

## ESTRATEGIAS COLABORATIVAS EN LA COMPRESIÓN DE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

## COLLABORATIVE STRATEGIES IN THE UNDERSTANDING OF MATHEMATICAL INEQUALITIES

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Edgar Esaúl Saucedo Becerra, Leticia Sosa

Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com, edsaucedo@uaz.edu.mx

lsosa@uaz.edu.mx

### Resumen

Se presenta una propuesta de intervención didáctica, parte de una investigación en curso que pretende evidenciar el impacto de la incorporación de tecnologías CAS en el aula de matemáticas frente a los procesos de enseñanza–aprendizaje de un ambiente tradicional. Se utiliza como referente teórico el aprendizaje colaborativo, bajo una metodología cualitativa de corte cuasi-experimental en la que se compara el desempeño de dos grupos de alumnos en la primera etapa de formación del nivel superior. Específicamente se hace un recuento del tema de desigualdades matemáticas, elegido un tema fundamental en la construcción de conceptos de cálculo, donde los alumnos se enfrentan a situaciones que los conducirán a compartir sus conocimientos y dificultades en el tema, para lograr con ello la solución de los problemas propuestos, evidenciando así el impacto de la estrategia utilizada.

**Palabras clave:** desigualdades matemáticas, aprendizaje colaborativo, tecnología

### Abstract

This work presents a didactic approach proposal, part of an ongoing research that is aimed at highlighting the impact of the use of CAS technologies in the mathematics classroom facing up the traditional environment of the teaching–learning processes. Collaborative learning is used as a theoretical reference, with a semi-experimental qualitative methodology, where the performance of two groups of first-year university students is compared. Specifically, we describe the topic of mathematical inequalities, which was chosen as a fundamental topic in the construction of calculus concepts, where students confront the situations that will lead them to share their knowledge and difficulties in the subject, to achieve the solution of the proposed problems; thus, showing the impact of the strategy used

**Key words:** math inequalities, collaborative learning, technology

## ■ Introducción

En un afán por innovar en aquellos temas que reiteradamente presentan dificultades por parte de nuestros alumnos, como docentes incorporamos estrategias y dinámicas de trabajo que contribuyen en la disminución de los problemas que en el aula se presentan. Con esto, se propicia algún efecto en nuestros estudiantes que nos lleve a mejorar los niveles de comprensión de los conceptos expuestos.

En este sentido, se expone este trabajo, como parte de una investigación en curso que analiza el impacto de la incorporación de la tecnología CAS (Computer Algebra System) en la de comprensión de los objetos matemáticos, específicamente lo relacionado al tema de desigualdades matemáticas, puesta en marcha mediante estrategias de trabajo colaborativo.

Se realiza una comparación del desempeño de dos grupos de alumnos del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en un laboratorio de la materia de pre-cálculo: uno mediado con tecnología CAS y el otro en un ambiente tradicional de lápiz y papel.

El objetivo es evidenciar el impacto que proporciona cada una de las herramientas en los desempeños de los propios alumnos, ya que como mencionan Cordero y Moreno (2005, citados en García, 2013): “Una de las causas más significativas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes se encuentra en que la enseñanza de la disciplina se ha venido realizando, desde hace mucho tiempo, desde una perspectiva “axiomatizada”, algorítmica y rutinaria. Esto lleva a considerar a las matemáticas como un conjunto de reglas y fórmulas que existen y valen por sí mismas, incluso ajenas a la cotidianeidad y al entorno de los sujetos”, por lo que se ponen en juego diferentes dinámicas, en las que los alumnos interactúan con sus compañeros, con el profesor como mediador del proceso.

Se utiliza una metodología cualitativa, de corte cuasi-experimental en la que se tienen dos grupos de alumnos ya establecidos, se ponen en juego algunas secuencias didácticas que incorporan propuestas de actividades de clase, desarrolladas por TI (2013) y rediseñadas para su implementación en pequeños grupos de trabajo. La finalidad es que puedan observar y manipular las desigualdades en diferentes representaciones, planteando con ello soluciones a problemas propuestos. En los resultados, se evalúa tanto en el contenido como en el proceso, distinguiendo claras ventajas de la implementación de tecnología ante las estrategias de trabajo tradicionales desarrolladas.

## ■ Marco teórico

El sustento teórico que respalda el trabajo es el aprendizaje colaborativo, el cual tiene sus orígenes en la teoría constructivista, postulada en los trabajos de Jean Piaget y complementada con los de Lev Vygotsky. Se pone mayor énfasis la interacción social como factor clave para el aprendizaje y la transmisión de la cultura (Galindo, Galindo, Martínez, Ley, Ruiz y Valenzuela, 2012). Ambas teorías señalan que la importancia es la obtención del conocimiento por el individuo mismo, más allá de la asimilación de información recibida.

Estas visiones multidisciplinarias, nos permiten ver al aprendizaje colaborativo como un modelo de trabajo para el aula; por ejemplo, Maldonado (2007) menciona que: “un modelo de aprendizaje interactivo invita a los estudiantes a construir juntos, para lo cual demanda conjugar esfuerzos, talentos y competencias mediante una serie de transacciones que les permitan lograr las metas establecidas concensuadamente”, (Maldonado, 2007, p. 268).

Se toman como premisas el diseño de las actividades, la participación del grupo y el respeto a las aportaciones de los compañeros. Además, este modelo de aprendizaje experimenta con la incorporación de tecnología, dando paso a lo que se conoce como aprendizaje colaborativo mediado por computadora (CSCL, por sus siglas en inglés). Se

define como “una disciplina en la que las ciencias de la educación combinan la noción de aprendizaje colaborativo con el potencial de las TICs para apoyarlo” (Stahl, et. al, 2006, citado en Onrubia, Colomina y Engel, 2010, p. 235).

Por su parte, Galindo, et. al. (2012) lo describen como el resultado de la suma de diferentes teorías, afirmando que:

Comprende la corriente tradicional del aprendizaje cooperativo (Slavin, 1999; Johnson & Johnson, 1999), pero suma aportes neopiagetianos, como la teoría del conflicto sociocognitivo (Doise & Mugny, 1981), neovygotskianos, como la teoría de la intersubjetividad y del aprendizaje situado (Rogoff, 1993; Wertsch, 1988; Cole, 1990) y sistémicos, como la teoría de la cognición distribuida (Hutchins, 1991; Salomon, 2001), y converge en la teoría del aprendizaje colaborativo mediado por computadora (Computer Supported Collaborative Learning) (O'Malley, 1989; Warschauer, 1997).

(Galindo, et. al., 2012, p. 1-2)

Esta dinámica permite unir e intercambiar los esfuerzos de los participantes de un grupo, con la finalidad de llegar a un objetivo común. Para ello es necesario establecer estrategias que propicien esta colaboración, vigilando en todo momento que todos los miembros del equipo se involucren en el proceso de manera homogénea, con una participación activa en la que expongan sus puntos de vista y lleguen a un acuerdo común, además de estar convencidos de que cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos compartidos.

Por otra parte, como el trabajo se desarrolla de manera colectiva, se debe evaluar tanto los resultados como el proceso de asimilación; Maldonado (2007) menciona que el trabajo colaborativo debe contar con las siguientes características:

1. Un profesor o facilitador. Acompaña la dinámica y funge como mediador
2. Responsabilidad por la tarea. Individual y grupal.
3. División baja de tareas. Realizar el trabajo juntos
4. Proceso para construir el resultado final. En conjunto, en ningún caso corresponderá a la suma de esfuerzos o desempeños individuales.
5. Responsabilidad por el aprendizaje. Miembros del grupo con el acompañamiento del profesor.
6. Tipo de conocimiento. No fundamental, se requiere razonamiento, cuestionamiento y discusión

Cabe aclarar que el aprendizaje colaborativo no necesariamente está ligado a la implementación de tecnología, y sin embargo permite su incorporación de una manera natural, por lo que lo consideramos un escenario ideal para estudiar el impacto que pudiera tener en el aula el uso de herramientas tecnológicas y tradicionales.

Se selecciona la tecnología CAS, entendida como toda aquella que permite interactuar con paquetes de software en los que es posible operar simbólicamente expresiones matemáticas con variables en sus diferentes representaciones, ideal para manipular las desigualdades en diferentes representaciones semióticas.

Por otra parte, las actividades planteadas en las secuencias involucran resolver alguna desigualdad, entendido este proceso como “encontrar el conjunto de todos los números reales que hacen que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizás un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números, o en algunos casos, la unión de tales intervalos” (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, pag. 8), que involucran la utilización de las propiedades de los números reales y valor absoluto de desigualdades.

## ■ Metodología

La propuesta se pone en marcha bajo una metodología de investigación cualitativa de corte cuasi-experimental con dos grupos de alumnos previamente establecidos; conformados por 12 alumnos del primer semestre de la

Licenciatura en Matemáticas: un grupo de control, que trabaja bajo un esquema de clase tradicional con lápiz y papel y otro experimental, cuya herramienta de trabajo es la tecnología CAS, específicamente calculadoras TI-NSpire CAS. Ambos grupos utilizan las mismas secuencias didácticas con diferencia del método de manipulación.

La investigación que se realiza consta de cuatro fases:

1. Análisis preliminar y selección de actividades. Primeramente, se realizaron dos entrevistas a los maestros que imparten clases en el programa de Licenciatura en Matemáticas, la primera (cara a cara) con la finalidad de conocer el tipo de estrategias didácticas a las que recurren; y la segunda (por medio de un cuestionario virtual) para detectar los temas que desde su percepción provocan algún problema a los alumnos en el área de pre-cálculo (figura 1); encontrando a las desigualdades como el tema de mayor conflicto en el área.

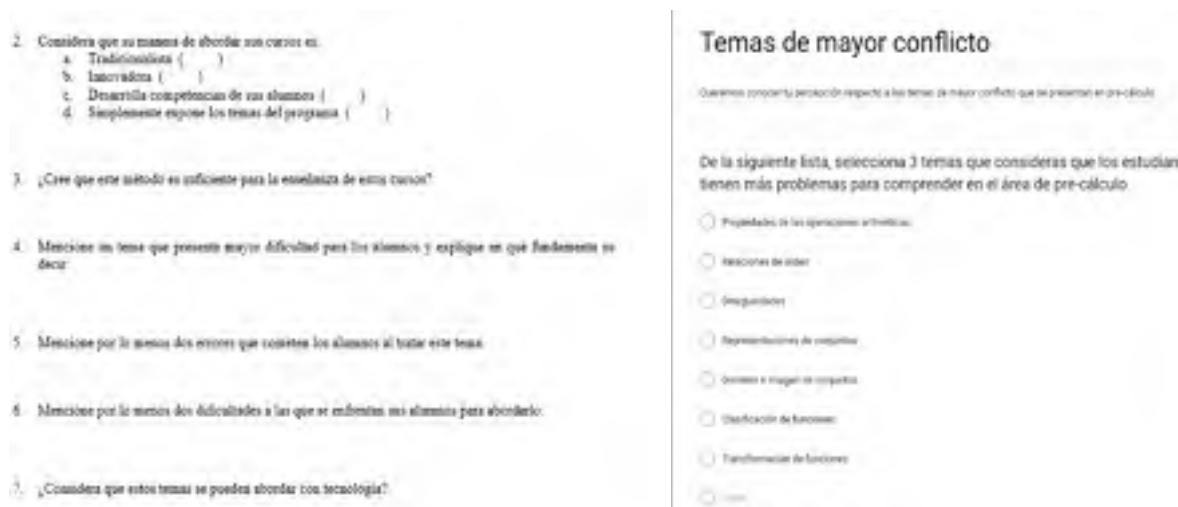


Figura 3. Captura de las entrevistas realizadas a maestros

En base a los resultados obtenidos, se toma como referencia el análisis realizado por Bernardis, Nitti y Scaglia (2017), quienes describen las desigualdades a lo largo de la historia, y encuentran que “los símbolos  $<$  y  $>$  se introdujeron por primera vez por el matemático inglés Thomas Harriot en su obra *Artis Analyticae Praxis* publicada en Londres en 1631, inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano (figura 2) para inventar los símbolos de las desigualdades” (Bernardis, et. al, 2017, p.178), encontrando que las desigualdades se pueden entender como un fenómeno de ordenación, generalización y especificación, procesos que deberán estar presentes en las actividades planteadas.



Figura 4. Insignia del orden de los símbolos (Bernardis, Niti y Scaglia, 2017, p. 178)

2. Diseño y elaboración de secuencias didácticas. Se diseña una secuencia que consta de 5 actividades, 4 de ellas para el trabajo en equipo, indicando los momentos de interacción, con la finalidad de implementarlas bajo un esquema de trabajo colaborativo; generando un instrumento guiado para el grupo de control (figura 3) y un libro de actividades digitales para el grupo experimental (figura 4), así como una actividad planteada como evaluativa, que será trabajada de manera individual.

**Actividad 1. Noción de orden de una desigualdad**

Instrucciones: En equipo discutan los procedimientos necesarios para demostrar gráficamente y simbólicamente las siguientes situaciones, posteriormente elijan el signo final de la expresión.

1. Multiplicar  $-5 < 7$  por 2  $-5 < 14$
2. Multiplicar  $-5 < 7$  por  $-2$   $-5 > -14$

3. Sergio es 4 años mayor que Mario, ¿cómo será dentro de 5 años?  
 $S > M = 4$  años  $\Rightarrow$  (igual o menor que Sergio)  $\Rightarrow$  (igual o mayor que Mario)

**Actividad 2. Identificación de inequaciones en diferentes contextos**

Instrucciones: Observen la siguiente representación gráfica de  $y < x + 2$  en el plano, los valores que se satisfacen se representan con una sombra en el plano y (como un rayo) en la recta, la línea frontera es pintada ya que los valores en ella no satisfacen la inequación, por lo tanto el intervalo que la satisface es:  $(2, \infty)$ . Tomando como referencia esta representación, discutan con sus compañeros de equipo y elijan o escriban el intervalo que la satisface a la expresión en la primera columna, posteriormente representen en la recta como un rayo.

Figura 5. Instrumento de trabajo del grupo de control.

Figura 6. Contexto de trabajo del grupo experimental

Esta parte representa la de mayor carga para el profesor, pues se planean los tiempos de trabajo de los equipos, el monitoreo del trabajo realizado por cada uno de los integrantes, así como los momentos de intervención y/o mediación de las actividades.

3. Experimentación y recogida de datos. Cada actividad se realizó en el laboratorio de cómputo de la unidad académica, en 4 sesiones de 60 minutos, 30 minutos de trabajo en equipo y 30 minutos de confrontación de opiniones y consenso.

En cada grupo se conformaron equipos de 3 integrantes, de acuerdo a las afinidades de los propios alumnos. En general la dinámica de trabajo se realizó como se esperaba, pues en el momento de las indicaciones se dio la consigna de que se elegiría a uno de los integrantes de manera aleatoria para que argumentara el porqué de la elección que hicieron, los alumnos participaron activamente, ya sea cuestionando o explicando a sus compañeros de equipo tomando así la responsabilidad y no la división de las tareas planteadas (ver figuras 5 y 6).



Figura 5. Trabajo del grupo de control



Figura 6. Trabajo del grupo experimental

4. Análisis y evaluación de resultados. Los planteamientos se realizaron en diferentes representaciones, pasando de lo aritmético a lo gráfico, de lo verbal a lo algebraico, de lo gráfico a lo simbólico y de lo algebraico a lo verbal.

Una vez realizadas las actividades grupales, se compartieron los resultados de cada equipo: en el grupo de control se intercambian las hojas de repuesta, mientras que en el grupo experimental, se proyecta la

comparación de selecciones en las calculadoras una vez que se reciben - vía TI Navigator - las respuestas de todos.

En ambas modalidades se propicia con ello una discusión con el profesor como mediador, con la finalidad de tomar como referencia los esfuerzos de cada equipo y llegar primeramente a un consenso argumentado y posteriormente una conceptualización construida en grupo.

### ■ Análisis de resultados

Dentro de la evaluación del proceso, en la dinámica de trabajo se observó que algunos integrantes de los equipos formados en el grupo de control no participaron en todas las actividades, argumentando que no se acordaban del tema, lo cual corrobora los argumentos presentados por los maestros en la segunda entrevista, donde resaltan que no fomentan el trabajo colaborativo porque “no todos trabajan”, sin embargo, a medida que avanzaron las actividades y las dinámicas de confrontación, se mejoró notablemente la participación. En contraparte, en otros equipos fue notable la explicación de unos a otros, lo que propició que sus resultados y argumentos individuales fueran mejores notablemente.

En contraparte, en el grupo experimental, la dinámica de trabajo motivó de sobremanera la participación de todos los integrantes, en un primer momento por el hecho de manipular individualmente la calculadora y después evidenciar sus resultados en la confrontación (ver figura 7), esto se vio reflejado en las respuestas del equipo; por lo que en este sentido el trabajar con tecnología representó una ventaja para los alumnos, así mismo, nos da elementos para considerar una evaluación favorable al proceso de integración, sin que esto implique que se empleen nuevas estrategias para propiciar la participación.

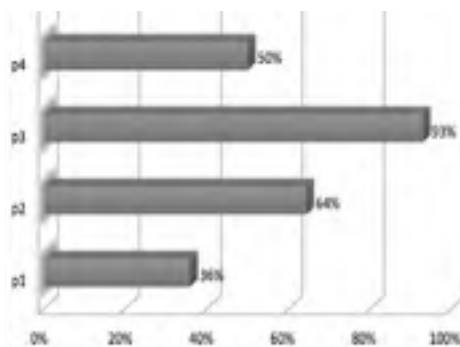


Figura 7. Confrontación de respuestas en el grupo experimental

En cuanto al cambio de representación de las actividades planteadas, se encontró que el contexto gráfico brindó elementos a los participantes para comprender el concepto de orden y posición, pues una vez que lo representaron gráficamente, observaron lo que sucedía y expresaron “las flechas cambian de dirección cuando en la desigualdad entra un número negativo”, y luego lo corroboran en la representación aritmética, indicando con una “X” que la desigualdad no es verdadera; mientras que uno de los equipos expresó este resultado al cambiar el signo de la desigualdad pero no realizó correctamente el desplazamiento en la gráfica (ver figura 8).

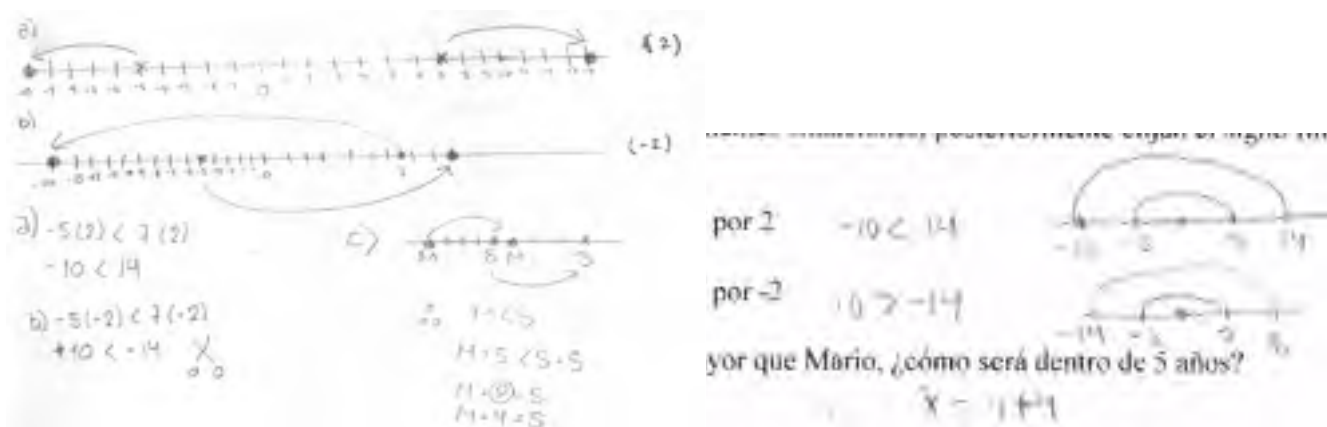


Figura 8. Trabajo en la representación gráfica y aritmética del grupo de control

Por otro lado, en el grupo experimental, a quienes se les presentaron áreas sombreadas en el contexto gráfico, no tuvieron problemas para interpretar el sentido en que debía representarse el rayo, como se puede observar en la respuesta del equipo “star” (figura 9).



Figura 9. Representación de la desigualdad del equipo “star”

Del mismo modo, los participantes en el grupo de control en su mayoría representaron correctamente la desigualdad como un rayo, sin embargo, ésta no se vio reflejada en la representación simbólica, a diferencia del grupo experimental, quienes una vez que observaron la representación gráfica, detectaron los elementos que determinan si un conjunto es cerrado o abierto; consideramos entonces que la representación gráfica y algebraica es la ventaja principal que proporcionan las calculadoras.

En cuanto a los argumentos verbales que debían guardar en los instrumentos trabajados, el grupo de control la realizó de manera más amplia, pues escribieron cada una de las cosas que observaron, mientras que en el grupo experimental almacenaron solo algunas ideas, esto último, de acuerdo a lo que manifestaron, se debió a que no podían escribir mucho, pues batallaban para encontrar las letras (la distribución del teclado de las calculadoras es en orden alfabético); por lo que la transitar de cualquier representación hacia la verbal se vuelve una desventaja de las calculadoras CAS utilizadas.

Finalmente, en la actividad de evaluación, se pudo observar que los estudiantes de ambos grupos están familiarizados con la representación algebraica de las desigualdades, las actividades les permitieron “ver” la forma correcta de representar el conjunto solución en diferentes contextos; por otro lado, el grupo experimental concluyó que las desigualdades no-inclusivas tienen un círculo vacío en la recta numérica o una línea frontera discontinua en



el plano coordenado, imágenes previstas en las representaciones gráficas presentadas en las calculadoras, evidenciando también algunas propiedades de los reales que se reflejan en la noción de orden de las desigualdades.

## ■ Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, podemos concluir por una parte las dinámicas del trabajo colaborativo puestas en marcha rindieron resultados favorables, pues el proceso permitió que aquellos estudiantes que en un primer momento no querían participar, fueron motivados por sus compañeros de equipo, propiciando una participación general de los participantes.

Por otra parte, en cuanto al manejo de las herramientas puestas en juego, nos podemos dar cuenta de que en algunos procesos, tales como el tratamiento aritmético, la actividad realizada fue la misma para ambos grupos, es decir, es necesario replantear este tipo de actividades de forma que no se haga lo mismo con la tecnología que con el papel, implementado espacios para que los alumnos puedan realizar operaciones que les permitan reflexionar el proceso y no solo seleccionen posibles respuestas.

Corroboramos que la incorporación de herramientas tecnológicas en el aula de clase representa un impacto positivo en la comprensión del concepto de desigualdad sobre todo en el manejo e interpretación gráfica; más no así cuando se habla de una representación verbal, como se describió en el análisis de resultados, dependiendo de la dinámica que se lleve a cabo para incentivar la participación de los alumnos y se realice un cierre por parte del profesor, de modo que los estudiantes encuentren sentido al desarrollo de cada actividad, así como a su participación en el grupo.

Concluimos también que combinando las seis características del trabajo colaborativo que menciona Maldonado (2007), podemos alcanzar los objetivos previstos en las actividades planteadas

## ■ Referencias bibliográficas

- Bernardis, S. Nitti, L. y Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática*, 29 (3) 161- 187.
- Galindo, R., Galindo, L., Martínez, N., Ley, M., Ruiz, E. y Valenzuela, E. (2012). Acercamiento epistemológico a la Teoría del Aprendizaje Colaborativo. *Revista Apertura*, 4(2). Recuperado de: <http://www.udgvirtual.udg.mx/apertura/index.php/apertura/rt/printerFriendly/325/290#conceptual>
- García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *The Free Library by farlex*. Gale, Cengage Learning. Universidad de Costa Rica. Recuperado de [https://www.thefreelibrary.com/\\_/print/PrintArticle.aspx?id=345775045](https://www.thefreelibrary.com/_/print/PrintArticle.aspx?id=345775045)
- Maldonado, M. (2007). El Trabajo Colaborativo en el Aula Universitaria. *Revista Laurus*, 13 (23), 263-278. *Universidad Pedagógica Experimental Libertador*, Caracas, Venezuela.
- Onrubia, J.; Colomina, R. y Engel, E. (2008). Los entornos virtuales de aprendizaje basados en el trabajo en grupo y el aprendizaje colaborativo, *Psicología de la educación virtual. Enseñar y aprender con las tecnologías de la información y la comunicación*. Coll y Monereo (eds.), Madrid: Morata, (pp. 233-252)
- Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo. Pearson Educación, México.
- TI (2013). Actividades de clase: Desigualdades. Texas Instruments Education Technology. Recuperado de: <https://education.ti.com/es/activity/search/advanced#!gs=recent&k=desigualdades&pgs=15>