VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

CARACTERIZACIÓN Y ANÁLISIS GRÁFICO DE LAS VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN LINEAL AFÍN CON GEOGEBRA MÓVIL

CHARACTERIZATION AND GRAPHICAL ANALYSIS OF THE VARIATIONS OF A LINEAR AFFINE FUNCTION TO MOBILE GEOGEBRA

Horacio Saúl Sostenes González, Daysi García-Cuéllar, Mihály Martínez-Miraval
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Pontificia Universidad Católica de São Paulo (Brasil). Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (Perú).
hssg_33@hotmail.com, ra00193072@pucsp.edu.br, pcmammar@upc.edu.pe

Resumen
El objetivo del presente artículo es mostrar cómo se puede utilizar el GeoGebra para móviles para construir la relación de dependencia entre las variables de una función lineal afín y caracterizarla a partir de la variación de los parámetros de su regla de correspondencia. El marco teórico para el diseño de las actividades se apoya en ciertos aspectos de la teoría de registros de representación semiótica y del pensamiento variacional. Los resultados de la experiencia manifiestan que es factible utilizar las herramientas del GeoGebra para móviles al trabajar con la función lineal afín, dado que los docentes de educación secundaria que participaron de la experiencia realizaron coordinaciones entre los registros de lenguaje natural, gráfico y algébrico de dichas funciones; asimismo, emplearon el GeoGebra para resolver problemas en situaciones de contexto real.

Palabras clave: función lineal afín, geogebra, pensamiento variacional, educación secundaria

Abstract
The objective of this article is to show how mobile GeoGebra can be used to construct the dependency relationship between linear affine function variables and characterize it based on the parameter's variation of its correspondence rule. The theoretical framework for the activities design is supported in certain aspects of the theory of registers of semiotic representation and variational thinking. The experience results show it is feasible to use the mobile GeoGebra tools when people working with linear affine function, since the secondary education teachers who participated in the experience, made coordination between the natural, graphic and algebraic language registers of said functions; also, they used GeoGebra to resolve problems in real context situations.

Key words: linear affine function, GeoGebra, variational thinking, secondary education

Introducción

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa muestran la necesidad de realizar estudios sobre funciones, en particular sobre la función lineal afín, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Trujillo, Guerrero y Castro, 2007; Tabach y NachielI, 2015; Viirman, 2014; García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018). En estos estudios, se han identificado dificultades de los estudiantes en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función, así como al realizar conversiones de la representación del registro gráfico al algebraico y viceversa; por lo cual, es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

El estudio de la función lineal afín forma parte de la malla curricular en los diferentes países latinoamericanos. Para el diseño de las actividades y la puesta en práctica de la experiencia, partimos de la revisión de los currículos de Perú y México en el nivel de secundaria, dado que en México se da énfasis al desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de la función lineal afín, y en Perú, se da énfasis en la representación de dicha función en los diferentes registros como gráfico, tabular y algebraico, esto se puede observar en la tabla 1. Asimismo, identificamos procedimientos, estrategias, y/o elementos comunes en la enseñanza de dicha función, así como su aplicación en situaciones de diversos contextos. Cabe mencionar que la función lineal afín es introducida en primero y segundo grado de secundaria en Perú, sin embargo, en México se trata en segundo y tercer grado de secundaria.

Tabla 1. Función lineal afín en los currículos de Educación Secundaria

México	Perú
En segundo grado se tiene: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$. En tercer grado se analizan situaciones de funciones lineales y cuadráticas: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	Desempeños para el primer grado: Interrelaciona representaciones gráficas, tabulares y algebraicas para expresar el comportamiento de la función lineal y sus elementos: intercepto con los ejes, pendiente, dominio y rango, para interpretar y resolver un problema según su contexto. Desempeños para el segundo grado: Expresa, usando lenguaje matemático y representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, su comprensión de la relación de correspondencia entre la constante de cambio de una función lineal y función lineal afín, para interpretarlas y explicarlas en el contexto de la situación. Establece conexiones entre representaciones y pasa de una a otra representación cuando la situación requiere. Plantea afirmaciones sobre las diferencias entre la función lineal y una función lineal afín. Justifica la validez de sus afirmaciones usando ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Fuente: Adaptado de México (2011) y Perú (2016).

Al tener características variacionales, es pertinente introducir la noción de función lineal afín con el apoyo de *softwares* matemáticos que permitan observar y analizar cómo varía una función a partir de cambios en su variable y sus parámetros (Montiel y Buendía, 2013); lo cual debe ser complementado con situaciones de contexto extramatemáticas (Evitts, 2004), en donde prime el análisis y la justificación de resultados, a partir de la interpretación gráfica de las variaciones realizadas.

El uso del GeoGebra móvil permite construir la relación de dependencia lineal entre las variables y caracterizar a la función lineal afín a partir de la variación de sus parámetros, lo que posibilita la búsqueda de generalidades, ya que como vemos en PosgradoMatEdu (2016), el pensamiento matemático debe desarrollarse a través de generalidades. Por ello, nos centramos en abordar este tipo de funciones con docentes de secundaria, pero de manera dinámica a través del uso de GeoGebra móvil, de modo que les brindemos una alternativa de uso de sus teléfonos móviles, liberándolos de la necesidad de utilizar laboratorios computarizados.

Fundamento teórico y metodológico

Para realizar la secuencia de actividades tomamos como fundamento teórico aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y del Pensamiento Variacional desde la perspectiva de Vasco (2002).

En relación con la Teoría de Registros de Representación Semiótica, Duval (1995) afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas como la conceptualización, razonamiento y resolución de problema, requieren del uso de sistemas de expresión y representación. Duval, aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (Duval, 1995, p. 14)

El autor manifiesta que las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la Semiosis (actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas) son: la *formación*, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; *el tratamiento*, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro; y *la conversión*, que es una transformación que produce una representación en un registro distinto al inicial. De acuerdo con Duval, para que se logre el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes.

En cuanto al Pensamiento Variacional, usamos la definición de Vasco (2002):

> El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p. 63)

De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012), para el desarrollo del pensamiento variacional, además de la modelación, se puede (y debe) integrar las tecnologías digitales, pues estas juegan un papel fundamental para visualizar el dinamismo que caracteriza a algunos conceptos del análisis matemático (el concepto de función, derivadas, integrales, etc.). Asimismo, estos autores indican que, con el uso de un software dinámico como el GeoGebra, se puede producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos.

Metodología y procedimientos metodológicos

Nuestra metodología es de corte cualitativo, Denzin y Lincoln (1994) sostienen que la metodología cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentado dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas les otorgan. Asimismo, los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que por los resultados o productos. Es por ello, que en la siguiente sección hacemos énfasis en los procesos seguidos por los docentes participantes.

En cuanto a los procedimientos metodológicos, el taller se realizó en dos sesiones con diez docentes e investigadores de México, Perú y Colombia, que se enfocan en la enseñanza de la matemática en Educación Secundaria. En la primera sesión, se atendió la incorporación del recurso tecnológico GeoGebra para móviles, con el cual, en primer lugar, se construyó la relación lineal de dependencia de la variable y respecto de la variable x, y en segundo lugar, se caracterizó a la función lineal afín a partir de sus variaciones gráficas al movilizar los parámetros a y b que componen su regla de correspondencia, esto permitió transitar entre sus representaciones en los registros lenguaje natural, gráfico y algebraico. En la segunda sesión, se dio la puesta en práctica de dichas características de la función lineal afín, enfocadas en el planteamiento, resolución y análisis de situaciones problemáticas de contexto apoyados en el GeoGebra para móviles.

Para realizar la implementación de la secuencia didáctica diseñada para el análisis de la función lineal afín, se consideró necesario que se tuviera además del GeoGebra móvil, un recurso que permitiera visualizar el trabajo que realizaban los docentes participantes desde sus teléfonos móviles, a fin de detectar errores comunes que se cometen o de verificar que se están siguiendo correctamente los pasos del proceso de construcción; para esta finalidad se uso el *Teamviewer,* que es una aplicación que permite vincular de forma gratuita, a través del wifi, el teléfono móvil con la computadora, es decir, la pantalla del teléfono móvil se visualiza en tiempo real en la pantalla de la computadora.

Actividades y análisis didáctico

A continuación, presentamos la descripción y el análisis de dos actividades (una de cada sesión) que se propusieron en el taller.

Actividad 1: análisis de la función afín $f(x) = ax + b$

1. En el archivo GeoGebra traza dos deslizadores. Observa que en automático aparecen con el nombre a y b.
2. Coloca un punto B sobre el eje X. Luego, digita en la barra de entrada el punto de coordenadas $(0; a \cdot x(B) + b)$ que será denominado como C.
3. Traza una perpendicular al eje X que pase por B; luego, traza una perpendicular al eje Y que pase por C. La intersección de ambas rectas genera el punto A.
4. Oculta las rectas perpendiculares.
5. Traza segmentos que vayan de A a B, y de A a C. Selecciona propiedades y elige un estilo de línea punteada.
6. Active el rastro del punto A. ¿Qué características presenta el rastro del punto A al mover el punto B sobre el eje X?
7. En la barra de entrada coloca la expresión $f(x) = ax + b$. Esta expresión generará la gráfica de una función lineal que toma los valores de a y b como referencia.
8. Desplaza los deslizadores. Observa lo que ocurre y responde a las siguientes preguntas:
   a) ¿Qué sucede con la posición de la recta si movemos el valor del deslizador b en $b = -2$, $b = 0$ y $b = 3$? ¿Qué papel cumple el coeficiente b?

b) ¿Qué sucede con la posición de la recta si movemos el valor del deslizador a en $a = -1$, $a = 0$ y $a = 2$?
c) Para los valores del coeficiente a de la pregunta anterior y fijando $b = 0$, ¿en cuánto varía la variable y si x aumenta en 1 unidad? ¿Qué papel cumple el coeficiente a?

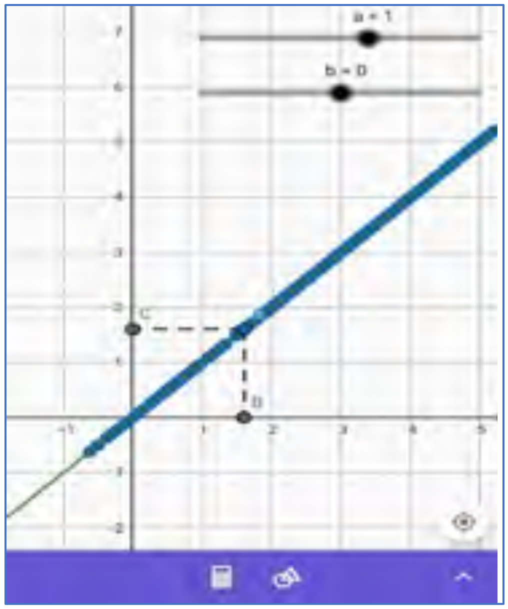

Figura 1. Representación en el registro gráfico de la función lineal afín en el GeoGebra para móviles.

La figura 1 muestra la imagen de un celular en el que se utilizó el GeoGebra para móviles en la construcción de la función $f(x) = ax + b$. A partir de los deslizadores a y b, y del punto B colocado en el eje X, se construyó un punto C en el eje Y, de coordenadas $(0; a \cdot x(B) + b)$. Luego de encontrar el punto A, que resulta de la intersección de las rectas perpendiculares a los ejes coordenados por los puntos B y C, activar la opción de rastro para dicho punto, este describe una recta cuando desplazamos el punto B sobre el eje X, lo cual generó la noción de dependencia lineal entre las variables. A continuación, se desactivó la opción de arrastre, se digitó en la barra de entrada la instrucción $f(x) = ax + b$ y se procedió a manipular los deslizadores a y b, esto permitió observar qué efecto tienen estos parámetros en la representación gráfica de la función.

Con esta actividad se realizó el análisis de la función lineal afín, utilizando rectas, puntos y deslizadores, entre otras herramientas del GeoGebra móvil para construir un modelo dinámico de esta función. A partir del arrastre se establecieron las relaciones variacionales entre las variables x y y, así como el papel que cumplen los parámetros a y b de la representación algebraica de la función lineal afín $f(x)$; asimismo, se identificaron propiedades de este tipo de función y se representó la función en el registro gráfico.

En la figura 2, se observa el uso del GeoGebra para móviles en dos docentes participantes del taller, que realizaron la construcción del modelo dinámico de la función lineal afín. Luego de construir la relación de dependencia lineal entre las variables y reconocer el comportamiento de la representación gráfica de la función a partir de la variación de sus parámetros a y b, se formalizó la noción de función lineal afín, esto se hizo con el objetivo de darles estrategias didácticas a los docentes participantes, para introducir este tema con sus estudiantes.

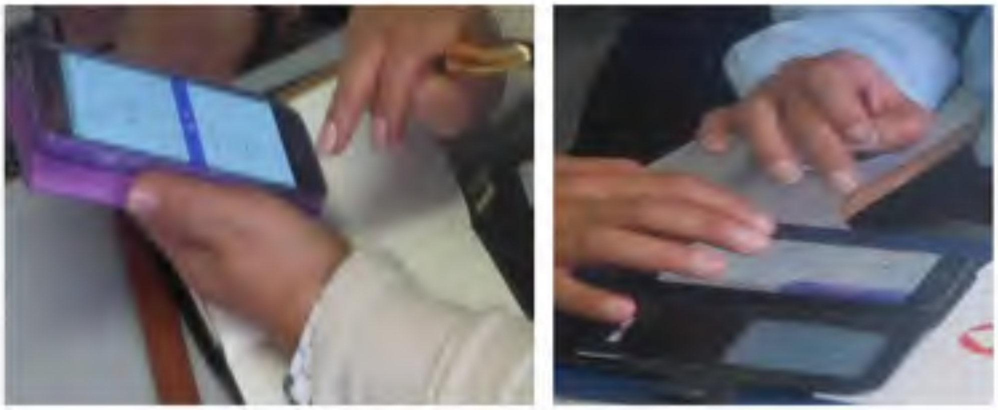

Figura 2. Construcción de un modelo dinámico de la función lineal afín en el GeoGebra móvil.

A continuación, se hizo una reflexión sobre la importancia de reconocer el aspecto variacional en el estudio de funciones y cómo el GeoGebra móvil se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, al hacer visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos, en nuestro caso de la función lineal afín. Según Leung (2008, citado en Tavera y Villa-Ochoa, 2012) se entiende por *dinamismo implícito* a aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de "animación mental", de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Actividad 2: Tarifas de un taxi

En 2018 las tarifas actuales de los taxis, son las siguientes:

Taxi libre	Banderazo \$8,74 y \$1,07 por cada 250 m o 45 seg.
Taxi de sitio	\$13,10 de inicio y \$1,30 por cada 250 m o 45 seg.
Radio taxi	\$27,30 de inicio y \$1,84 por cada 250 m o 45 seg.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona la duración (tiempo en segundos) del viaje con el costo, en cada tipo de taxi? Escríbela.
b) Anticipa: ¿Crees que habrá un punto en que pudieras pagar lo mismo por haber viajado la misma distancia en un taxi u otro?
Grafica las expresiones mediante GeoGebra y responde:
c) Después de observar la gráfica ¿Tu anticipación fue acertada?
d) ¿Cuál es el costo que tendría que pagarse por tomar un taxi para los primeros 90 segundos? Taxi libre _______ Taxi de sitio _______ Radio taxis __________

En esta segunda actividad, se presentó la situación de tarifas de taxis en donde en la *pregunta a*, se enfatiza la conversión de la representación de las funciones lineales afines en el registro de lenguaje natural a sus representaciones en el registro algebraico como se muestra en la figura 3.

Taxi libre	Banderazo $8,74 y $1,07 por cada 250 m o 45 seg.	$f(x) = 8.74 + \frac{1.07}{45}x$
Taxi de sitio	$13,10 de inicio y $1,30 por cada 250 m o 45 seg.	$g(x) = 13.10 + \frac{1.3}{45}x$
Radio taxi	$27,30 de inicio y $1,84 por cada 250 m o 45 seg.	$h(x) = 27.30 + \frac{1.84}{45}x$

Figura 3. Conversión de las representaciones de funciones lineales afín del registro de lenguaje natural al registro algebraico

Luego, los docentes reconocieron que las funciones se definen para $x \geq 0$, y con ayuda del GeoGebra móvil respondieron a las *pregunta b y c*, representando las tres funciones en el registro gráfico.

Taxi libre	$f(x) = 8.74 + \frac{1.07}{45}x$, $x \geq 0$
Taxi de sitio	$g(x) = 13.10 + \frac{1.3}{45}x$, $x \geq 0$
Radio taxi	$h(x) = 27.30 + \frac{1.84}{45}x$, $x \geq 0$

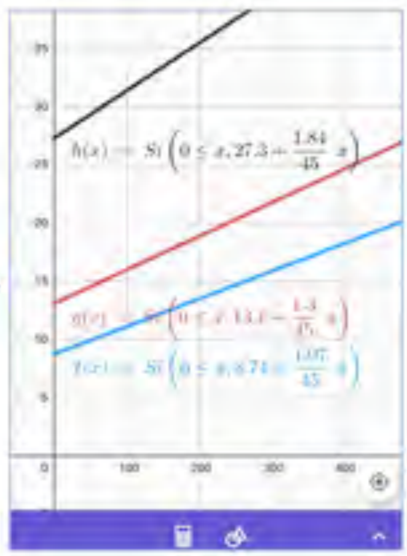

Figura 4. Conversión de las representaciones de funciones lineales afín del registro del registro algebraico al gráfico.

Para responder a la *pregunta d*, algunos docentes llegaron a la respuesta a partir de las representaciones algebraicas de las funciones que modelan las tarifas de taxi, y otros docentes determinaron la respuesta con ayuda del GeoGebra móvil al ubicar el punto con abscisa igual a 90 como se muestra en la Figura 5.

Cabe destacar que, en su mayoría, los docentes participantes del taller utilizaron la primera estrategia de solución (en el registro algebraico). Fueron solo 3 docentes, los que utilizaron la segunda estrategia (en el registro gráfico).

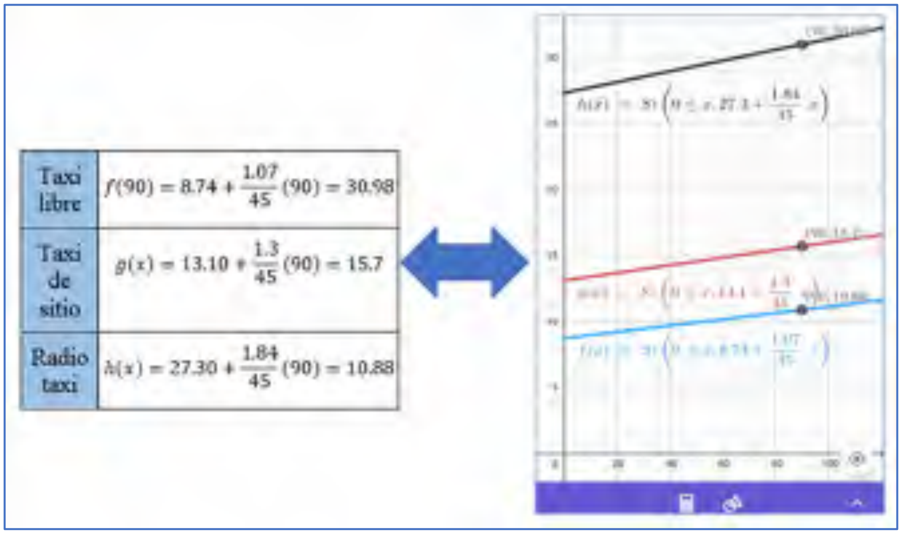

Figura 5. Estrategias usadas por los docentes al momento de responder la pregunta d

Consideraciones finales

Al trabajar el concepto de función lineal afín de manera dinámica, se pueden estudiar generalidades a partir de un análisis de la variación en aspectos cualitativos, para los que las nociones de dependencia, razón de cambio y la ordenada al origen resultan centrales y que pueden visualizarse en la representación en los registros gráficos y algebraicos de la función lineal afín. Esta visualización otorga un análisis que permite, a través de interrogantes, llevar a los participantes a una comprensión del objeto de estudio.

Los participantes reflexionaron sobre la importancia de reconocer lo variacional en el estudio de función lineal afín. Del mismo modo, reconocieron al GeoGebra móvil como una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos.

A partir de la resolución de las actividades presentadas en este escrito, se puede afirmar que los docentes participantes desarrollaron su pensamiento variacional, dado que observaron dinámicamente la relación de dependencia entre las variables x y y, y cómo afecta a la gráfica la variación de los parámetros a y b; del mismo modo, realizaron conversiones de las representaciones de la función lineal afín en los registros de lengua natural, gráfico y algebraico, mediante situaciones en contexto. Lo cual es importante porque según por Duval (1995), para conseguir el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes.

Cuando los docentes dieron respuesta a la pregunta d de la actividad 2, se evidenció lo dicho por López y Sosa (2008), acerca de que la enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, y la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado. Es por ello que afirmamos que el hecho de presentar objetos matemáticos por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí, permite atender diversos estilos de aprendizaje.

La secuencia didáctica permitió que los participantes actúen sobre los comandos y herramientas del GeoGebra para móviles, que comparen sus estrategias y nociones nuevas adquiridas relacionadas a los parámetros de la función lineal afín, mediados por el GeoGebra, y cómo estos afectan a la gráfica de dicha función, y que confirmen el uso del *software* como instrumento que les permite manipular la función y representarla en diferentes registros.

Se pudo evidenciar que el GeoGebra móvil es un recurso que permite movilizar conocimientos mediante la transición de las representaciones en diferentes registros de representación semiótica de la función lineal afín, ya que permitió la coordinación de las representaciones en diferentes registros.

Referencias bibliográficas

Denzin, N. y Lincoln, Y. (1994). Introduction entering the field of qualitative research, en Denzin, N. y Lincoln, Y (eds). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, California.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Evitts, T. (2004). *Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop While Solving Problems from Reform Curricula*. Thesis (Doctor of Philosophy) - Pennsylvania State University College of Education, Pennsylvania.

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis *Instrumental* del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php? script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200010&lng=es&tlng=es.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, p.308 - 318.

México, Secretaria de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011.Educación Básica*. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari, y G. Martínez, *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*. México D. F.: Díaz de Santos.

Perú, Ministerio de educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

PosgradoMatEdu. (2016). *Soportes tecnológicos para el pensamiento y el aprendizaje matemático. Ponente: Dr. Luis Moreno*. Recuperado de http://youtu.be/fLH6DkeDfN0

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technology to frame and foster *learners'* problem-solving experiences. En Felmer, P.; Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (eds), *Posing and Solving Mahtematical Problems*. Switzerland: Springer

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Tavera, F. y Villa-Ochoa, J. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Códoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.

Trujillo, M.; Guerrero, J. y Castro, M. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de investigación*,7(2), pp. 223 – 233. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/ 952/95270209.pdf

Vasco, C. (2002). *El pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Santafé de Bogotá.

Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching*. Dissertation. Karlstad, Suecia: Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology. Department of Mathematics and Computer Science. Recuperado de dehttp://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf