RAZONAMIENTO COMBINATORIO DEL TRENZADO ARTESANAL: UNA INNOVACIÓN CON FUTUROS PROFESORES

COMBINATORIAL REASONING OF CRAFT BRAIDING: AN INNOVATION WITH PROSPECTIVE TEACHERS

Veronica Albanese, Carmen Batanero, Juan Jesús Ortíz
Universidad de Granada. (España)
vealbanese@ugr.es, batanero@ugr.es, jortiz@ugr.es

Resumen
Se presenta una experiencia de innovación docente que promueve el razonamiento combinatorio a partir del estudio del trenzado artesanal y se encuadra en el programa de formación de profesores en Etnomatemática. Participan en el estudio un grupo de futuros profesores que aprenden a realizar trenzas de 4 hilos y a modelizarlas usando grafos, para después inventar nuevos grafos de trenzas de 16 hilos a partir de patrones combinatorios identificados en las trenzas de 8 hilos. Se observa el uso de diferentes modelos combinatorios y que todos los grafos construidos representan efectivamente trenzas, aunque raramente se identifican todos los posibles.

Palabras clave: etnomatemática, combinatoria, grafos, formación de profesores

Abstract
We present an innovative teaching experience that promotes combinatorial reasoning based on the study of artisan braiding and focuses on the teacher education program in Ethno-mathematics. The participants in the study are a group of prospective teachers who learn to make braids of 4 threads and to model them by using graphs. Then, they invent new graphs of 16-strand braids from combinatorial patterns identified in 8-strand braids. The use of different combinatorial models is observed, and all the graphs constructed effectively represent braids although all the possible ones are rarely identified.

Key words: Ethnomathematics, combinatorics, graphs, teacher education

Introducción

Presentamos una experiencia de innovación docente que promueve el razonamiento combinatorio a partir del estudio de un elemento cultural. La experiencia se enmarca en el programa de Etnomatemática. Este nace del encuentro de estudiosos interesados en las diversas formas de hacer matemáticas y realizar prácticas matemáticas de grupos culturales diversos.

Las reflexiones epistemológicas dentro de esta línea de investigación llevan a aceptar la existencia de diversas formas de hacer matemáticas, que no tienen por qué tener una jerarquía de validez, ya que cada una adquiere sentido y efectividad en un contexto cultural específico (Barton, 1999). Asimismo, el programa de Etnomatemática se interesa en las implicaciones pedagógicas de estas reflexiones (Albanese, Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2017).

La innovación que presentamos se enmarca en este programa, en cuanto propone la construcción de un concepto matemático, el de grafo, y la promoción del razonamiento combinatorio, conectándolo con varios conceptos matemáticos que quedan implícitos, pero intervienen en la innovación (partición, patrón, permutación, entre otros), a partir de una práctica cultural específica que realiza un gremio de artesanos argentinos. Esta práctica artesanal consiste en la realización de trenzas utilizadas después para distintos usos en las labores campesinas.

Se trata de un contexto motivador para los participantes en el estudio al hacerles reflexionar sobre la matemática implícita en artesanías de su entorno próximo.

Marco teórico y antecedentes

La razón de enfocarnos en el razonamiento combinatorio es su importancia como componente del pensamiento formal y por su relación con el muestreo, base de la inferencia estadística (Lockwood y Gibson, 2016). En Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997) se enumeran otras razones para estimular el desarrollo del razonamiento combinatorio, ya que ayuda a superar errores frecuentes en el recuento y enumeración de problemas probabilísticos, aportando estrategias para su sistematización, entender cuándo y cómo considerar el orden, y evitar confusiones cuando hay (o no) elementos equivalentes.

Las implicaciones educativas del programa de Etnomatemática siguen dos vertientes (Albanese, Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2017). Por un lado se propone rescatar las matemáticas implícitas en algunas prácticas culturales extraescolares para contextualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el entorno cercano al estudiante. Por otro, se plantea reflexionar sobre la pluralidad de matemáticas existentes ligada al desarrollo de las mismas en el seno de las culturas y la consecuente oportunidad de introducir en el aula técnicas, herramientas, conceptualizaciones y visiones diversas de las tradicionales escolares, no solo respecto a las propias matemáticas que vayan más allá de las curriculares, sino también respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma.

La experiencia aquí descrita intenta abarcar ambas vertientes ya que partimos de una práctica extraescolar del entorno socio-geográfico de los participantes para construir los conceptos matemáticos –lo que responde a la primera vertiente-, por otro lado planteamos la experiencia de manera que responda a la reflexión sobre la existencia de matemáticas al plural, y formas de hacer matemáticas al plural, de hecho se deja abierta la posibilidad de encontrar modelizaciones que difieran de la artesanal y se abre un espacio de reflexión sobre las diversas formas de pensar de cada uno y cada grupo cultural.

En este documento dejamos constancia de los resultados con respecto a la primera vertiente (la segunda se destaca en otros trabajos como Albanese y Perales, 2017). Para ello es determinante hacer referencia a cómo la práctica artesanal de realización de trenzas está impregnada de conceptos combinatorios como el de grafos, partición, permutación, patrón, etc.

Investigaciones anteriores (Albanese, Oliveras y Perales, 2012, 2014) han mostrado cómo los artesanos manejan y utilizan estos conceptos combinatorios al intercambiar información sobre el trenzado manifestando sus habilidades en modelizarlo empleando grafos orientados. En los grafos orientados los vértices representan las posiciones de los hilos en un pequeño telar de madera llamado "carta" (Figura 1) y las aristas representan los movimientos de los hilos que intercambian sus posiciones para realizar la trenza.

Figura 1. Telar de madera llamado "carta", para la realización de las trenzas.
En el caso mostrado en la foto se trata de una trenza de 8 hilos.

Los artesanos razonan sobre las posibles particiones de los hilos, indicando los movimientos de los hilos como permutaciones y reconociendo los patrones que los grafos tienen que cumplir para que sí modelicen trenzas que se pueden realizar en la práctica artesanal.

Una observación relevante para el posterior análisis concierne la estructura de los grafos que sí representan trenzas. Estos están constituidos por circuitos que cumplen las siguientes características:

1. Todos los circuitos son cerrados
2. Todos los circuitos son disjuntos
3. Todos los circuitos unen el mismo número de vértices

Además, la estructura del grafo tiene ciertas regularidades:

4. El grafo es invariante por rotación de 90 grados (lo cual implica que tiene varios ejes de simetría).
5. Se trata de grafos orientados, y la orientación de los circuitos es alternada (uno es en sentido horario y otro en sentido anti horario)

Por tanto, si queremos realizar una trenza de 16 hilos, el grafo que la representa tendrá 2 circuitos de 8 vértices, o 4 circuitos de 4 vértices, o 8 circuitos de dos vértices. Lo que determina una partición del conjunto de vértices.

Contexto y metodología

La experiencia de innovación se realizó con un grupo de13 participantes, 11 de los cuales son estudiantes de una Carrera de la Universidad de Buenos Aires que los habilita para ser profesores de matemática en el nivel Secundario y que cursan la asignatura optativa *Taller de Modelización y Producción Matemática*. Las otras dos participantes son las docentes universitarias que actúan como profesoras de la asignatura.

La idea es mostrar a los participantes como los artesanos realizan trenzas simples de 4 hilos, dejar que ellos mismos las hagan y guiarlos después a que representen el proceso de realización de las trenzas a través de modelizaciones con diversos niveles de abstracción (verbal, icónico y simbólico). El modelo que de hecho utilizan los artesanos es icónico y se puede fácilmente identificar con un grafo (Figura 2).

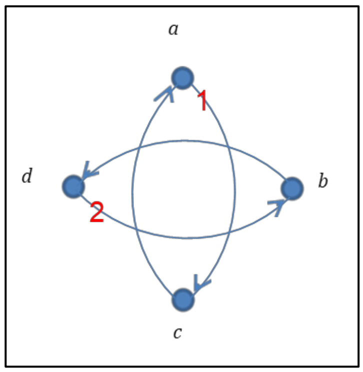

Figura 2. Grafo de la trenza de 4 hilos.

En un segundo momento, se espera que los participantes reconozcan las reglas, los patrones, para construir grafos que sean modelos de trenzado a partir de la observación de todos los grafos de 8 vértices que representan todas las posibles trenzas de 8 hilos –cabe destacar que no cualquier grafo es modelo de una trenza-. En la siguiente figura 3 se muestran todos los grafos que modelizan las posibles trenzas de 8.

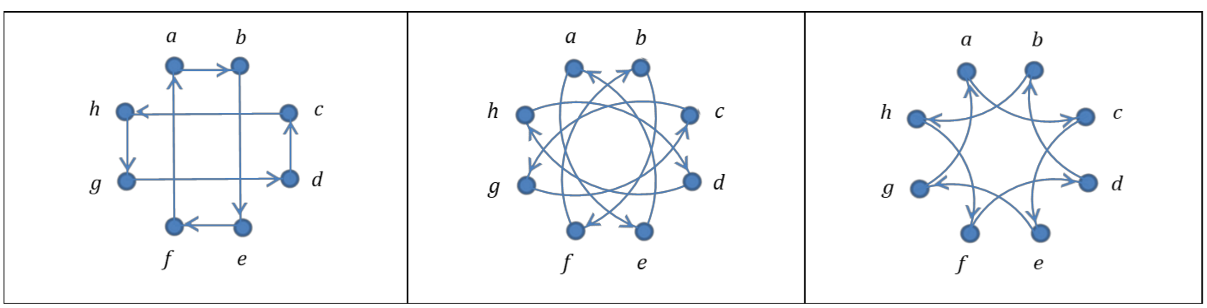

Figura 3. Grafos que representan todas las trenzas posibles de 8 hilos, que se proporcionan a los participantes para reflexionar sobre los patrones que tiene que cumplir un grafo para modelizar una trenza.

Finalmente se pide a los participantes que construyan todos los posibles grafos de 16 vértices que representan trenzados de 16 hilos. Durante el cierre de la actividad se realiza una reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y el proceso de enseñanza y aprendizaje que se vivencia a lo largo de toda la innovación. Una descripción más detallada de la experiencia realizada se encuentra en Albanese, Perales y Oliveras (2014) y Albanese y Perales (2017).

Los datos a analizar se recogen en fichas preparadas para guiar toda la actividad, que los participantes van rellenando. En particular el análisis que presentamos a continuación concierne la enumeración de los grafos de 16 vértices. Los participantes dibujan estos grafos en las fichas.

Decidimos primero realizar un recuento de grafos propuestos por participantes. Después clasificamos los grafos propuestos: primero, según si representaban o no una trenza y, segundo, por la partición de sus vértices (en 2 conjuntos de 8 vértices, en 4 conjuntos de 4 vértices, o en 8 conjuntos de 2 vértices).

Resultados

Los 13 participantes propusieron un total de 40 grafos. De ellos solo dos no responden a los patrones que permiten que se realice el trenzado. Esta observación es relevante si se considera que los participantes no conocían lo que era un grafo (excepto las dos docentes universitarias) antes de esta experiencia ya que en sus trayectorias de estudios anteriores no se había presentado tal concepto.

De los grafos que sí representan un posible trenzado, se muestra en la Figura 4 la distribución por participante. Cabe destacar que la mayoría de participantes (11 de los 13) propone más de un grafo, siendo 3 la moda de la distribución y 3,3 la media.

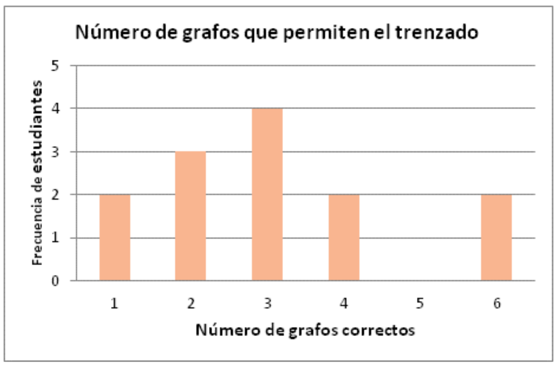

Figura 4. Número total de grafos que permiten el trenzado por participante.

Respecto a las características de la partición de los grafos propuestos, los participantes proponen una sola variante de grafo con 8 conjuntos de 2 vértices, esta se muestra en la Figura 5.

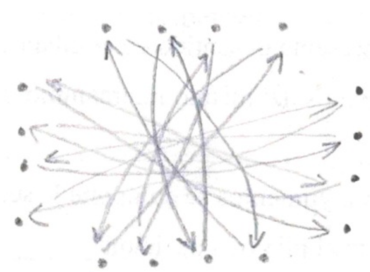

Figura 5. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

De grafos que presentan una partición con 4 conjuntos de 4 vértices, los participantes presentan muchas variantes. Se pueden contar hasta 6 topológicamente distintas. A continuación, se muestra una de ella en la Figura 6.

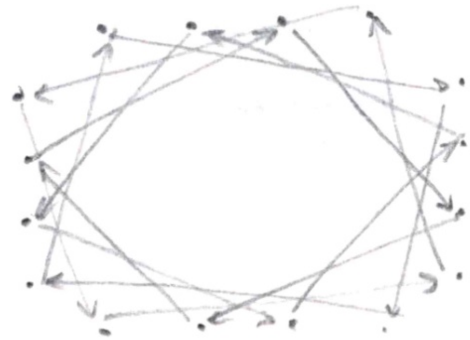

Figura 6. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

También de los grafos con partición de 2 conjuntos de 8 vértices se presentan diversas variantes. En particular, se contaron 3 topológicamente diferentes, una de las cuales se muestra en la siguiente Figura 7.

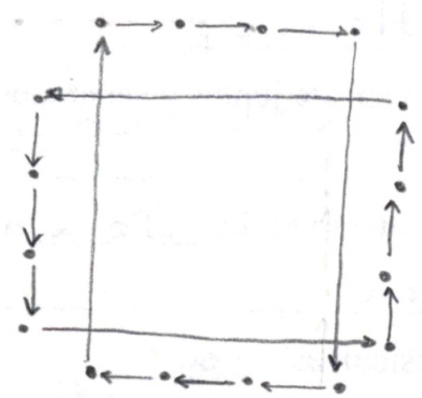

Figura 7. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

Además 8 de los 13 participantes proponen 2 grafos distintos por al menos una misma partición. Para valorar esta afirmación es relevante recordar que entre las trenzas de 8 hilos propuestas en la actividad anterior a la analizada aquí se proponen dos grafos con una misma partición de 2 conjuntos de 4 vértices. Esto puede haber influido en que más de la mitad de los participantes buscaran más grafos distintos por cada partición posible.

Es notable destacar que solo tres de los 13 participantes proponen por lo menos un grafo por cada partición, y en cada caso proponen más de un grafo por al menos un tipo de partición entre las de 4 conjuntos de 4 vértices y la de 2 conjuntos de 8 vértices (por ellos estos 3 están incluidos entre los 8 mencionados anteriormente). Uno de ellos es una de las dos docentes universitarias.

Asimismo, cabe destacar que solo en dos casos hay evidencias de que los participantes identificaron primero las posibles particiones y después construyeron grafos para cada una de ellas.

Conclusiones

Los resultados muestran que todos los participantes consiguen encontrar por lo menos un grafo que permite el trenzado, y que la mayoría encuentra más de uno. Asimismo, cabe destacar que son muy pocos los grafos propuestos que no permiten el trenzado, lo cual es relevante si se considera que casi todos los participantes no tenían conocimiento previo sobre grafos antes de esta experiencia.

Son escasos los participantes que consiguen sistematizar tal enumeración basándose en otros conceptos matemáticos, por ejemplo, el de las posibles (y permitidas) particiones de los vértices del grafo.

Como valor añadido de la actividad propuesta se destaca su valor formativo para los futuros docentes por la metodología propuesta que implica de la construcción de un concepto matemático a partir de un artefacto concreto.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Albanese, V., Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2017). Ethnomathematics: Two theoretical views and two approaches to education. En: M. Rosa, L. Shirley, M. E. Gavarrete, & W. V. Alangui (Eds.), *Ethnomathematics and its diverse approaches for mathematics education* (pp. 307-328). Berlin: Springer.

Albanese, V., & Perales, F. J. (2017). Una experiencia en la formación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva Etnomatemática. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 49,* 73-83.

Albanese, V., Oliveras, M. L., & Perales, F. J. (2014). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado: aplicación de un modelo metodológico elaborado. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 1-20. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a01

Albanese, V., Perales, F. J., & Oliveras, M. L. (2014). Actividad reflexiva sobre modelización etnomatemática del trenzado. En P. Lestón. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27 (567-574). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Albanese, V., Oliveras, M. L. & Perales F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Epsilon*, *29*(81), 53-62.

Barton, B. (1999). Ethnomathematics and philosophy. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *31*(2), 54-58.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. E I.O.S. Press.

Lockwood, E. & Gibson, B. R. (2016). Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 247-270.