MODELACIÓN MATEMATICA DE RELACIONES FUNCIONALES CONTEXTUALIZADAS

MATHEMATICAL MODELING OF CONTEXTUALIZED FUNCTIONAL RELATIONS

Tulio Amaya de Armas
Universidad católica de la Santísima Concepción (Chile)
tuama1@hotmail.com

Resumen
Aquí se reportan los hallazgos de una investigación cuyo objetivo fue analizar los procesos de modelación de relaciones funcionales de estudiantes de noveno grado, como estrategia de enseñanza para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos. Se trabajó con 93 estudiantes de una escuela pública colombiana. Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes operaron por tanteo. Un grupo muy pequeño de estudiantes siguieron un patrón, el que utilizaron para encontrar una expresión algebraica. El único modelo que reconocen como representación de la situación es el algebraico. Se concluye que estos estudiantes presentan serias dificultades al modelar relaciones funcionales, lo que puede afectar la matematización de situaciones contextualizadas.

Palabras clave: modelación matemática, relación funcional, representación semiótica, tratamiento, conversión

Abstract
Here it´s report the findings of a research whose objective was to analyze the modeling processes of functional relationships of ninth grade students, as a teaching strategy to favor the learning of mathematical concepts. It´s worked with 93 students of a Colombian public school. The results show that most of the students operated by trial and error. A very small group of students followed a pattern, which they used to find an algebraic expression. The only model that they recognize as a representation of the situation is the algebraic one. It's concluded that these students present serious difficulties in modeling of functional relationships, which may affect the mathematization of contextualized situations.

Key words: mathematical modeling, functional relation, semiotic representation, treatment, conversion

Introducción

El trabajo con relaciones funcionales, según Meza y Amaya (2017) permite a los estudiantes relacionar los elementos del objeto matemático función, con elementos del contexto sociocultural donde habitan, lo que le facilita a los estudiantes asignar significados y sentidos al objeto estudiado. Tigreros (2009) señala que en la enseñanza de las matemáticas es importante que los conceptos se introduzcan de manera contextualizada; argumenta que éstos se aprenden más significativamente de esa manera, debido a que los estudiantes manifiestan interés por responder a los cuestionamientos originados en un contexto, donde se utilicen ideas muy cercanas a ellos, con procesos y reflexiones de forma individual y grupal, que permitan emprender un proceso de modelación que posibilite la descripción de la construcción de modelos matemáticos de la situación planteada. Según Ezquerra, Iturrioz y Díaz (2011), a los actores de la enseñanza y aprendizaje de la matemática se les ha olvidado incluir el contexto en el aula, como si el conocimiento matemático sólo existiera de forma acabada como se presenta en los libros o en el discurso de algunos profesores, donde lo algorítmico prevalece por encima de los acercamientos verbales, numéricos o gráficos.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) expresa que el estudio de las funciones es de suma importancia en el desarrollo de una comunidad, ya que las funciones conectan modelos y patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables en el tiempo; sin embargo, Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) reportan que hay un distanciamiento bien marcado entre la comprensión de la noción función a nivel escolar y su necesidad de uso consciente a nivel social, lo que podría estar inhibiendo la comprensión de este concepto, que según Hitt (2003) es indispensable para el acceso al cálculo. Por lo que un aprendizaje inadecuado de la noción función, pudiera generar problemas de aprendizajes de conceptos más avanzados.

En este trabajo se tuvo como objetivo analizar los procesos de modelación de relaciones funcionales de estudiantes de noveno grado, como estrategia de enseñanza para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos, buscando que los estudiantes al hacer transformaciones en los registros de representación de una función, reflexionaran sobre la relación funcional utilizada y pudieran asignar significado y sentido a los elementos de las representaciones analizadas, al establecer congruencias entre elementos de las representaciones involucradas (Meel, 2003), con representaciones fenomenológicas, que los llevara a reconocer las funciones en contextos no académicos.

Acercamiento teórico

El Ministerio de educación nacional colombiano (2005) plantea la inclusión de la modelación en el aula de matemáticas, la cual es vista como un proceso indispensable en su aprendizaje, por permitir a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. Para Búa, Fernández y Salinas (2016, p.137) “la modelización matemática se refiere al proceso, representado usualmente mediante esquemas descriptivos, que relacionan una situación real con las matemáticas”, lo que permite afirmar que la modelación matemática incluye la descripción de los distintos procesos, métodos, caminos y alternativas que usan y ponen a prueba los estudiantes para dar a conocer una solución a una problemática dada. Según Brousseau (2007) el recurso a procesos de modelación en los procesos de enseñanza y aprendizaje potencian las habilidades y las actitudes de los estudiantes hacía la matemática, es decir, actúa como un facilitador de condiciones que genera en los estudiantes competencias matemáticas.

Por un lado, el acercamiento del estudiante a un escenario matemático, partiendo de una situación auténtica y cotidiana, permite que él construya un modelo que representa un sistema, desarrollando un trabajo sobre él, obteniendo así una solución que necesita ser confrontada con el sistema inicial. Una vez que se ha construido el modelo y se ha encontrado la solución, el sistema desaparece, el modelo se convierte en parte de la herencia matemática del estudiante y comienza un nuevo proceso de modelado, que puede o no estar conectado con el anterior (García et al. 2006).

Y según Hitt (2000), a través de las funciones se puede "modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos descritos" (P. 81). De lo que se puede inferir que una actividad en una situación problema que involucre el contexto donde se desarrollan los estudiantes, motiva la potencialización de las habilidades y las actitudes de los mismos hacían la comprensión del objeto matemático estudiado. Y además que usar la modelación a través de las funciones provee al estudiante alternativas para llegar a la solución de un problema, teniendo en cuenta que con el solo hecho de describir y analizar un acontecimiento del contexto o reproducir una representación de un objeto matemático, se está modelando matemáticamente.

Visto de esta manera, las funciones y la modelación matemática están íntimamente relacionadas, lo cual permite obtener aprendizajes óptimos reflejados en las habilidades de los jóvenes cuando estos plantean cálculos no muy complicados pero llenos de validez. Además de esta relación, hay que tener en cuenta las representaciones que permita reproducir el objeto matemático que se estudia. Una representación semiótica es descrita por Duval (2004) como la forma que tienen las personas de externalizar sus representaciones mentales, y es el dominio adecuado de las transformaciones entre las representaciones lo que lleva a los estudiantes a comprender un concepto matemático (Oviedo, et al., 2012). Y si se tiene en cuenta que no es posible acceder a un objeto matemático a través del análisis de una sola de sus representaciones, ya que esto lleva al estudiante a confundir el objeto representado con su representante, se requiere tener actividad con diversas representaciones del objeto estudiado para que se llegue a comprenderse su funcionalidad (Duval, 2004). Lo que significa que el estudiante debe explorar distintas representaciones de una función para relacionar sus elementos con elementos del contexto sociocultural, poder asignarle significado y sentido a este objeto.

Además, el objeto función concebido como un objeto matemático que representa una relación de magnitudes variables (Pecharroman, 2014) y como una herramienta eficaz para modelar situaciones de variación y cambio, que lleva implícita la idea de que un cambio en una de las variables tendrá efecto sobre las otras (Ospina 2012), es la herramienta perfecta para presentar al estudiante a situaciones contextualizadas que involucren relaciones funcionales. Esto tiene mucho sentido, pues según D' Amore, Font y Godino (2007) al orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje, el profesor debe proporcionarle al estudiante situaciones diseñadas de tal forma que el conocimiento sea necesario para su solución y donde el estudiante aprenda a defenderse en un contexto con algún tipo de dificultades que le generen algún desequilibrio. En este sentido, las relaciones funcionales emergen como hilo de enlace entre el objeto matemático función y el contexto de desempeño de los aprendices, ya que "una función no es ninguna estadística de valores ni una representación gráfica ni un objeto de cálculo ni una formula, sino todo ello al mismo tiempo" (Rey et al., 2009, p.122), y una relación funcional es también todo ello al mismo tiempo en un contexto determinado donde cada elemento identificable de la función en la relación funcional, tiene un significado y un sentido también identificable en el contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el mismo sentido de lo anterior, Brousseau (2007), considera como una alternativa para lograr que los estudiantes den lo máximo de sí para comprender los conceptos, que las actividades que se les propongan estén relacionadas con el contexto sociocultural donde se desempeñan. Y propone el uso de situaciones didácticas, las cuales considera como fundamentales en el proceso de formación matemática de una persona, ya que permiten controlar la coherencia del proceso de modelación de los estudiantes.

Por otro lado, según Duval (2004) no se puede acceder al concepto de función a través del análisis de una sola de sus representaciones, se requiere tener actividad con las diversas representaciones: con las expresiones algebraicas, tablas, números, gráficas y lenguaje natural. Esa actividad involucra transformaciones tipo tratamiento y tipo conversión entre registros y representaciones semióticas. Podría decirse de lo planteado por Duval que si no se dispone de al menos dos formas distintas de expresar y representar contenidos matemáticos, no parece posible aprender y comprender dicho contenido. A su vez, Streun (2000) afirma que transformar un problema de un modo de representación a otro, es una de las heurísticas de mayor importancia en matemática educativa. También menciona que comprender un problema correctamente está relacionado con la formación de una representación mental adecuada de la situación, en donde todas las componentes relevantes pueden ser relacionadas con el conocimiento que el resolutor tiene. Adicional al conocimiento requerido para entender el problema, debe existir también un conocimiento algorítmico (habilidad para llevar a cabo métodos definidos de resolución de problemas) y un conocimiento estratégico (habilidad para aproximarse al problema).

Los registros semióticos de representación son fundamentales en el trabajo con funciones, ya que el dominio de estas son en sí un aprendizaje que genera significados y competencia en quien aprende (Duval, 2017, 2004). De este modo, es fundamental que los estudiantes relacionen los elementos de diferentes representaciones de una función y puedan ponerlos en paralelo, para que puedan lograr un mejor aprendizaje de este concepto.

El recurso a las representaciones semióticas en el aprendizaje en educación matemática es fundamental (Duval, 2004). En este sentido, Duval (2017) considera que no hay noesis sin semiosis, esto es, no hay forma de comprender los objetos matemáticos sin hacer uso de sus representaciones, y esto porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, “el acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente por medio de la producción de representaciones semióticas” (Duval, 2012, p. 15). Lo que permite hacerse una idea de la importancia de las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De lo anterior se puede inferir que para llegar a comprender en matemáticas se requiere de la integración sinérgica de dos o más registros del objeto estudiado (Duval, 2004), quizás en razón a que la actividad matemática requiere de un modo específico de funcionamiento cognitivo, por la forma en que se accede a los objetos estudiados (Duval, 2012). Según este autor, el rol central que juegan las representaciones semióticas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos modifica completamente el funcionamiento cognitivo que se requiere para comprender en matemáticas, diferente de los requerimientos para el aprendizaje en otras áreas del conocimiento. Por lo que se pueden ver las representaciones semióticas como un medio de expresión que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan, cada uno de los cuales tiene sus propias reglas (Duval, 2017).

Las transformaciones las hay de tipos conversión y tipo tratamiento. Las transformaciones tipo tratamiento consisten en decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en el mismo registro, mientras que las transformaciones tipo conversión son las que se hacen al decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en otro. Los elementos de dos representaciones se pueden coordinar, de tal forma que se identifiquen algunos elementos comunes entre diferentes representaciones. Además, ninguna representación representa al objeto en su totalidad, ellas se complementan.

Aspectos metodológicos

Se planteó un trabajo netamente cualitativo, de tipo estudio de casos (Servan y Servan, 2010). A los estudiantes se les propuso tres instrumentos, tipo cuestionario abierto, compuestos por algunas indicaciones por escrito y algunos requerimientos propios de cada registro utilizado como registro principal, donde se proponen algunas variaciones estructurales, se asocian a otras representaciones de otros o del mismo registro, para observar si las variaciones en el registro principal o de partida, son percibidas como tal en el registro de llegada, que permitieran hacer un análisis cognitivo de dichas representaciones.

Los instrumentos fueron aplicados a 93 estudiantes de noveno grado, con edades entre 13 y 15 años, provenientes de una institución pública colombiana, buscando analizar sus fortalezas o dificultades de aprendizaje al hacer transformaciones con las representaciones de una función.

Se reportan los resultados de una sola de las actividades consistente en la historia de Juan, un mototaxista, quien realiza cierto número de carreras por día entre dos veredas de la costa atlántica colombiana; cobra por cada carrera un valor de $700, pero la moto no es suya y tiene que entregar al dueño una tarifa diaria de $12.000. Se pidió a los estudiantes:

1) Encontrar los salarios diarios de Juan cuando realiza 12, 15, 20, 21, 24 o 31 carreras en cada uno de los seis días. Argumenta la forma como obtuviste los resultados.
2) Determinar las cantidades que intervienen en la situación ¿Cuáles varían y cuáles permanecen fijas?
3) El salario de cada día de trabajo de Juan, entre qué valores oscila (cambia) ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo?
4) Encontrar una expresión matemática que modele la situación.

La información se obtuvo de las producciones escritas de los estudiantes y por observación directa de su actuar, al dar sus respuestas, luego se hizo un proceso de triangulación de datos y de observadores, lo que según Cisterna (2005) proyecta un proceso que se realiza una vez concluido el trabajo de la recopilación de la información, tomando lo pertinente y relevante en relación con la temática de investigación. El análisis de la información se hizo utilizando la técnica análisis de contenido (Bernárdez, 1995), donde se hizo segmentación en unidades por criterios temáticos y temporales, identificando las distintas modalidades y finalmente agrupamientos sobre la base de las categorías de análisis previamente definidas.

Resultados preliminares

Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes (82,7%), al intentar resolver la situación, encontraron un patrón aritmético, el cual describieron e hicieron funcionar como una expresión algebraica (ver figura 1) y a partir de esto, dieron sus respuestas; esta secuencia les permitió realizar un acercamiento a los procesos de modelación con lo que se aproximaron a la construcción de expresiones analíticas, que los llevó a identificar la presencia de las funciones en su contexto de desempeño. No obstante, les costó aceptar otras representaciones diferentes des analíticas como representación de una función, es más, esta representación es según los estudiantes, la función. Confundiendo el objeto representado con su representante (Duval, 2004), ninguno dio como respuesta una tabla, una gráfica u otra representación. Sin embargo, un grupo reducido (20.4%) de estudiantes encontró una representación algebraica para la relación funcional ($f(x) = 700x - 12000$) y al reemplazar x por cada número de carreras realizada, obtuvieron el salario diario.

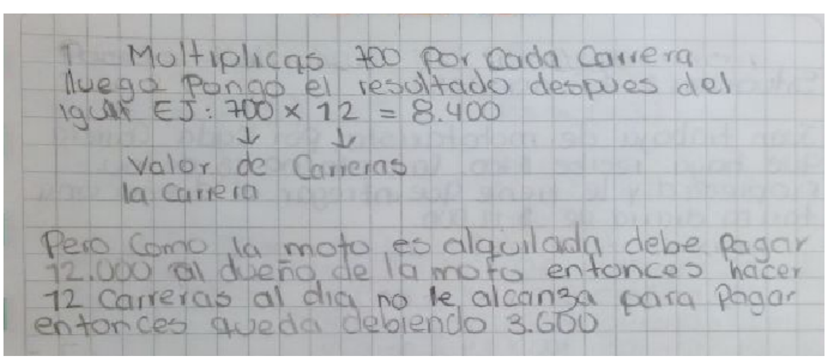

Multiplicas 700 por cada carrera
luego pongo el resultado despues del
igual EJ: 700 × 12 = 8.400
Valor de la carrera
Carreras
Pero como la moto es alquilada debe pagar
12.000 al dueño de la moto entonces hacer
12 carreras al dia no le alcanza para pagar
entonces queda debiendo 3.600

Figura 4. Manuscrito presentado por E_{12} al intentar explicar su respuesta.

Además, con mucha fluidez describieron los procesos realizados, como puede apreciarse en la respuesta dada por E_5 (figura 2), quien muy a su modo, pero de muy buena manera, argumenta sobre el proceso realizado para obtener su respuesta. En el manuscrito de E_5 se muestra mucha facilidad al extraer la información de la relación funcional utilizada en la situación problema, es decir, identificó con facilidad los elementos de una función en la relación funcional utilizada para contextualizar la situación y describe la forma en la que logró hacerlo.

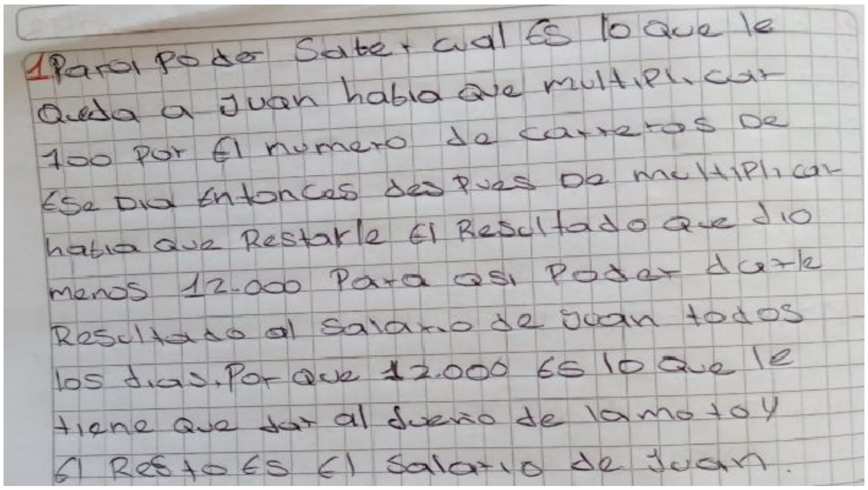
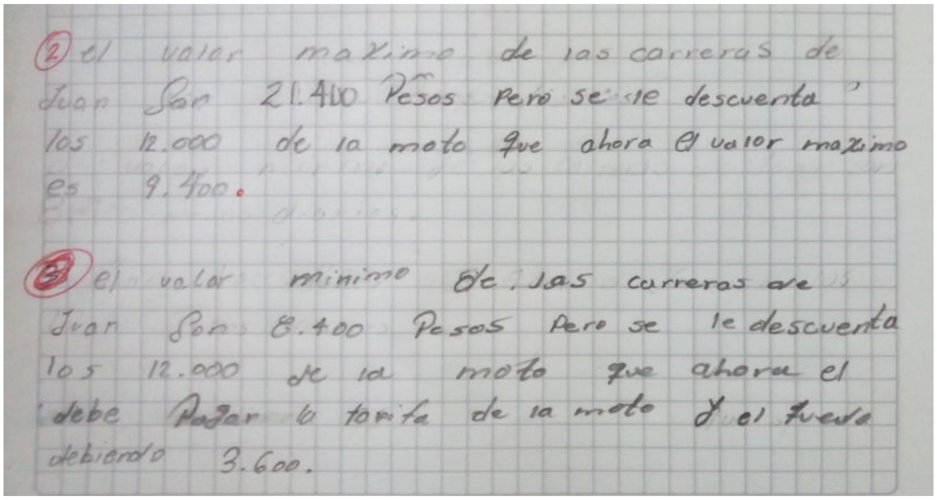

1 Para poder Saber cual ES lo que le
Queda a Juan habia que multiplicar
700 por El numero de carretos De
ESe Dia entonces despues De multiplicar
habia que Restarle El Resultado que dio
menos 12.000 Para asi Poder darle
Resultado al Salario de Juan todos
los dias. Por que 12.000 ES lo que le
tiene que dar al dueño de la moto y
El Resto ES El Salario de Juan.

Figura 5. Respuesta dada por E_5, al argumentar la forma cómo obtuvo su respuesta a la pregunta 1.

Por otra parte, se encontraron dificultades en los estudiantes para realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento entre las representaciones de las funciones involucradas, y relacionar sus elementos con los de la representación fenomenológica utilizada en la situación. El 46,2% de los estudiantes cometen errores de escritura (Carrión, 2007), lo que se evidencia en sus soluciones al escribir $700 \times 12000 = 8400 \times 6 = 50400$, donde la secuencia de expresiones no son equivalentes. No obstante Carrión (2007, p.21) considera que “el error es requerido para afianzar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada” es decir que el estudiante necesita muchas veces errar para aprender y distinguir entre lo que es válido o no hacer, en un determinado contexto. Según Ruano, Socas y Palarea (2008) este tipo de errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Por lo que los errores que cometen los estudiantes son muy buenos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Y el análisis y tratamiento de estos errores puede ser un fuerte potencializador de las habilidades matemáticas de los estudiantes.

El análisis visual parece haberles jugado una mala pasada a estos estudiantes, y similar a lo reportado por Amaya et al., (2016) en sus respuestas no fueron más allá de lo visual, de aquello que tenían en su hoja y al comunicar el dominio y el rango de la relación funcional, sólo consideraron valores que tenían entre los elementos de las representaciones que habían producido; como se evidencia en el manuscrito de E_{37} (figura 3), quien da como salarios máximos y mínimo, los valores máximos y mínimos correspondientes a los encontrados en el proceso realizado hasta entonces, por ejemplo, da como salario máximo 9.400 pesos y como mínimo -3.600, sin considerar que cuando no se hace ninguna carrera la pérdida es mayor (12.000) y que el salario diario de Juan dependen del número de carreras que se puedan llegar a hacer en un día que acaba luego de 24 hora, por lo que esa es una limitante para que las ganancias sean infinitas o muy grandes; esto es, no se hizo un análisis a profundidad de los intervalos de variación de esta relación funcional.


2 el valor maximo de las carreras de Juan son 21.400 Pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el valor maximo es 9.400.

3 el valor minimo de las carreras de Juan son 8.400 Pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el debe pagar la tarifa de la moto y el queda debiendo 3.600.

Figura 6. Respuesta dada por E_{37} al reportar los salarios máximo y mínimo del mototaxista.

Conclusión

Los resultados permiten concluir que, aunque los alumnos participantes ya habían tenido numerosas experiencias que involucraban conversiones y tratamientos entre registros de una función, se pueden destacar tres aspectos específicos en sus soluciones: 1) el uso y la manipulación de relaciones funcionales facilitó a los estudiantes identificar los elementos de una función, es decir, el trabajo con funciones a través de relaciones funcionales contextualizadas, facilitó la identificación y uso de las funciones en contexto, por lo que es importante que desde el aula se propicie el análisis de diferentes registros y representaciones de los conceptos estudiados. 2) Los produjeron muy buenas y variadas representaciones, pero tuvieron dificultades para establecer congruencias entre sus elementos, y para coordinarlos con elementos de representaciones del registro fenomenológico y 3) la familiaridad con los elementos de la relación funcional les facilitó a los estudiantes encontrar y describir un patrón aritmético y utilizarlo para dar sus respuestas. Sin embargo, les costó aceptar representaciones diferentes de las analíticas, como representación de una función.

La facilidad en la identificación y clasificación de los elementos de la relación funcional, facilitó un acercamiento bastante adecuado, al concepto de variable y al análisis de elementos de una función lineal, tales como pendiente, intercepto al origen; así como hacer un acercamiento a procesos de modelación utilizando representaciones analíticas como secuencias, polinomios aritméticos o patrones de regularidad. Este ambiente en condiciones de variación y cambio facilitó un acercamiento muy importante a la noción de función.

Sin embargo, los procesos de modelación matemática en los estudiantes son muy incipientes ya comienzan a reconocer patrones de regularidad y a establecer conjeturas que pueden comprobar o refutar, por lo tanto, las interacciones promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre sus ideas y conjeturas iniciales, de tal forma que mediante argumentaciones y explicaciones pudieran cuestionar su concepciones iniciales y darle así nuevos y más consistentes significados a su conocimiento.
Finalmente, se puede observar que los argumentos planteados en la situación, permiten al estudiante resignificar la noción de función mediante un nuevo uso y significado de la modelación. Esto porque le puede permitir al estudiante tomar decisiones, asignar significados y generar procedimientos en pro del desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

Referencias bibliograficas

Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zarzal.

Búa, J., Fernández, M. & Salinas, M. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 19(2), 135-163.

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria, 14(1):* 61-71.

D' Amore, B., Font, V. & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, (2),* 49-77.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Ezquerra, Á., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias. 9 (2), 252-264.* 2012.

García, F., Gascón, J., Ruiz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38 (3), 226-246.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), *221-271*.

Meza, F. & Amaya, T. (2017). Conflictos epistémicos al hacer transformaciones en las representaciones de una función. *Revista Entornos*, 29(1), 43-53.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado el 21 de septiembre de 2018, de http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

Oviedo, L. Kanashiro, A. Bnzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria (13), 29-36.*

Pecharroman, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 111-133.

Rey, G., Boubée, C., Vazquez, P. & Cañibano., A. (2009). Ideas para enseñar, aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista iberoamericana de educación matemática (20)*, 153-162.

Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), *61-74*.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.) *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp. 221-252). Madrid: Narcea.

Tigreros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Innovación Educativa, 9(46),* 75-87.

Streun, A. (2000). Representation in applying function. *International journal of mathematical education in science and technology,* 31(5). 703 – 725.