

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE TEACHING OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS IN A VARIABLE THROUGH PROBLEM SOLVING FOR FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS DURING THEIR INITIAL TRAINING

Christian Alfaro Carvajal, Jennifer Fonseca Castro
Universidad Nacional. (Costa Rica)
cristian.alfaro.carvajal@una.cr, jennifer.fonseca.castro@una.cr

Resumen

El objetivo principal de este trabajo fue elaborar una propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable, mediante la resolución de problemas para la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica. Para ello se realizaron tres fases: (1) en la primera, se indagó sobre la perspectiva de las autoridades de las escuelas de matemáticas de las universidades públicas costarricenses, de su personal docente de matemática y del estudiantado avanzado de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional, sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo en la preparación de docentes de matemática en formación inicial, (2) en la segunda, se investigó el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica y (3) en la tercera se diseñaron actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas.

Palabras clave: formación de profesores, cálculo

Abstract

The main objective of this work was to develop a methodological proposal for the teaching of differential and integral calculus in a variable through problem solving for the teaching mathematics' career at the National University in Costa Rica. For this, three phases were carried out: (1) in the first one, it was inquired about the perspective of authorities of the mathematics schools of the Costa Rican public universities, its teaching staff of mathematics, and advanced students of the career of teaching mathematics at the National University, on the purposes, the approach, the methodology, and the contents of greater difficulty in the teaching and learning of calculus in the initial training of the teachers of mathematics; (2) in the second, the use of problem solving as a methodological strategy for higher education in Costa Rica was investigated; and (3) in the third, methodological activities were designed based on problem solving for the teaching of successions, limits, and derivatives.

Key words: teacher training, calculus

■ Introducción

En la actualidad, el desarrollo del conocimiento científico y tecnológico requiere de la formación de profesionales con altas capacidades matemáticas y científicas para afrontar las exigencias de un mundo cada vez más globalizado y más competitivo. Particularmente, la Educación Matemática tiene una responsabilidad fundamental en la formación de estudiantes cada vez más reflexivos y analíticos. Desde esta perspectiva, es necesario que la educación superior contribuya con la formación de profesores de matemáticas altamente calificados, con sólidos conocimientos matemáticos y con herramientas pedagógicas y tecnológicas adecuadas que permitan el desarrollo de las habilidades cognitivas y el desarrollo integral en sus estudiantes.

En Costa Rica, la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional (UNA), como formadora de docentes de matemática, ha asumido el reto de coadyuvar en la formación idónea de profesionales en la enseñanza de la matemática, por tal razón, desde el año 2010 inició un proceso de revisión del plan de estudios de la carrera de enseñanza de la matemática para elaborar una nueva propuesta de currículo por competencias. Como parte de las acciones de mejora en el año 2015 inició el proyecto de investigación denominado *La Resolución de Problemas como estrategia metodológica en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en una variable en la Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional* sobre el que se presentan los resultados en este artículo.

Este proyecto se desarrolló de enero de 2015 a diciembre de 2017 con dos objetivos básicos: uno explícito, que fue la elaboración de una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas para el abordaje de la línea del cálculo diferencial e integral en una variable y otro implícito, que era servir como modelo para la elaboración de propuestas para el abordaje de otras áreas disciplinarias tales como álgebra, geometría, estadística, probabilidades y teoría de números.

El trabajo tuvo tres fases. Las dos primeras fueron investigaciones empíricas para determinar la perspectiva de las autoridades de las escuelas de matemáticas de las universidades públicas costarricenses, de su personal docente de matemática con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y del estudiantado avanzado de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional, sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo en la preparación de docentes de matemática en formación inicial y el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica. La tercera fase fue el diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para los temas de sucesiones, límites y derivadas.

■ Marco teórico

La enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación inicial de profesores de matemáticas

La enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo principal la preparación de los individuos para la vida en sociedad, para el estudio de carreras universitarias en ciencias y tecnología y para estimular la creatividad (D'Ambrósio, 2002). Específicamente, el cálculo diferencial e integral es un área que favorece la formulación de conjeturas, el razonamiento inductivo, la argumentación y los procesos deductivos (Fischbein, 1994).

El cálculo fue desarrollado fundamentalmente alrededor de dos ideas: variación y acumulación. Durante los siglos XVII y XVIII, fue central en el desarrollo de las ciencias. No obstante, a inicios del siglo XIX, se dio una mayor preocupación por el rigor, de forma tal que en la actualidad los enfoques se preocupan más por la formalización que por el desarrollo de las ideas y métodos genuinos que van dirigidos a la resolución de problemas científicos (Ímaz y Moreno, 2009). De esta manera, su enseñanza ha estado tensada entre dos extremos: una enseñanza muy formal

que apela a definiciones, teoremas y problemas estándar o el abandono de lo conceptual tanto en los cursos como en los libros de texto, los cuales se restringen solamente a un elenco de ejercicios (Cuevas y Pluinage, 2009; D'Ambrósio, 2002).

Con base en lo anterior, se requiere que la enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación inicial de profesores de matemáticas favorezca la adquisición de competencias para su desarrollo profesional. Para ello, es necesario el planteamiento de problemas de aplicación, de forma que se utilice, se descubra, se explore y se desarrolle por parte de los futuros docentes. Se trata de tener un equilibrio entre lo formal y lo intuitivo (Ball, Thames y Phelps, 2008; Cuevas y Pluinage, 2009).

La resolución de problemas

Existen diferentes concepciones sobre lo que es un problema y la resolución de problemas. Stanic y Kilpatrick (1989) reconocen tres propósitos de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: (a) como contexto, para estimular y motivar al estudiante y lograr el aprendizaje de conceptos; (b) como una habilidad en sí misma que se debe enseñar en el currículo; o (c) como medio para “hacer matemática”. Puig caracteriza el proceso de resolución como “la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (Puig, 1998, p. 31).

Según Lesh y Zawojewski (2007) la resolución de problemas se entiende como el “proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas” (citado por Santos-Trigo, 2008, p.161). Lo anterior sugiere ciclos de reflexión, definición y revisión de ideas y conceptos por parte de los estudiantes. Para estos autores, la meta final de resolver el problema no es la respuesta, sino “identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema” (Santos-Trigo, 2008, p. 161). Por otro lado, la resolución de problemas es la actividad que “conlleva al desarrollo o construcción de un pensamiento inquisitivo donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan el uso y formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina” (Santos-Trigo, 2008, p. 176).

La resolución de problemas debe permitir a los estudiantes formular preguntas, identificar conjeturas o relaciones, y sustentar y comunicar resultados. Estas actividades deben desarrollarse dentro de una comunidad de aprendizaje donde el trabajo individual y colaborativo es valorado.

■ Marco metodológico

La investigación constó de dos fases empíricas y una fase de construcción de la propuesta metodológica. A continuación, se detalla cada una de ellas.

La fase 1. Los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la preparación de docentes de matemática en formación inicial

Esta primera fase consistió en una investigación cualitativa con carácter descriptivo para determinar la perspectiva sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo de tres grupos de sujetos:

(a) *Autoridades administrativas de las escuelas de matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR), la Universidad Nacional (UNA), el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y la Universidad Estatal a Distancia (UNED):* participaron seis autoridades administrativas (dos de la UCR, dos de la UNA, uno del ITCR y uno de la UNED) con puestos tales como dirección de escuela o coordinación de departamento o área.

(b) *Personal docente de matemática con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable de dichas instituciones:* se contó con 58 personas de las cuatro universidades participantes. Para la escogencia de este grupo académico, se consultó a las autoridades de cada universidad participante. Los participantes han impartido al menos un curso en la línea del cálculo diferencial e integral en una variable para servicio o para la carrera de Enseñanza de la Matemática en alguna de las universidades antes mencionadas.

(c) *Estudiantes avanzados de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA:* participaron 25 estudiantes de cuarto o quinto año del plan de estudios de la carrera que habían aprobado los cursos en la línea del cálculo diferencial e integral en una variable de su plan de estudios.

La recolección de datos se llevó a cabo durante el segundo semestre del 2015 y se emplearon tres técnicas que se describen a continuación:

(a) *una entrevista a las autoridades administrativas de las escuelas de matemática de las universidades estatales participantes:* los temas tratados fueron el objetivo del cálculo diferencial e integral y la metodología empleada en los cursos de formación de futuros docentes de matemática y para otros grupos profesionales. Además, se consultó sobre la utilización de resolución de problemas como metodología de enseñanza en los cursos de cálculo diferencial e integral; y los temas que presentan mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Las entrevistas fueron grabadas con el objetivo de complementar y triangular la información obtenida.

(b) *un cuestionario dirigido al personal docente de matemática de las escuelas de matemática:* constaba de cinco apartados: (a) información general del sujeto encuestado, (b) resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática, (c) propósitos y enfoques en la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable, (d) tipos de dificultades y errores en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable, (e) temas y contenidos de mayor dificultad en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable. Cada apartado estaba constituido de preguntas cerradas y una o dos preguntas abiertas. Los ítems incluyeron escalas de Likert y de ordenación. El cuestionario se aplicó de forma digital utilizando la plataforma de la Universidad Nacional y el software LimeSurvey con la licencia respectiva de dicha institución.

(c) *un taller con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UNA:* se elaboró una lista de preguntas generadoras sobre los propósitos del cálculo diferencial e integral en la formación de futuras generaciones de docentes de matemáticas, sobre el enfoque de enseñanza y la metodología recibidos en los cursos de cálculo y los que consideraban más apropiado.

La fase 2. El uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica

Esta segunda fase consistió en una investigación cualitativa de carácter descriptivo para determinar la perspectiva de los 58 docentes de las Escuelas de Matemáticas de la UCR, UNA, ITCR y UNED que se mencionaron en la fase 1 anterior sobre el uso de la resolución de problemas como estrategia

metodológica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable a nivel de la educación superior. La información se recolectó con el cuestionario que se les administró en la fase 1, específicamente, los datos se tomaron del apartado *(b) resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática*. Para el análisis de la información, se crearon dos categorías: (a) Perspectivas de docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características; (b) Perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

La fase 3. El diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas para la carrera de formación de profesores de matemáticas en la Universidad Nacional

Para el diseño de las actividades se realizó una recopilación de problemas históricos que hayan potenciado el desarrollo de la línea de cálculo diferencial e integral en una variable. Se decidió abordar los temas de sucesiones, límites y derivadas. Cada tema fue subdividido en subtemas y para cada uno de ellos se planteó una situación problema que contemplaba los siguientes elementos: el objetivo general, los elementos asociados a la institucionalización, las subcompetencias a desarrollar, los conocimientos previos necesarios, las consideraciones para abordar la situación problema y el desarrollo teórico del concepto o teorema que se pretendía explorar con la situación problema.

■ Resultados

A continuación, se presentan los principales resultados de cada fase de la investigación.

La fase 1. Los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la preparación de docentes de matemática en formación inicial

Los resultados de esta fase se presentan en tres categorías: (a) los propósitos, (b) el enfoque y la metodología y (c) los temas de mayor dificultad. A continuación, se detallan brevemente.

(a) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre los propósitos de la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable para la preparación de docentes de matemática en formación inicial.

Para los sujetos de la investigación los principales propósitos del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuro personal docente de matemática son: (a) desarrollar habilidades y competencias específicas, (b) establecer bases teóricas para cursos posteriores, (c) desarrollar herramientas para la resolución de problemas, y (d) desarrollar herramientas para una mejor labor de aula. Además, debe permitirles abstraer propiedades estructurales de objetos matemáticos de manera que puedan comprenderlas mediante una demostración o refutarlas con contraejemplos, los contenidos deben favorecer los procesos demostrativos, deductivos y de abstracción mediante el análisis del comportamiento de funciones reales de variable real, el estudio del infinito, entre otros aspectos. Estos deben facilitar la comprensión y uso del lenguaje matemático al estudiantado, y para que este proponga, analice e interprete modelos de situaciones reales utilizando los conocimientos adquiridos. Además, manifiestan que el cálculo es fundamental para la comprensión de otros temas matemáticos de las distintas áreas disciplinarias de los planes de estudios de preparación de docentes de matemática en formación inicial (Fonseca y Alfaro, 2018).

(b) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre el enfoque y la metodología de la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuras generaciones de docentes de matemática.

Respecto al enfoque, los estudiantes manifestaron que en la formación se presentaron dos posiciones opuestas. Por una parte, un enfoque práctico centrado en la resolución de ejercicios rutinarios y teoremas sin demostraciones; por otra, un enfoque teórico en donde lo central era la demostración de resultados con poca aplicación de la teoría. Además, indicaron que la metodología predominante fue la clase magistral con poca participación estudiantil (Fonseca y Alfaro, 2018).

Las autoridades manifestaron que existe poca diversidad de estrategias metodológicas, coincidieron con los estudiantes en que la clase magistral es lo que más se presenta. Ambos grupos, autoridades y estudiantes, señalaron que la resolución de problemas podría ser una valiosa metodología para el abordaje de los cursos, para ello sugirieron el planteamiento de problemas no rutinarios (Fonseca y Alfaro, 2018).

En el caso de los docentes, la mayoría coincidió en que los contenidos se deben impartir en secuencia lógica y con rigurosidad matemática. Una minoría manifestó que deben desarrollarse alrededor de un problema matemático. Coinciden en que la metodología debe incluir: sesiones de resolución de problemas, sesiones de discusión y reflexión, presentaciones magistrales por parte del personal docente, sesiones de laboratorio y presentaciones magistrales por parte de estudiantes (Fonseca y Alfaro, 2018).

(c) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre los temas de mayor dificultad en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuro personal docente de matemática.

Sobre las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en cursos de enseñanza de la matemática, las autoridades las asocian principalmente a dificultades debidas al desarrollo teórico de los contenidos, dificultades asociadas a la comprensión e interpretación y dificultades asociadas a la identificación de patrones. Por su parte, los docentes las atribuyen a la poca comprensión de parte del estudiantado del lenguaje matemático, la deficiencia en el manejo de los conocimientos previos, la falta de habilidades matemáticas tales como observar patrones, conjeturar, generalizar e inferir; y la falta de abstracción y visualización del estudiantado. Finalmente, los estudiantes mencionaron que los contenidos que mayores dificultades les presentaron en su proceso de aprendizaje fueron los problemas de optimización y de razones de cambio relacionadas, series y sucesiones, la continuidad de funciones reales de variable real y los sólidos de revolución. Atribuyen dichas dificultades al enfoque del curso y a las estrategias metodológicas utilizadas por el personal docente (Fonseca y Alfaro, 2018).

La fase 2. El uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica

Los resultados de esta fase se presentan en dos categorías: (a) perspectivas de los docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características y (b) perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

(a) perspectivas de los docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características.

Esta categoría se analiza en tres subcategorías: (a1) qué es un problema matemático, (a2) los objetivos de un problema matemático y (a3) las características de un problema matemático. A continuación, se detallan brevemente.

(a1) Qué es un problema matemático.

Con respecto a esta categoría, 42 docentes de matemática participantes consideran la siguiente definición como la que más se aproxima a su concepción: “Una situación que provee al estudiante la posibilidad de discusiones y descubrimientos relacionados con algún tema”, no obstante, 14 docentes no estuvieron de acuerdo con esta definición. Además, propusieron algunas definiciones alternativas tales como: “una situación que motiva al estudiante a aprender nuevos conceptos o procedimientos” y “una situación contextualizada en la que el estudiante puede aplicar un concepto o un procedimiento matemático a una situación real”. Por otra parte, 36 docentes estuvieron en desacuerdo en que un problema matemático es “una situación que le permite al estudiante demostrar si ha aprendido un concepto o un procedimiento”. Estuvieron también en desacuerdo con la siguiente definición: “una situación que le permite al estudiante desarrollar nuevas habilidades” (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(a2) Los objetivos de un problema matemático.

En esta categoría 46 docentes manifestaron que deben utilizarse para el desarrollo de habilidades para formular conjeturas y resultados matemáticos además de fungir como un elemento motivador para el desarrollo de un tema. Además, consideraron que es importante la pluralidad de soluciones para promover la discusión entre estudiantes, y el desarrollo de habilidades en la demostración de resultados utilizando la teoría estudiada (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(a3) Las características de un problema matemático.

Los docentes indicaron que el problema debe ser una situación contextualizada en la que el estudiantado no puede encontrar la respuesta inmediatamente y le implique un esfuerzo cognitivo para la construcción de nuevos conocimientos. Por lo tanto, debe tener sentido para el estudiante y dentro de la temática en la que se inserta, debe ser diferente a un ejercicio rutinario en donde se aplican algoritmos de forma mecánica. Además, debe favorecer el trabajo cooperativo y colaborativo de los estudiantes y el desarrollo de habilidades matemáticas, es deseable que permita la integración de diferentes áreas del conocimiento matemático (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(b) Perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

Los docentes afirman que han utilizado la resolución de problemas en sus clases de cálculo diferencial e integral en una variable: (a) 58 docentes afirman utilizarla al finalizar el desarrollo de un concepto matemático para la aplicación de la teoría: mencionaron a los problemas de optimización al finalizar el tema de la derivación o los problemas de sólidos de revolución al finalizar el tema de integración; (b) 57 la utilizan antes de desarrollar un concepto matemático como motivación: mencionaron el cálculo de áreas bajo curvas como tema que podría generar problemas para motivar e introducir a la integral, no obstante, no brindaron ningún ejemplo concreto; y (c) 40 la usan para construir o ilustrar algún concepto matemático. Además, 14 docentes afirman no dar ningún papel a la resolución de problemas dentro de sus cursos, seis mencionaron otros usos de la resolución de problemas en sus lecciones, pero no brindaron detalles o ejemplos de cómo lo hacen (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

La fase 3. El diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas para la carrera de formación de profesores de matemáticas en la Universidad Nacional

Se diseñaron actividades para los temas de sucesiones, límites y derivadas. Para el primer tema se realizaron seis actividades: concepto y definición de sucesión numérica, la convergencia de una sucesión numérica, la convergencia monótona, las subsucesiones, las sucesiones de Cauchy y las sucesiones numéricas propiamente divergentes. Para el segundo tema se hicieron cinco actividades: el concepto de límite, los límites laterales, los límites trigonométricos, los límites infinitos y los límites al infinito. Finalmente, para el tercer tema se elaboraron tres actividades: la definición de derivada, la optimización y; la convexidad y concavidad.

■ Conclusiones

Los profesores de matemática en formación inicial no son matemáticos, ni ingenieros ni didactas generales, por lo tanto, su formación matemática es muy particular y debe ser enfocada en función de su desarrollo profesional. Con base en los resultados de las dos fases empíricas de esta investigación se puede acotar que el cálculo diferencial e integral debe aportar, en la formación de docentes de matemática, conocimientos, habilidades y competencias acordes con su quehacer, tales como el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, la abstracción, la comprensión, el análisis de modelos matemáticos, el uso del lenguaje matemático, la deducción y la demostración, entre otros.

Las autoridades, los docentes y estudiantes consultados concuerdan que en la formación inicial de profesores de matemáticas predominan los cursos de cálculo diferencial e integral con un enfoque teórico y formalista con poca aplicabilidad, además, predomina la clase magistral con un rol pasivo en el estudiante. La resolución de problemas es considerada dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje en la solución de ejercicios posterior al desarrollo de la clase.

Las actividades metodológicas elaboradas para el abordaje de los temas de sucesiones, límites y derivadas para la formación inicial de profesores de matemática pretenden ser una propuesta que genere otra dinámica en la clase, en donde el estudiante sea gestor de su conocimiento y aprecie al cálculo como una línea matemática que puede enriquecer de manera sustantiva su proceso formativo y coadyuvar a su desarrollo profesional.

■ Referencias bibliográficas

- Alfaro-Carvajal, C. & Fonseca-Castro, J. (2018). Problem solving in the teaching of differential and integral calculus in one variable: Perspective of mathematics teachers. *Revista Uniciencia*, 32(2), 42-56. Doi <http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3>
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *Revista el Cálculo y su Enseñanza*, 1, 45-59. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=1&index_web=7&index_mgzne.
- D'Ambrósio, U. (2002). A matemática nas escolas. *Educação Matemática em Revista*, 9(11), 29-33.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. En R. Biehler., R. Scholz., R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Rudolf_Straesser/publication/227113904_Cultural_Framing_of_Teaching_and_Learning_Mathematics/links/0deec5231ab119d511000000.pdf#page=242
- Fonseca, J y Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación*, 42(2), 289-305.

- Ímaz, C y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. *Revista el Cálculo y su Enseñanza*, 1, 99-112. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=1&index_web=7&index_mgzne.
- Puig, L. (1998). Réplica a elementos de resolución de problemas, cinco años después de Ma Luz Callejo y José Carrillo. En J. R. Pascual (Ed.), *Actas del Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-112. Pamplona: Universidad Pública Navarra.
- Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en Educación Matemática*, xii, 159-192.
- Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, 3, 1-22.