatriz y sus propiedades. Requieren determinar el centro del calendario azteca para poder obtener la medida del radio. Es decir, necesitan determinar el centro de una circunferencia que pase por tres puntos (que deben colocar sobre el contorno del calendario azteca), y el centro se obtiene por la intersección de las mediatrices a partir de los puntos anteriormente marcados.

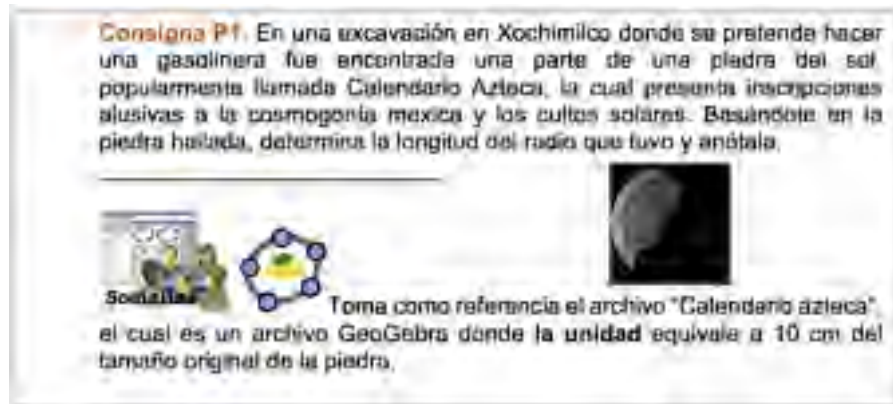


Imagen 1. Problema del calendario azteca.

A continuación, se muestra el proceso de solución del equipo cuatro a través de los distintos intentos que pusieron en juego. Para distinguir los diferentes intentos se considera el momento en que los estudiantes borran sus trazos, o deshacen con el cursor la última construcción. Los intentos, se describen de manera concisa para facilitar la visualización de la estrategia y el uso de las herramientas de Geogebra.

1. Ubican tres puntos sobre el contorno circular del calendario azteca trazan posteriormente una circunferencia usando la herramienta *Circunferencia por tres puntos* que modela al calendario azteca.
2. Trazan una circunferencia aproximada al contorno del calendario azteca, utilizan *Circunferencia (centro, punto)*.
3. Desde un punto aproximado al centro del calendario, trazan una circunferencia de radio  $6u$ , usando la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*.
4. Utilizan *Circunferencia (centro, punto)*, dan clic en un punto aproximado al centro del calendario, pero desplazan el puntero sin dar clic haciendo que se genere una circunferencia que no queda estática ni definida en un punto.
5. Trazan varias circunferencias utilizando *Circunferencia (centro, punto)* o *Circunferencia (centro, radio)*, que deshacen de inmediato al ver que no quedan de la medida deseada.
6. Intentan trazar una perpendicular, al dar clic sólo en un punto y sobre la imagen, la recta no se genera.
7. Trazan tres rectas a partir del contorno del calendario azteca. Las rectas se intersectan en un punto, pero éste no corresponde al centro del calendario.
8. Trazan una recta que pasa aproximadamente por la mitad de la imagen, la deshacen.
9. Trazan una recta que va aproximadamente del centro del calendario hacia un punto en su contorno.
10. Intentan trazar una *bisectriz*, dan clic sobre la imagen, pero no definen los puntos por lo que no se genera algún trazo.
11. Trazan dos mediatrices tomando como referencia las esquinas de la imagen.
12. Trazan un triángulo dentro de la imagen, intentan trazar una mediatriz en uno de sus lados, como sólo dan clic en un vértice, la recta aparece, pero no queda fija porque no dieron clic en el otro punto.
13. Del triángulo trazado anteriormente desplazan los vértices sobre el contorno circular del calendario. Obtienen la intersección de las mediatrices y miden la distancia del circuncentro a los vértices del triángulo (Imagen 2).

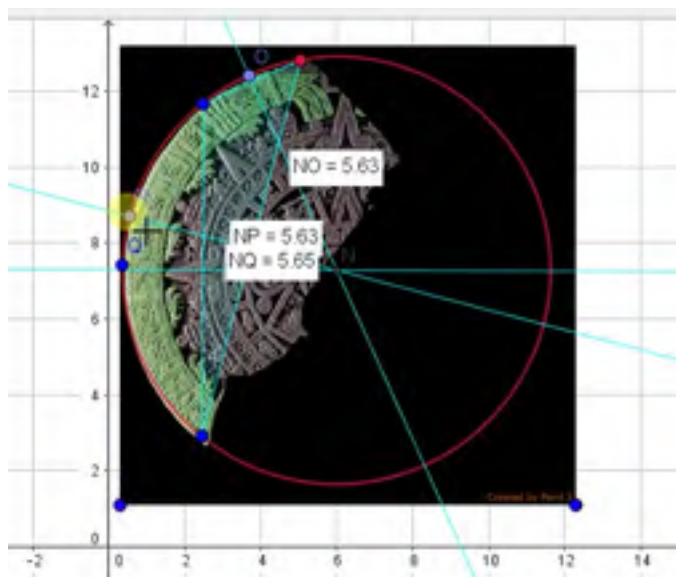


Imagen 2. Solución del equipo 4 al problema del calendario azteca.

Frente a este problema, puede observarse, que los estudiantes no identifican de manera inmediata que para resolverlo necesitan usar las propiedades de las rectas notables del triángulo, específicamente las de la mediatriz. Los primeros intentos de solución que manifiestan los estudiantes son azarosos e inexactos, exploran y experimentan con herramientas que han usado frecuentemente en otras situaciones, como son *Recta*, *Segmento*, *Circunferencia*, *Punto* que no los llevan a la solución; cabe destacar que los alumnos toman consciencia de ello, lo que en el proceso de aprendizaje no es nada desdeñable. En consecuencia, su disposición mental frente a la necesaria intervención docente les permite percatarse que la solución del problema está relacionada con alguna de las líneas notables del triángulo.

Si bien, las diferentes parejas de estudiantes lo intentan con mayor o menor éxito -tratan por ejemplo de trazar las medianas de un triángulo, ubicando aproximadamente el punto medio de los lados, en lugar de utilizar directamente la herramienta *Punto medio* de GeoGebra-, manifiestan en general un conocimiento insuficiente del software, evidenciando que el tiempo de génesis instrumental no fue el suficiente.

Aunado a que la noción del objeto matemático mediatriz aún se ve frágil y su uso se vuelve limitado ya que los estudiantes por si mismos no logran poner en juego un trazo exacto y fluido que permita utilizar sus propiedades para la resolución de la situación problema donde se requiere su uso.

### ■ Conclusiones

Lo que caracteriza en general a las estrategias de solución de los estudiantes de la muestra, es que se apropian con mayor facilidad de esquemas de uso de las herramientas que refieren a nociones que recurrentemente aparecen cuando se trabaja con geometría como recta, segmento, circunferencia y polígono, con las que seguramente han tenido conocimiento en su tránsito por la escuela primaria y que ciertamente también se utilizan y aparecen en la búsqueda de solución a los problemas planteados desde el inicio de la secuencia didáctica. Es decir, en esta breve experiencia de aprendizaje, los estudiantes de la muestra incorporaron solo los esquemas de uso de las herramientas

de GeoGebra de aquellos que refieren a las nociones geométricas que cuentan con un sentido construido, con antelación, por parte de los estudiantes.

Los estudiantes tuvieron mayor dificultad para incorporar los esquemas de uso de herramientas como mediatriz, bisectriz, perpendicular (incluso para algunos no quedó consolidado); de hecho, al término de la experiencia el conocimiento sobre las rectas notables se muestra frágil, al margen del requerimiento experimental de evocarle e instrumentarlo con el uso de GeoGebra para plantear una solución a los problemas.

Estos hechos nos permiten expresar, más allá de lo obvio -que el abordaje del tema requiere de mayor tiempo para que los alumnos accedan a un buen conocimiento de las rectas notables del triángulo-, que el andamiaje metodológico utilizado en la investigación, nos permitió instalar condiciones para ahondar sobre la comprensión de las primeras manifestaciones de apropiación de esquemas de uso de las herramientas del software GeoGebra en la resolución de problemas geométricos en estudiantes que recién inician su educación secundaria, Así mismo, mantener la hipótesis, para futuras indagaciones, del beneficio que supone la instrumentalización e instrumentación de GeoGebra para favorecer el aprendizaje de las rectas notables de los triángulos en particular y la geometría en general, al inicio de la escuela secundaria.

## ■ Referencias

- Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.
- Ávila, A. (2015). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-IACME*, Chiapas, México: CIAEM.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia: Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.
- Etcheverry, N., Reid, M. y Botta, R. (2009). *Tic: Animándonos a la Enseñanza de la Geometría con Cabri*. Unión 17(1), 102-116.
- García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria*. Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- INEE (2016). *México en PISA 201, 1a edición*. México: INEE
- Pantoja, R. (2014). *Uso de tecnología en matemática educativa, Investigaciones y propuestas*. Ciudad Guzmán, México: AMIUTEM.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Reyes, M. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.
- Vázquez, H. (2013). *Uso de geometría dinámica en la escuela secundaria*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav. México.